

Annales 2011

CAPES externe, interne
& Agrégation interne de mathématiques

5 problèmes corrigés avec solutions détaillées

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi

Table des matières

Avant-propos	5
1 CAPES interne	7
1.1 Énoncé	7
1.2 Corrigé	16
2 CAPES externe, épreuve 1	35
2.1 Énoncé	35
2.2 Corrigé	41
3 CAPES externe, épreuve 2	63
3.1 Énoncé	63
3.2 Corrigé	69
3.3 Compléments	97
3.3.1 Aire de l'intérieur d'une ellipse	97
3.3.2 Volume d'un ellipsoïde	97
3.3.3 Norme opérateur d'une matrice symétrique	99
4 Agrégation interne, épreuve 1	103
4.1 Énoncé	103
4.2 Corrigé	112
5 Agrégation interne, épreuve 2	137
5.1 Énoncé	137
5.2 Corrigé	144

Avant-propos

Voici la livraison 2011 des annales des concours proches que sont les CAPES internes et externes et l'agrégation interne de mathématiques. Ces problèmes ont été corrigés avec soin pour permettre de s'entraîner sur des énoncés longs avec un corrigé détaillé.

Les sujets sont variés. On commence par un joli problème entièrement consacré aux *probabilités*, avec des lancers successifs de pièces, une utilisation du tableur et un peu d'*algorithmique*.

Puis vient l'énoncé de la première composition du CAPES externe, avec un petit problème de *construction de triangles*, un autre sur le *théorème des valeurs intermédiaires* et sa réciproque, et un autre enfin sur les *polynômes de Laguerre*.

La seconde épreuve du CAPES externe s'intéresse à des *coniques* et des *quadriques* en liaison avec une étude des *matrices réelles symétriques définies positives*.

La première épreuve de l'agrégation interne porte entièrement sur les *graphes*, et motive un travail matriciel important où l'on retrouve des matrices réelles symétriques appelées *Laplaciennes*. Ce problème montre que la distribution des valeurs propres de la matrice laplacienne d'un graphe contient des informations combinatoires intéressantes sur le graphe lui-même. On démontre ainsi que :

- un graphe est connexe si et seulement si la seconde valeur propre λ_2 de sa laplacienne (ces valeurs propres étant classées dans l'ordre croissant et comptées avec leurs multiplicités) est strictement positive ;
- un graphe est biparti si et seulement si $\lambda_2 = 2$;
- le nombre chromatique χ d'un graphe vérifie :

$$\chi \geq 1 + \frac{1}{\lambda - 1}$$

où λ est la plus grande valeur propre de la laplacienne du graphe.

Enfin, la seconde épreuve d'agrégation interne nous offre un long entraînement sur les espaces de Banach $\mathcal{BC}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{BC}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues (ou continument dérivables) bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , pour les normes respectives $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$ et $\|\varphi\|_{\mathcal{BC}^1} = \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty$.

Ce problème, qui propose d'étudier certaines équations différentielles et s'intéresse aux propriétés de certains opérateurs entre espaces de Banach, donne l'occasion de réviser des parties du programme qui sont parfois laissées de côté quand on prépare l'interne.

Dany-Jack Mercier & Jean-Etienne Rombaldi, ce 10 mars 2011.

