

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>5</b>
<b>1 CAPES interne</b>	<b>7</b>
1.1 Énoncé . . . . .	7
1.2 Corrigé . . . . .	20
<b>2 CAPES externe, épreuve 1</b>	<b>47</b>
2.1 Énoncé . . . . .	47
2.2 Corrigé . . . . .	56
<b>3 CAPES externe, épreuve 2</b>	<b>77</b>
3.1 Énoncé . . . . .	77
3.2 Corrigé . . . . .	86
3.3 Compléments . . . . .	113
3.3.1 Identification d'une suite à une série formelle . . . . .	113
3.3.2 Principe du berger . . . . .	114
3.3.3 Trois lemmes sur les cardinaux . . . . .	115
3.3.4 Chemins de Dyck et parenthésage . . . . .	117
<b>4 Agrégation interne, épreuve 1</b>	<b>121</b>
4.1 Énoncé . . . . .	121
4.2 Corrigé . . . . .	130
<b>5 Agrégation interne, épreuve 2</b>	<b>159</b>
5.1 Énoncé . . . . .	159
5.2 Corrigé . . . . .	168
5.3 Compléments . . . . .	192
5.3.1 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ . . . . .	192
5.3.2 Critère d'irrationalité . . . . .	193



Château de sable - DJM 2002 - Plage Salako (Guadeloupe)



Baie de Fréjus - décembre 2008

## Avant-propos

Nous venons de travailler les sujets proposés en 2010 aux écrits des CAPES externe et interne, et de l'agrégation interne, et nous proposons ici nos corrections détaillées, avec quelques compléments de cours quand cela nous a semblé utile.

Ces trois concours sont très proches pour ce qui est du programme des écrits, et le candidat à l'un de ces concours aura tout à fait intérêt à travailler par lui-même ces cinq énoncés.

Le sujet du CAPES interne est formé de deux problèmes indépendants, l'un d'analyse, l'autre de géométrie. Le problème d'analyse montre une utilisation répétée du théorème des accroissements finis pour obtenir des propriétés de convexité d'une "courbe en cloche". C'est une bonne façon de s'entraîner à manier des cordes et des tangentes. Le problème propose ensuite plusieurs calculs approchés d'une intégrale, ainsi qu'une comparaison des résultats obtenus. Le problème de géométrie est l'occasion de réviser des formules classiques du cours dans le cadre d'une étude sur des polygones dont le but est de montrer que :

parmi tous les polygones convexes ayant  $n$  côtés et un périmètre fixé  $p$ , le polygone régulier est de plus grande aire.

Le problème s'achève sur une démonstration parfaitement bien guidée d'un joli résultat de Zénodore.

La composition d'analyse du CAPES externe propose d'étudier différentes représentations de la constante d'Euler  $\gamma$  et de mettre au point une méthode de calcul d'une valeur approchée de cette constante à  $10^{-10}$  près. Les deux dernières parties proposent des expressions de  $\gamma$  obtenues au vingtième siècle : un expression comme la somme d'une série de Vacca (1910) puis une expression due à Gosper (1972).

La seconde épreuve du CAPES externe permet de s'entraîner sur un problème d'algèbre rondement mené sur les séries formelles à une indéterminée et des applications sur les suites récurrentes et des dénombrements : nombre de partitions d'un ensemble fini, nombre de dérangements, et nombre de chemins de Dyck.

---

<sup>0</sup>[cmonnnales2010] v1.00

<sup>0</sup>La photographie de la couverture est de Chantal Wack. Il s'agit d'une vue du port de Saint-Tropez qu'elle a prise et travaillée sur ordinateur.

La première composition de l'agrégation interne nous offre un excellent problème d'algèbre sur les polynômes minimaux des suites linéaires récurrentes, où l'on trouvera des développements intéressants en algèbre linéaire et sur les polynômes : en particulier un retour sur l'algorithme d'Euclide étendu afin de construire l'algorithme de Berlekamp-Massey pour la détermination du polynôme minimal d'une suite.

Enfin, le problème d'analyse propose une étude de l'équation fonctionnelle de Guichard :

$$f(z+1) - f(z) = g(z),$$

et donne l'occasion de travailler sur l'opérateur de différence  $\Delta$  défini par  $(\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z)$  pour tout  $z$ , ainsi que sur un espace de fonctions entières.

Nous souhaitons au lecteur un bon travail sur ces quelques problèmes de concours.

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi  
Saint-Raphaël, le 5 avril 2010.