

Annales du CAPES externe  
de Mathématiques 2009 à 2011  
+ 2 problème d'entraînement  
= 8 problèmes corrigés

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi



# Table des matières

Avant-propos	7
<b>I ECRITS 1</b>	<b>9</b>
<b>1 CAPES externe 2009, épreuve 1</b>	<b>11</b>
1.1 Énoncé . . . . .	11
1.2 Corrigé . . . . .	23
<b>2 CAPES externe 2010, épreuve 1</b>	<b>63</b>
2.1 Énoncé . . . . .	63
2.2 Corrigé . . . . .	72
<b>3 CAPES externe 2011, épreuve 1</b>	<b>93</b>
3.1 Énoncé . . . . .	93
3.2 Corrigé . . . . .	99
<b>II ECRITS 2</b>	<b>121</b>
<b>4 CAPES externe 2009, épreuve 2</b>	<b>123</b>
4.1 Énoncé . . . . .	123
4.2 Corrigé . . . . .	131
4.3 Compléments . . . . .	154
4.3.1 Nombre de tangentes à une conique issues d'un point . .	155
4.3.2 Les théorèmes de Poncelet . . . . .	160
4.3.3 Une symétrie gauche qui conserve l'ellipse . . . . .	163
4.3.4 Ellipse de Steiner . . . . .	165
<b>5 CAPES externe 2010, épreuve 2</b>	<b>169</b>
5.1 Énoncé . . . . .	169

5.2	Corrigé . . . . .	178
5.3	Compléments . . . . .	205
5.3.1	Identification d'une suite à une série formelle . . . . .	205
5.3.2	Principe du berger . . . . .	206
5.3.3	Trois lemmes sur les cardinaux . . . . .	207
5.3.4	Chemins de Dyck et parenthésage . . . . .	209
<b>6</b>	<b>CAPES externe 2011, épreuve 2</b>	<b>213</b>
6.1	Énoncé . . . . .	213
6.2	Corrigé . . . . .	219
6.3	Compléments . . . . .	247
6.3.1	Aire de l'intérieur d'une ellipse . . . . .	247
6.3.2	Volume d'un ellipsoïde . . . . .	247
6.3.3	Norme opérateur d'une matrice symétrique . . . . .	249
<b>III</b>	<b>PROBLEMES D'ENTRAINEMENT</b>	<b>253</b>
<b>7</b>	<b>Endomorphismes cycliques</b>	<b>255</b>
7.1	Énoncé . . . . .	255
7.2	Corrigé . . . . .	262
<b>8</b>	<b>Décomposition polaire dans <math>GL_n(\mathbb{R})</math></b>	<b>281</b>
8.1	Énoncé . . . . .	281
8.2	Corrigé . . . . .	284





## Avant-propos

Voici un recueil des compositions du CAPES externe des années 2009 à 2011, avec des corrigés détaillés, des compléments et deux problèmes supplémentaires d'entraînement.

Le "nouveau CAPES" se met en place pour la session 2011. L'écrit 2011 est pour la première fois placé en novembre 2010, ce qui laisse quelques mois pour préparer les oraux qui, eux, restent programmés entre le 15 juin et le 15 juillet 2011.

Le programme de l'écrit du CAPES 2011 change peu par rapport aux précédents. S'il existait jusque là un programme bien détaillé sur lequel on pouvait facilement se reporter, les choses sont devenues plus difficiles à la session 2011 où le programme des révisions de l'écrit devient officiellement constitué de la réunion des programmes des collèges et des lycées, de ceux des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) et des sections de techniciens supérieurs (STS). Grosso modo, il faudra bien connaître le programme de CPGE ou celui des trois années de licence.

Le jury 2011 a récemment insisté sur le fait que les deux compositions écrites du CAPES externe :

- pouvaient consister en un problème ou en plusieurs petits problèmes indépendants permettant de couvrir de grandes parties du programme,
- n'étaient en aucun cas spécialisées dans des domaines quelconques : il ne faut pas penser à la première épreuve comme une épreuve d'analyse et de probabilité, ni à la seconde épreuve comme étant destinée à traiter de questions de géométrie ou d'algèbre.

Preuve par les faits : la première composition 2011 comportait trois problèmes indépendants, un premier petit problème de géométrie plane suivi de deux problèmes d'analyse où l'on retrouvait les polynômes de Laguerre (donc un peu d'algèbre aussi...), tandis que la seconde composition était constituée d'un problème long comportant une première partie géométrique et deux autres parties très algébriques sur des matrices réelles symétriques définies positives et des ellipsoïdes. Pour réussir cette seconde composition, il fallait être suffisamment entraîné en algèbre linéaire et bilinéaire, et connaître le précieux

---

<sup>0</sup>[annalescapesexterne2009a11] v1.00

théorème suivant lequel toute matrice réelle symétrique est diagonalisable dans le groupe orthogonal.

Ces derniers choix d'épreuves démontrent, si cela est nécessaire, qu'il faut s'entraîner aux écrits comme on le faisait les années précédentes. Il est toujours d'actualité de connaître les bases, de pouvoir rechercher des réponses avec succès, et de savoir les rédiger avec rigueur et précision.

Si l'apprentissage des bases reste incontournable, il semble même qu'on en demande plus. Pour s'en persuader, il suffit de lire les trois questions de cours de la première partie du problème 2 de la composition 1, suivies des trois premières questions de la seconde partie, et de remarquer que 80% de la seconde épreuve peut être facilement débitées en un certain nombre de questions-réponses courtes sur les fondamentaux à maîtriser. Est-ce une tendance lourde que nous retrouverons dans les prochaines années ?

Entraînement à la recherche, travail sur les fondamentaux, passage à l'acte dans la rédaction, voilà tout ce que l'on peut faire avec des annales corrigées. Que celles-ci permettent un entraînement fructueux !

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi  
ce 20 décembre 2010.