

# Table des matières

	Page
<b>Avant-propos</b>	<b>v</b>
<b>1 Le corps des nombres réels</b>	<b>1</b>
1.1 Corps totalement ordonnés . . . . .	1
1.2 Minorants et majorants dans un corps totalement ordonné . . . . .	6
1.3 Suites à valeurs dans un corps totalement ordonné . . . . .	8
1.4 Corps totalement ordonnés archimédiens . . . . .	14
1.5 Une construction du corps des réels . . . . .	20
1.6 Le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ . . . . .	21
1.7 Unicité du corps des réels . . . . .	26
1.8 Exercices . . . . .	27
<b>2 Espaces métriques</b>	<b>31</b>
2.1 Distances, espaces métriques et topologie . . . . .	31
2.2 Suites à valeurs dans un espace métrique . . . . .	39
2.3 Compacité . . . . .	43
2.4 Le théorème de Baire . . . . .	49
2.5 Limites réelles supérieure et inférieure . . . . .	52
2.6 Limites et continuité des fonctions . . . . .	55
2.7 Continuité et compacité . . . . .	61
2.8 Un théorème de point fixe . . . . .	67
2.9 Continuité et connexité . . . . .	70
2.10 Espaces topologiques . . . . .	71
2.11 Exercices . . . . .	76
<b>3 Espaces vectoriels normés</b>	<b>83</b>
3.1 Semi-normes et normes . . . . .	83
3.2 Suites dans un espace vectoriel normé . . . . .	87
3.3 Continuité dans les espaces normés . . . . .	90
3.4 Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	101
3.5 Opérateurs compacts . . . . .	105
3.6 Sous-groupes additifs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie . . . . .	108
3.7 Exercices . . . . .	120

<b>4</b>	<b>Séries dans un espace vectoriel normé</b>	<b>135</b>
4.1	Séries à termes réels positifs . . . . .	137
4.2	Convergence normale et commutative . . . . .	149
4.3	La transformation d'Abel . . . . .	155
4.4	Produit de Cauchy de deux séries . . . . .	159
4.5	Séries doubles dans un espace de Banach . . . . .	165
4.6	Les espaces $\ell^p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ . . . . .	170
4.7	Moyennes de Toeplitz, Cesàro et Euler . . . . .	173
4.8	Produits infinis sur $\mathbb{C}$ . . . . .	192
4.9	Développement en produit infini de $\frac{\sin(z)}{z}$ . . . . .	201
4.10	Exercices . . . . .	204
<b>5</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>237</b>
5.1	Suites de fonctions . . . . .	237
5.2	Le théorème de Stone-Weierstrass . . . . .	247
5.3	Séries de fonctions . . . . .	250
5.4	La fonction exponentielle sur une algèbre de Banach . . . . .	255
5.5	Le nombre $\pi$ . . . . .	267
5.6	Les fonctions tan et arctan . . . . .	271
5.7	Les fonctions argument principal et logarithme . . . . .	272
5.8	Exercices . . . . .	274
<b>6</b>	<b>Fonctions d'une variable réelle</b>	<b>281</b>
6.1	Limites et continuité . . . . .	281
6.2	Fonctions continues sur un segment . . . . .	285
6.3	Prépondérance, domination et équivalence . . . . .	288
6.4	Le théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	294
6.5	Fonctions monotones . . . . .	297
6.6	Fonctions réglées . . . . .	305
6.7	Dérivabilité . . . . .	308
6.8	Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et de Taylor-Lagrange . . . . .	316
6.9	Inégalités de Kolmogorov . . . . .	327
6.10	Développements limités et asymptotiques . . . . .	330
6.11	Suites et séries de fonctions dérivables . . . . .	338
6.12	Primitives . . . . .	340
6.13	Dérivée logarithmique . . . . .	341
6.14	Fonctions convexes . . . . .	343
6.15	Exercices . . . . .	353
<b>7</b>	<b>Séries entières</b>	<b>371</b>
7.1	Rayon de convergence d'une série entière . . . . .	371
7.2	Opérations sur les séries entières . . . . .	381
7.3	Étude au bord du disque de convergence . . . . .	384
7.4	Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques . . . . .	387
7.5	Fonctions analytiques de la variable réelle . . . . .	393
7.6	Exercices . . . . .	403

