Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage est consacré à l'étude de l'approximation uniforme d'une fonction continue (resp. continue et périodique) sur un intervalle réel (resp. la droite réelle) par des fonctions polynomiales (resp. polynomiales trigonométriques). On étudie également l'interpolation polynomiale et l'approximation quadratique des fonctions continues sur un intervalle réel par des séries de polynômes orthogonaux ainsi que l'application aux formules de quadrature.

Le public visé est celui des étudiants de second cycle universitaire et en particulier les candidats à l'Agrégation (interne ou externe). Le niveau de connaissance suffisant pour la lecture de ce cours est celui du premier cycle universitaire (continuité, dérivabilité, intégrabilité au sens de Riemann des fonctions d'une variable réelle, algèbre linéaire et espaces vectoriels normés).

Les enseignants trouveront peut être avec ce livre des idées pour la conception de problèmes.

J'ai pris soin de faire suivre chaque théorème important d'une série d'applications.

Le point de vue adopté est celui de l'analyse fonctionnelle. Les méthodes classiques d'approximation (par les polynômes de Bernstein, de Fejér, orthogonaux), d'interpolation (Lagrange, Hermite) et de quadrature (Newton-Cotes, Gauss) peuvent s'exprimer à l'aide d'opérateurs ou de fonctionnelles linéaires.

L'aspect programmation est abordé par endroits en utilisant le logiciel Maple. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter [15], [12], [13], [14] ou [30].

Tout au long de cet ouvrage on manipule des applications linéaires sur l'espace de Banach $\mathcal{C}_b(I)$ des fonctions continues et bornées sur un intervalle I et à valeurs réelles.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude des fonctionnelles et des opérateurs linéaires. Dans un premier temps, on rappelle quelques propriétés des espaces normés en s'intéressant en particulier aux algèbres de Banach. Un premier résultat est le théorème des boules emboîtées, avec pour application le théorème de Baire. Ce théorème de démonstration relativement simple a de nombreuses conséquences, par exemple : un espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir de base dénombrable ; l'espace vectoriel des polynômes algébriques (ou des polynômes trigonométriques) muni d'une norme quelconque n'est pas complet ; une limite simple de fonctions continues est continue sur une partie dense ; une dérivée est continue sur une partie dense ; l'ensemble des fonctions continues sur un segment et nulle part dérivables est dense pour la convergence uniforme ; le théorème de Banach-Steinhaus. Du théorème de

Banach-Steinhaus on déduit les résultats suivants : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Banach dans un espace vectoriel normé simplement convergente alors sa limite u est linéaire continue ; si E est un espace de Banach, $\Phi = \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ une famille totale dans E, F un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F et u une application linéaire continue de E dans F alors pour tout x dans E la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$ dans $(F, \|\cdot\|')$ si et seulement si pour tout x dans Φ la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x)$ dans $(F, \|\cdot\|')$ et la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; il existe une fonction 2π-périodique et continue dont la série de Fourier diverge (théorème de du Bois-Reymond). Plus généralement on démontrera au chapitre 5 les théorèmes de Kharshiladze et Lozinski suivant :

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires continus sur l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions continues et 2π-périodiques telle que pour tout entier naturel n, l'opérateur u_n est à valeurs dans l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n et laisse invariant chaque élément de $\mathcal{P}_n$, alors il existe une fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ telle que la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$;
- si $I = [a, b]$ est un intervalle réel fermé borné non réduit à un point, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{C}(I)$ telle que pour tout entier naturel n, l'opérateur u_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$ et laisse invariant chaque élément de $\mathbb{R}_n[x]$, alors il existe une fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas uniformément convergente sur I.

Du deuxième théorème de Kharshiladze et Lozinski on déduit le résultat suivant sur l'interpolation de Lagrange.

- Pour tout choix des points d'interpolation dans l'intervalle fermé borné I, on peut toujours trouver une fonction f dans $\mathcal{C}(I)$ pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange correspondants $(L_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

Le théorème de Banach-Steinhaus nous permettra également de donner des conditions nécessaires et suffisantes de convergence des méthodes de quadrature.

Dans l'étude des formules de quadrature on rencontre des fonctionnelles de la forme :

$$f \mapsto \varphi(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

dans l'étude de l'approximation uniforme d'une fonction continue par des polynômes ainsi que dans l'étude de l'interpolation de Lagrange, on rencontre des opérateurs de la forme :

$$f \mapsto u(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \lambda_k(x)$$

et dans l'étude de l'approximation uniforme d'une fonction continue périodique par des polynômes trigonométriques, on rencontre des opérateurs de la forme :

$$f \mapsto u(f)(x) = \int_a^b f(t) K(x,t)\, dt.$$

La suite du chapitre 1 est consacrée à l'étude de ces types d'opérateurs.

