Table des matières

Avant-propos

Ce volume sur la théorie des probabilités destiné aux étudiants préparant le Capes de mathématiques fait suite au cours d'analyse publié dans la même collection. Il peut être considéré comme une application des chapitres sur les séries et sur l'intégration. Ce livre sera aussi utile aux candidats à l'Agrégation interne de mathématiques.

Notre objectif est de présenter de façon rigoureuse les bases de la théorie des probabilités sans référence à la théorie de la mesure, ce qui nous contraint à admettre certains résultats comme le théorème 6.4 sur la densité de probabilité d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité et le théorème 6.15 de la limite centrale.

Le premier chapitre consacré à l'analyse combinatoire nous fournit les outils indispensables dans le cadre simple des probabilités sur un univers fini. La formule intuitive qui nous donne, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, une mesure de probabilité comme étant égale au « nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles » nous ramène à des calculs de dénombrement.

Dans un deuxième chapitre, nous présentons l'axiomatique de Kolmogorov où les définitions et théorèmes rencontrés sont ceux que l'on retrouvera en L3 dans un cours de théorie de la mesure et intégration. Il s'agit essentiellement de « raisonnements ensemblistes ». Ce chapitre est naturellement suivi d'un chapitre sur les probabilités conditionnelles.

Pour ces deux chapitres, les applications que nous donnons ne se limitent pas à quelques cas dits concrets de la vie courante. Nous laissons le soin au physicien ou à l'économiste qui a étudié un tel cours de probabilité de donner ces exemples. La « mathématisation » d'une situation concrète dépend de ce qui est attendu par l'utilisateur et n'est pas toujours aisée. Nous donnons quelques applications à la théorie des nombres, ce qui peut faire partie de la vie courante de l'étudiant en mathématiques.

Les derniers chapitres de cours sont consacrés à l'étude des variables aléatoires et à quelques problèmes de convergence (convergence en probabilité, en moyenne et en loi). Ces variables aléatoires sont tout d'abord étudiées dans le cas discret, où la notion d'espérance (ou de moyenne) se définit de manière naturelle. Ce chapitre correspond à ce qui est en général étudié en L2 et en deuxième année de classes préparatoires aux grandes écoles. Dans ce cadre discret, les raisonnements utilisent essentiellement les résultats sur les séries numériques et les séries entières. Le cadre plus général des variables aléatoires est plus délicat et est présenté avec la seule connaissance de l'intégrale de Riemann sur un segment. L'espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives est définie par $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt$ en constatant que la fonction $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ qui est décroissante est Riemann-intégrable sur tout segment, ce qui nous suffit. Le chapitre correspondant nécessite plus d'attention du fait de son caractère théorique. En première lecture, l'étudiant pourra en admettre les principaux résultats. Enfin, l'avant dernier chapitre est consacré à l'étude des variables aléatoires à densité en se concentrant sur les exemples classiques. Le dernier chapitre est consacré à quelques épreuves du Capes portant sur les probabilités, le niveau d'exigence pour cette épreuve ne dépassant pas le niveau de connaissance acquis en première et deuxième année d'université ou de classe préparatoire aux grandes écoles. Nous espérons que ce travail sera utile aux candidats au Capes et à l'agrégation interne.

De nombreux exercices, classiques et moins classiques, tous corrigés en détail, complètent ce cours.

Pour conclure, nous tenons à remercier les éditions Deboeck et en particulier Alain Luguet pour la confiance qu'ils nous accordent en publiant ce travail.