

Exercices et problèmes corrigés pour l'Agrégation
de Mathématiques

Jean-Étienne ROMBALDI

13 avril 2018

Sommaire

Avant-propos	ix
I Exercices et problèmes d'analyse et de probabilités	1
1 Espaces normés	3
2 Suites et séries numériques	31
3 Suites et séries de fonctions	71
4 Fonctions convexes	121
5 Intégration	145
6 Transformées de Fourier et de Laplace	185
7 Équations fonctionnelles	227
8 Fonctions de plusieurs variables réelles	263
9 Dénombréments et probabilités	285
II Exercices et problèmes d'algèbre et de géométrie	343
10 Groupes, anneaux, corps	345
11 Polynômes	383
12 Algèbre linéaire et bilinéaire	407
13 Géométrie	439
Bibliographie	469

Table des matières

Avant-propos	ix
I Exercices et problèmes d'analyse et de probabilités	1
1 Espaces normés	3
Exercice 1.1. Normes $\ \cdot\ _p$ sur \mathbb{R}^n	3
Exercice 1.2. Normes $\ \cdot\ _p$ sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$	5
Exercice 1.3. Norme d'une application linéaire en dimension finie	7
Exercice 1.4. Norme d'une forme linéaire continue sur ℓ^∞	8
Exercice 1.5. Normes d'applications linéaires continues sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$	9
Exercice 1.6. Norme d'une application linéaire continue sur un espace préhilbertien	14
Problème 1.1. Normes sur $\mathbb{R}[x]$ et sur ℓ^1	15
2 Suites et séries numériques	31
Exercice 2.1. Suites définies par $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$	31
Exercice 2.2. Suites définie par $x_{n+1} = \sin(\alpha x_n)$	36
Exercice 2.3. Formule de Stirling	39
Exercice 2.4. Série non commutativement convergente	40
Exercice 2.5. Série alternée de Bertrand	42
Exercice 2.6. Une formule pour π	44
Exercice 2.7. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ convergentes	47
Exercice 2.8. Un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	50
Exercice 2.9. Restes d'une série alternée	53
Problème 2.1. Développement de $\frac{\sin(z)}{z}$ en produit infini	54
3 Suites et séries de fonctions	71
Exercice 3.1. Étude de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$	71
Exercice 3.2. Un théorème de Berstein	75
Exercice 3.3. Un théorème de Borel	78

Exercice 3.4. Une caractérisation des fonctions analytiques réelles	84
Exercice 3.5. Le théorème des zéros isolés	88
Exercice 3.6. Série trigonométrique et série de Fourier	89
Exercice 3.7. Série entière et série de Fourier	90
Exercice 3.8. Développements en série de Fourier	91
Exercice 3.9. Série de Fourier et équation différentielle	94
Exercice 3.10. Inégalité de Wirtinger	95
Exercice 3.11. Équation de la chaleur	96
Problème 3.1. Formule sommatoire de Poisson. Fonction \mathcal{P} de Weierstrass	99
4 Fonctions convexes	121
Exercice 4.1. Les inégalités de Jensen	121
Exercice 4.2. Fonctions mid-convexes	122
Exercice 4.3. Fonctions logarithmiquement convexes	124
Exercice 4.4. Comparaison de la longueur de deux courbes	127
Problème 4.1. Théorème de Bohr-Mollerup et fonction gamma	129
5 Intégration	145
Exercice 5.1. Calcul élémentaire de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ pour $\Re(\alpha) > 0$	145
Exercice 5.2. Une condition nécessaire d'intégrabilité	146
Exercice 5.3. L'intégrale de Poisson	147
Exercice 5.4. Intégrales de Wallis	149
Exercice 5.5. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x} - 1} dx$ pour $\Re(\alpha) > 0$	151
Exercice 5.6. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}} dx$	152
Exercice 5.7. La méthode de Laplace	154
Exercice 5.8. Volume de la boule unité de l'espace euclidien \mathbb{R}^n	155
Exercice 5.9. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$	159
Exercice 5.10. Comparaison série-intégrale	161
Exercice 5.11. Aire du domaine délimité par une courbe simple	171
Problème 5.1. Produit de convolution et un théorème de Titchmarsh	173
6 Transformées de Fourier et de Laplace	185
Exercice 6.1. Théorème de Riemann-Lebesgue	185
Exercice 6.2. Transformation de Fourier et produit de convolution	187
Exercice 6.3. Transformation de Laplace et intégrale de Dirichlet	192
Exercice 6.4. Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales de Fresnel	196
Exercice 6.5. Transformation de Laplace et équations différentielles li- néaires à coefficients constants	199
Problème 6.1. Quelques propriétés de la transformation de Laplace	203