Dans les chapitres qui suivent les fonctionnelles et opérateurs linéaires positifs jouent un rôle important.

Le chapitre 2 est consacré aux théorèmes de Korovkin suivants :

– Soient $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_p\} \subset \mathcal{C}(I)$ (fonctions continues sur l'intervalle I), $\mathcal{L} = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_p\} \subset \mathcal{C}(I)$ telles que la fonction ψ définie sur I^2 par :

$$\psi(t,x) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k(x)\, \theta_k(t)$$

soit à valeurs positives ou nulles et nulle si et seulement si $t = x$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{T}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. Alors pour toute fonction f continue sur I, la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

– Soient $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_p\} \subset \mathcal{F}$ (fonctions continues et périodiques sur $\mathbb{R}$), $\mathcal{L} = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_p\} \subset \mathcal{F}$ telles que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\psi(t,x) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k(x)\, \theta_k(t)$$

soit à valeurs positives ou nulles et nulle si et seulement si $t - x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{T}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Dans les chapitres 4 et 5, on donne des applications importantes de ces théorèmes.

On s'intéresse également dans ce chapitre 2 au lien avec le théorème de Weierstrass et à la détermination de majorations de l'erreur d'approximation dans les méthodes de Korovkin.

Dans le chapitre 3 on généralise la notion de polynôme en introduisant la notion de système de Tchebychev. Ces familles de fonctions nous permettent de caractériser les familles de fonctions $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2\}$ qui jouent le même rôle que le triplet $\{1, x, x^2\}$ dans le théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$.

Les systèmes de Tchebychev sont également liés à la notion de meilleure approximation polynomiale uniforme sur un intervalle compact I.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'approximation polynomiale uniforme sur un intervalle réel fermé borné d'une fonction continue par une suite de polynômes. Le théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$ nous permet de donner plusieurs démonstrations du théorème de Weierstrass sur l'approximation polynomiale uniforme des fonctions continues sur un compact. On étudie en particulier, les polynômes de Bernstein, les polynômes de Fejér-Hermite, les produits de convolution, les opérateurs de Weierstrass et de Landau, avec pour chacune de ces approximations une majoration de l'erreur.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude de l'approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une fonction 2π-périodique et continue par une suite de polynômes trigonométriques. On décrit plusieurs méthodes d'approximation et on s'intéresse plus particulièrement aux séries de Fourier. Comme conséquences du deuxième théorème de Korovkin on obtient plusieurs démonstrations du théorème d'approximation uniforme des fonctions continues 2π-périodiques par des polynômes trigonométriques sur $\mathbb{R}$ en utilisant des produits de convolution, ce qui nous conduit aux opérateurs de la Vallée-Poussin, de Fourier, de Fejér et de Jackson.

L'étude des opérateurs de Jackson permet de montrer le résultat suivant sur le degré d'approximation uniforme d'une fonction $f \in \mathcal{F}$ par des polynômes trigonométriques de degré au plus égal à n.

– $\forall f \in \mathcal{F},\ \forall n \geq 1,\ E_n(f) = d(f, \mathcal{P}_n) \leq 2\omega_f \left(\dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{1}{n+2} \right)$, où ω_f est le module de continuité.

De ce résultat on déduit un résultat analogue dans le cadre des fonctions continues sur un intervalle compact.

– $\forall f \in \mathcal{C}([a,b]),\ \forall n \geq 1,\ E_n(f) = d(f, \mathbb{R}_n[x]) \leq 2\omega_f \left(\pi^2 \dfrac{b-a}{n+2} \right)$.

Le premier théorème de Jackson permet de montrer le résultat de convergence suivant sur les séries de Fourier.

– Si $f \in \mathcal{F}$ vérifie une condition de Dini-Lipschitz (i.e. $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) \ln\left(\dfrac{1}{\delta}\right) = 0$), alors la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On étudie également dans ce chapitre le comportement asymptotique de la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ des constantes de Lebesgue associées aux opérateurs de Fourier. Cette étude permet de montrer les théorèmes de Kharshiladze et Lozinski.

Le chapitre 6 est consacré au problème de l'interpolation polynomiale.

On étudie tout d'abord le problème d'interpolation général suivant : soient E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, trouver $x \in E$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad \varphi_i(x) = y_i,$$

avec comme cas particuliers : l'interpolation de Lagrange, l'interpolation de Taylor et l'interpolation d'Hermite.

De manière plus générale, si $(x_j)_{0\leq j\leq n}$ est une suite de réels deux à deux distincts dans un intervalle I, $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_n\}$ un système de Tchebychev sur I, alors le problème d'interpolation :

$$\begin{cases} \theta \in \mathcal{T}, \\ \theta(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n), \end{cases}$$

a une unique solution.