<b>8</b>	<b>Intégrale de Riemann</b>	<b>413</b>
8.1	Intégrale de Riemann des fonctions réglées . . . . .	413
8.2	Fonctions Riemann-intégrables sur un segment . . . . .	423
8.3	Intégrale de Riemann et primitives . . . . .	439
8.4	Formules de la moyenne . . . . .	442
8.5	Sommes de Riemann . . . . .	445
8.6	Approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues	449
8.7	Suites et séries de fonctions Riemann-intégrables . . . . .	453
8.8	Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	461
8.9	Intégrales de Wallis . . . . .	466
8.10	Formule de Stirling . . . . .	470
8.11	Polynômes de Bernoulli, formules de Stirling et d'Euler-Maclaurin	473
8.12	Exercices . . . . .	480
<b>9</b>	<b>Intégrales impropres</b>	<b>499</b>
9.1	Convergence d'une intégrale impropre . . . . .	499
9.2	Opérations sur les intégrales généralisées . . . . .	504
9.3	Intégrales impropres des fonctions à valeurs positives . . . . .	507
9.4	Un théorème d'Abel . . . . .	512
9.5	Un théorème de convergence dominée . . . . .	513
9.6	Comparaison d'une série et d'une intégrale . . . . .	519
9.7	Exercices . . . . .	530
<b>10</b>	<b>Intégrales impropres dépendant d'un paramètre</b>	<b>553</b>
10.1	Continuité et dérivabilité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre . . . . .	553
10.2	Fonctions eulériennes gamma et bêta . . . . .	555
10.3	Exercices . . . . .	568
<b>11</b>	<b>Série de Fourier d'une fonction périodique</b>	<b>575</b>
11.1	Fonctions $2\pi$ -périodiques localement Riemann-intégrables . . . . .	576
11.2	Séries trigonométriques . . . . .	578
11.3	Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques . . . . .	585
11.4	Le théorème de Parseval . . . . .	588
11.5	Le théorème de Dirichlet . . . . .	592
11.6	Exemples d'utilisation des séries de Fourier . . . . .	597
11.7	Exercices . . . . .	605
<b>12</b>	<b>Espaces préhilbertiens réels</b>	<b>615</b>
12.1	Produit scalaire . . . . .	615
12.2	Orthogonalité . . . . .	618
12.3	Projection orthogonale dans un espace préhilbertien . . . . .	622
12.4	Inégalité de Bessel et égalité de Parseval . . . . .	624
12.5	Déterminants de Gram . . . . .	628
12.6	Les théorèmes de Müntz . . . . .	632
12.7	Exercices . . . . .	638

<b>13 Polynômes orthogonaux</b>	<b>647</b>
13.1 Polynômes orthogonaux associés à une forme linéaire . . . . .	647
13.2 Polynômes orthogonaux associés à une fonction poids . . . . .	660
13.3 Polynômes orthogonaux classiques, formules de Rodrigues . . . . .	661
13.4 Les polynômes de Legendre . . . . .	672
13.5 Développement en série de polynômes orthogonaux . . . . .	679
13.6 Exercices . . . . .	686
<b>14 Variables aléatoires réelles discrètes</b>	<b>707</b>
14.1 Rappels sur les espaces probabilisés . . . . .	707
14.2 Définition et propriétés des variables aléatoires discrètes . . . . .	713
14.3 Variables aléatoires discrètes indépendantes . . . . .	722
14.4 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire discrète .	726
14.5 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières	740
14.6 Exercices . . . . .	746
<b>15 Variables aléatoires réelles</b>	<b>751</b>
15.1 Variables aléatoires réelles, fonction de répartition . . . . .	751
15.2 Variables aléatoires réelles indépendantes . . . . .	755
15.3 Espérance d'une variable aléatoire réelle . . . . .	756
15.4 Variance, covariance et moments d'ordre $r$ . . . . .	763
15.5 Convergence en probabilité et loi faible des grands nombres . . . . .	768
15.6 Variables aléatoires à densité . . . . .	772
15.7 Variables aléatoires à densité classiques . . . . .	777
15.8 Espérance des variables aléatoires à densité . . . . .	784
15.9 Théorème de transfert et moments . . . . .	787
15.10 Convergence en loi et théorème de la limite centrale . . . . .	788
15.11 Exercices . . . . .	792
<b>Bibliographie</b>	<b>801</b>
<b>Index</b>	<b>803</b>

## Avant-propos

Ce cours est basé sur quelques parties communes des programmes d'analyse de l'agrégation interne et externe. Les parties de ces programmes non traitées dans ce volume le seront dans un deuxième volume destiné aux candidats à l'agrégation externe. Ce cours est l'occasion de réviser des notions de base pour l'écrit et les exercices proposés peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites et être utilisés pour des développements dans les leçons d'oral.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des corps ordonnés avec pour finalité une construction du corps des réels. Dans un premier temps on énonce un résultat qui nous donne une série d'équivalences pour qu'un corps de caractéristique différente de 2 soit totalement ordonné. On s'intéresse ensuite à l'étude des suites sur un tel corps avec les notions de suites convergentes, monotones, adjacentes, de Cauchy et on donne une série d'équivalences pour qu'un corps totalement ordonné soit archimédien. On donne également des équivalences relatives à l'existence de borne inférieure ou supérieure. Ces résultats permettent de mieux comprendre les propriétés du corps des réels une fois ce dernier construit. Cette construction est faite en fin de chapitre à partir des suites de Cauchy.

Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux propriétés topologiques des espaces métriques et normés. On y étudie les notions de boules, voisinages, ouverts, fermés, intérieur, adhérence, compacts, précompacts, relativement compacts et connexes. On s'intéresse également à l'étude des suites et des fonctions continues. Dans le cas des suites réelles, on s'intéresse aux notions de limites inférieure et supérieure. Les suites et les fonctions continues sur les compacts sont particulièrement étudiées avec entre autres le théorème de Baire, le théorème de Heine, la notion d'équicontinuité avec le théorème d'Ascoli et le théorème de point fixe de Picard. Dans le cas des espaces normés, on s'intéresse en particulier aux applications linéaires continues, à l'équivalence des normes en dimension finie, aux opérateurs compacts et aux sous-groupes additifs d'un espace vectoriel de dimension finie. L'étude des sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$  est appliquée à quelques résultats d'irrationalité et à l'étude du groupe des périodes d'une fonction.

L'étude des séries dans un espace normé est faite au chapitre 4. Ce chapitre se termine par des applications à l'étude des espaces  $\ell^p$ , des moyennes de Cesàro, d'Euler, de Toeplitz et par celle des produits infinis de nombres complexes.

Les suites et séries de fonctions sont étudiées aux chapitres 5 et 7 avec les notions de convergences simple, uniforme et normale. On s'intéresse à la fonction exponentielle sur un espace de Banach. En se limitant au corps des nombres complexes, on donne une définition du nombre  $\pi$  et des fonctions argument principal et logarithme d'un nombre complexe. Dans le cas des suites de fonctions sur un compact, on dispose des théorèmes de Dini, de Stone-Weierstrass et de Weierstrass polynomiale et trigonométrique. Dans le cas des séries entières, on s'intéresse à l'étude au bord du disque de convergence et au cas particulier des fonctions analytiques réelles où l'on rencontre les théorèmes de Borel et de Bernstein.

Les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace normé sont étudiées au chapitre 6 : continuité, comparaison des fonctions, monotonie, fonctions réglées, dérivabilité, développements limités et asymptotiques, convexité. On com-

plète l'étude des suites et séries de fonctions d'une variable avec les théorèmes de permutations de limites.

Les chapitres 8, 9 et 10 sont consacrés à l'étude de l'intégrale de Riemann sur un segment et sur un intervalle réel borné ou non (intégrales impropres). L'intégrale des fonctions réglées sur un segment est définie à partir de l'intégration des fonctions en escalier par densité et prolongement d'une application uniformément continue. L'intégrale de Riemann sur un segment est définie dans un deuxième temps. On y démontre en particulier le critère d'intégrabilité de Lebesgue qui nous dit qu'une fonction est Riemann-intégrable sur un segment si, et seulement si, elle est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. On fait également le lien avec le problème de l'existence de primitives. On s'intéresse aussi à l'approximation des fonctions intégrables sur un segment par des fonctions continues. Pour ce qui est des suites et séries de fonctions, on s'intéresse aux problèmes de permutations des signes d'intégration et de passage à la limite ou de sommation (théorèmes de convergence monotone et dominée). On étudie bien entendu les intégrales dépendant d'un paramètre en s'intéressant en particulier aux fonctions eulériennes gamma et bêta. À titre d'applications, on s'intéresse aux intégrales de Wallis (classiques et généralisées), aux polynômes de Bernoulli et à la formule d'Euler-Maclaurin. L'étude des séries numériques est complétée en faisant la comparaison avec une intégrale impropre.

Le chapitre 11 est consacré aux séries de Fourier des fonctions périodique et localement Riemann-intégrable. On s'intéresse à l'approximation des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques par des polynômes trigonométriques. Le chapitre se termine par des applications : développement en produit infini de  $\sin(x)$ , calcul de  $\zeta(2p)$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , l'équation de la chaleur et l'équation des ondes.

L'étude des espaces normés est complétée par celle des espaces préhilbertiens au chapitre 12. Le théorème de projection orthogonale nous donne une autre présentation des séries de Fourier. On rencontre dans ce chapitre les théorèmes de Müntz qui permettent de caractériser les suites strictement croissantes de réels positifs pour lesquelles l'espace vectoriel  $\text{Vect}\{x^{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  pour les normes quadratique ou uniforme.

Au chapitre 13 on étudie les polynômes orthogonaux. La présentation de ces polynômes associés à une forme linéaire définie positive est inspirée du livre [5] de Theodore Chihara. Elle permet de justifier la présentation classique des polynômes de Legendre, Tchebychev, Laguerre et Hermite par des formules de Rodrigues. Les polynômes de Legendre sont étudiés de façon plus détaillée. Ce chapitre se termine par une introduction aux développements en série de polynômes orthogonaux avec des résultats analogues à ceux obtenus pour les séries de Fourier.

Enfin les deux derniers chapitres sont consacrés aux variables aléatoires discrètes et réelles, les notions de base sur les espaces probabilisés étant supposées acquises. La définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle en lien avec l'intégrale de Riemann des fonctions monotones est inspirée du livre [21] de Charles Suquet où cette étude est particulièrement détaillée. Ces chapitres peuvent être vus comme des applications des résultats sur les séries numériques, les séries entières et l'intégrale Riemann définie ou généralisée.

Pour conclure, je tiens à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguët pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant ce travail.