Table des matières

Avant-propos

Ce cours est basé sur quelques parties communes des programmes d'analyse de l'agrégation interne et externe. Les parties de ces programmes non traitées dans ce volume le seront dans un deuxième volume destiné aux candidats à l'agrégation externe. Ce cours est l'occasion de réviser des notions de base pour l'écrit et les exercices proposés peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites et être utilisés pour des développements dans les leçons d'oral.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des corps ordonnés avec pour finalité une construction du corps des réels. Dans un premier temps on énonce un résultat qui nous donne une série d'équivalences pour qu'un corps de caractéristique différente de 2 soit totalement ordonné. On s'intéresse ensuite à l'étude des suites sur un tel corps avec les notions de suites convergentes, monotones, adjacentes, de Cauchy et on donne une série d'équivalences pour qu'un corps totalement ordonné soit archimédien. On donne également des équivalences relatives à l'existence de borne inférieure ou supérieure. Ces résultats permettent de mieux comprendre les propriétés du corps des réels une fois ce dernier construit. Cette construction est faite en fin de chapitre à partir des suites de Cauchy.

Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux propriétés topologiques des espaces métriques et normés. On y étudie les notions de boules, voisinages, ouverts, fermés, intérieur, adhérence, compacts, précompacts, relativement compacts et connexes. On s'intéresse également à l'étude des suites et des fonctions continues. Dans le cas des suites réelles, on s'intéresse aux notions de limites inférieure et supérieure. Les suites et les fonctions continues sur les compacts sont particulièrement étudiées avec entre autres le théorème de Baire, le théorème de Heine, la notion d'équicontinuité avec le théorème d'Ascoli et le théorème de point fixe de Picard. Dans le cas des espaces normés, on s'intéresse en particulier aux applications linéaires continues, à l'équivalence des normes en dimension finie, aux opérateurs compacts et aux sous-groupes additifs d'un espace vectoriel de dimension finie. L'étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ est appliquée à quelques résultats d'irrationalité et à l'étude du groupe des périodes d'une fonction.

L'étude des séries dans un espace normé est faite au chapitre 4. Ce chapitre se termine par des applications à l'étude des espaces ℓ^p, des moyennes de Cesàro, d'Euler, de Toeplitz et par celle des produits infinis de nombres complexes.

Les suites et séries de fonctions sont étudiées aux chapitres 5 et 7 avec les notions de convergences simple, uniforme et normale. On s'intéresse à la fonction exponentielle sur un espace de Banach. En se limitant au corps des nombres complexes, on donne une définition du nombre π et des fonctions argument principal et logarithme d'un nombre complexe. Dans le cas des suites de fonctions sur un compact, on dispose des théorèmes de Dini, de Stone-Weierstrass et de Weierstrass polynomiale et trigonométrique. Dans le cas des séries entières, on s'intéresse à l'étude au bord du disque de convergence et au cas particulier des fonctions analytiques réelles où l'on rencontre les théorèmes de Borel et de Bernstein.

Les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace normé sont étudiées au chapitre 6 : continuité, comparaison des fonctions, monotonie, fonctions réglées, dérivabilité, développements limités et asymptotiques, convexité. On complète l'étude des suites et séries de fonctions d'une variable avec les théorèmes de permutations de limites.

Les chapitre 8, 9 et 10 sont consacrés à l'étude de l'intégrale de Riemann sur un segment et sur un intervalle réel borné ou non (intégrales impropres). L'intégrale des fonctions réglées sur un segment est définie à partir de l'intégration des fonctions en escalier par densité et prolongement d'une application uniformément continue. L'intégrale de Riemann sur un segment est définie dans un deuxième temps. On y démontre en particulier le critère d'intégrabilité de Lebesgue qui nous dit qu'une fonction est Riemann-intégrable sur un segment si, et seulement si, elle est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. On fait également le lien avec le problème de l'existence de primitives. On s'intéresse aussi à l'approximation des fonctions intégrables sur un segment par des fonctions continues. Pour ce qui est des suites et séries de fonctions, on s'intéresse aux problèmes de permutations des signes d'intégration et de passage à la limite ou de sommation (théorèmes de convergence monotone et dominée). On étudie bien entendu les intégrales dépendant d'un paramètre en s'intéressant en particulier aux fonctions eulériennes gamma et bêta. À titre d'applications, on s'intéresse aux intégrales de Wallis (classiques et généralisées), aux polynômes de Bernoulli et à la formule d'Euler-Maclaurin. L'étude des séries numériques est complétée en faisant la comparaison avec une intégrale impropre.

Le chapitre 11 est consacré aux séries de Fourier des fonctions périodique et localement Riemann-intégrable. On s'intéresse à l'approximation des fonctions continues 2π-périodiques par des polynômes trigonométriques. Le chapitre se termine par des applications : développement en produit infini de $\sin(x)$, calcul de $\zeta(2p)$ pour $p \in N^*$, l'équation de la chaleur et l'équation des ondes.

L'étude des espaces normés est complétée par celle des espaces préhilbertiens au chapitre 12. Le théorème de projection orthogonale nous donne une autre présentation des séries de Fourier. On rencontre dans ce chapitre les théorèmes de Müntz qui permettent de caractériser les suites strictement croissantes de réels positifs pour lesquelles l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left\{x^{\lambda_n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ pour les normes quadratique ou uniforme.

Au chapitre 13 on étudie les polynômes orthogonaux. La présentation de ces polynômes associés à une forme linéaire définie positive est inspirée du livre [5] de Theodore Chihara. Elle permet de justifier la présentation classique des polynômes de Legendre, Tchebychev, Laguerre et Hermite par des formules de Rodrigues. Les polynômes de Legendre sont étudiés de façon plus détaillée. Ce chapitre se termine par une introduction aux développements en série de polynômes orthogonaux avec des résultats analogues à ceux obtenus pour les séries de Fourier.

Enfin les deux derniers chapitres sont consacrés aux variables aléatoires discrètes et réelles, les notions de base sur les espaces probabilisés étant supposées acquises. La définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle en lien avec l'intégrale de Riemann des fonctions monotones est inspirée du livre [21] de Charles Suquet où cette étude est particulièrement détaillée. Ces chapitres peuvent être vus comme des applications des résultats sur les séries numériques, les séries entières et l'intégrale Riemann définie ou généralisée.

Pour conclure, je tiens à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguet pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant ce travail.