On étudie ensuite en détail les opérateurs d'interpolation de Lagrange. Comme dans l'étude des opérateurs de Fourier, on étudie d'abord le comportement asymptotique des constantes de Lebesgue associées. Cette étude permet de montrer que pour des points d'interpolation équidistants ou pour des points d'interpolation de Tchebychev, il existe toujours une fonction f dans $\mathcal{C}(I)$ pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange ne converge pas uniformément vers f sur I (conséquence du théorème de Banach-Steinhaus).

De manière plus générale, pour des points d'interpolation quelconques, le théorème de Kharshiladze et Lozinski nous permet de déduire que pour tout choix des points d'interpolation dans I, on peut toujours trouver une fonction f dans $\mathcal{C}(I)$ pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange correspondants ne converge pas uniformément vers f sur I.

Le théorème de Jackson permet d'obtenir un résultat de convergence analogue à celui obtenu pour les opérateurs de Fourier.

Ce chapitre se termine par l'étude des opérateurs de Bernstein sur $\mathcal{F}$.

Le chapitre 7 est consacré aux espaces vectoriels réels préhilbertiens en vue de l'étude des polynômes orthogonaux au chapitre suivant. Un résultat fondamental est le théorème de Gram-Schmidt qui nous permet de construire des systèmes orthonormés. Une application étant l'existence de polynômes orthogonaux associés à une fonction poids sur un intervalle ouvert.

En relation avec le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, on étudie les notions de matrice et déterminant de Gram, avec pour application les théorèmes de Müntz.

En vue de l'applications aux séries de Fourier (trigonométriques et de polynômes orthogonaux), on s'intéresse à l'inégalité de Bessel et à l'égalité de Parseval. L'égalité de Parseval nous fournit une caractérisation des familles totales (i. e. les familles de vecteurs qui engendrent un sous-espace vectoriel dense) dans un espace préhilbertien. Dans le cas des espaces de Hilbert on montre que les notions de familles totales et maximales sont équivalentes.

Le chapitre 8 est consacré à l'étude des polynômes orthogonaux qui seront utilisés dans les deux derniers chapitres. Dans un premier temps ces polynômes sont définis en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Une première expression explicite est obtenue en utilisant les déterminants de Gram. Une autre expression explicite, plus commode, est donnée par les formules de Rodrigues, on obtient en particulier les formules classiques pour les polynômes de Legendre, Tchebychev, Laguerre et Hermite. Les formules de Rodrigues peuvent se retrouver en faisant apparaître les polynômes orthogonaux comme vecteurs propres de certains opérateurs différentiels. Les propriétés d'orthogonalité permettent de montrer que les racines des polynômes orthogonaux sont simples et permettent également de donner des formules de récurrence permettant de définir ces polynômes.

Un dernier paragraphe est consacré aux applications, deux d'entre elles étant développées dans les chapitre suivants.

Au chapitre 9 on s'intéresse à l'étude des méthodes de quadrature. Une formule de quadrature à $n+1$ points sur $\mathcal{C}(I)$, pour calculer une valeur approchée d'intégrale sur un intervalle I borné ou non, est définie comme une fonctionnelle linéaire $\varphi_n : f \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$ où n est un entier naturel non nul, $(x_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ une suite de points deux à deux distincts dans I et $(\lambda_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ une suite de réels non tous nuls. On donne tout d'abord quelques résultats généraux sur la convergence d'une telle méthode puis on s'intéresse en détails aux méthodes de Newton-Cotes avec une étude de l'erreur d'approximation.

La formule d'Euler-Maclaurin nous permet d'obtenir un développement asymptotique de l'approximation $\tau_n(f)$ de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode composée des trapèzes et aboutit à la méthode d'accélération de la convergence de Romberg qui est étudiée en détail.

Un dernier paragraphe utilise les polynômes orthogonaux pour définir les méthodes de Gauss. Là encore l'erreur d'approximation est étudiée en détail.

Enfin le dernier chapitre est une brève introduction aux développements en série de polynômes orthogonaux. On définit les coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux relativement à une famille de polynômes orthogonaux et on s'intéresse à la convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier correspondantes. Un résultat de convergence ponctuelle est donné pour les fonctions admettant une dérivée à droite et à gauche en un point. Pour une étude plus approfondie on pourra consulter [19] ou [23].

Une première version de ce livre est restée à disposition sur l'excellent site Mathprepa.com de mon ami Jean-Michel Ferrard. Cette deuxième version est corrigée et considérablement augmentée. C'est à la demande de nombreux agrégatifs que je me décide à la publier pour qu'elle soit utilisable à l'oral de l'agrégation. J'espère que ce travail sera utile.