7 Équations fonctionnelles	227
Exercice 7.1. Exemples d'équations fonctionnelles	227
Exercice 7.2. Équation fonctionnelle de Cauchy	229
Exercice 7.3. Caractérisation des fonctions cos et ch par l'équation fonctionnelle $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$	232
Exercice 7.4. L'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$	234
Exercice 7.5. Fonction Γ et équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$	237
Exercice 7.6. Fonction théta de Jacobi	239
Problème 7.1. Équation fonctionnelle de Guichard	242
8 Fonctions de plusieurs variables réelles	263
Exercice 8.1. Fonctions implicites et développements limités	263
Exercice 8.2. Points fixes et fonctions implicites	265
Exercice 8.3. Un résultat de continuité des valeurs propres	266
Exercice 8.4. Théorème des extrema liés	268
Exercice 8.5. Extrema liés et inégalité arithmético-géométrique	272
Problème 8.1. Différentiabilité d'une distance et d'une norme	273
9 Dénombrements et probabilités	285
Exercice 9.1. Dérangements d'un ensemble fini	285
Exercice 9.2. Dénombrement des surjections d'un ensemble fini sur un autre	289
Exercice 9.3. Nombres de Bell	291
Exercice 9.4. Fonction indicatrice d'Euler et probabilités	293
Exercice 9.5. Un théorème de Cesàro	295
Exercice 9.6. Fonction ζ de Riemann et probabilités	301
Exercice 9.7. L'aiguille de Buffon	302
Exercice 9.8. Marche aléatoire sur une droite	305
Exercice 9.9. Preuve probabiliste du théorème de Weirstrass	310
Problème 9.1. Une approche stochastique de la fonction gamma	312
II Exercices et problèmes d'algèbre et de géométrie	343
10 Groupes, anneaux, corps	345
Exercice 10.1. Involutions dans \mathcal{S}_n	345
Exercice 10.2. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par translation	347
Exercice 10.3. Action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence	351
Exercice 10.4. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison	356
Exercice 10.5. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence	360
Exercice 10.6. Théorème de Lamé	362
Problème 10.1. Sous-groupes additifs de \mathbb{R}^n	364
11 Polynômes	383
Exercice 11.1. pgcd de $P_n = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ et P'_n	383
Exercice 11.2. Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton	384
Exercice 11.3. Polynômes d'interpolation de Lagrange	385
Exercice 11.4. Nombres réels algébriques	388

Problème 11.1. Constructions à la règle et au compas	389
12 Algèbre linéaire et bilinéaire	407
Exercice 12.1. Matrices de Pascal et de Hankel	407
Exercice 12.2. Matrices compagons	409
Exercice 12.3. Matrices de permutation et matrices circulantes	414
Exercice 12.4. Matrice de Hessenberg	417
Exercice 12.5. Diagonalisation et puissances d'une matrice	420
Exercice 12.6. Décomposition polaire	422
Exercice 12.7. Séries matricielles	424
Exercice 12.8. Exponentielle de matrice et système différentiel	426
Problème 12.1. $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	427
13 Géométrie	439
Exercice 13.1. Coniques et quadriques	439
Exercice 13.2. Nombres complexes et géométrie du triangle	441
Exercice 13.3. Un théorème de Ptolémée	445
Exercice 13.4. Puissance d'un point par rapport à une sphère	448
Problème 13.1. Ellipsoïdes de \mathbb{R}^n . Théorèmes de F. John et C. Loewner	451
Bibliographie	469

Avant-propos

Ce livre est un complément sous forme d'exercices et problèmes aux livres de Jean-François Dantzer (mathématiques pour l'agrégation, analyse et probabilités) et de l'auteur (mathématiques pour l'agrégation, algèbre et géométrie) publiés dans la même collection.

On pourra se reporter à ces ouvrages pour les notions de cours utilisées dans la résolution des exercices et problèmes.

Les exercices proposés peuvent servir de développement pour les leçons d'oral de l'agrégation interne ou externe et les problèmes peuvent être utiles comme entraînements aux épreuves écrites. Certains énoncés de problèmes sont en fait inspirés de problèmes d'agrégation interne ou externe.

Le choix des thèmes abordés est limité par le nombre de pages de ce volume que l'on a voulu de taille raisonnable.

En vue des épreuves écrites d'agrégation, une façon efficace d'exploiter ces problèmes consiste à les rechercher et rédiger sa propre solution de façon détaillée, puis à confronter les résultats aux solutions proposées.

Je tiens enfin à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguët pour la confiance qu'ils m'accordent.