

Table des matières

Avant-propos	vii
1 Le corps \mathbb{R} des nombres réels	1
1.1 Ensembles ordonnés	1
1.2 Construction de \mathbb{R} à l’aide des suites de Cauchy de nombres rationnels . .	4
1.3 Le corps totalement ordonné \mathbb{R}	5
1.4 Exercices	8
2 Suites numériques	13
2.1 Généralités	13
2.2 Suites convergentes ou divergentes	14
2.3 Valeurs d’adhérence	19
2.4 Comparaison des suites numériques	20
2.5 Suites réelles monotones	21
2.6 Suites adjacentes	22
2.7 Le critère de Cauchy	26
2.8 Le théorème de Cesàro	27
2.9 Exercices	28
3 Limites, continuité, dérivabilité des fonctions d’une variable réelle	41
3.1 Limite finie en un point	41
3.2 Limites à l’infini	46
3.3 Continuité en un point, continuité sur I	50
3.4 Définition séquentielle de la continuité	52
3.5 Prolongement par continuité	53
3.6 Opérations sur les fonctions continues	53
3.7 Propriétés globales des fonctions continues	54
3.8 Dérivabilité en un point, dérivabilité sur I	61
3.9 Opérations sur les fonctions dérivables	63
3.10 Extrema et dérivation	65
3.11 Le théorème de Darboux	65
3.12 Exercices	66
4 Comparaison des fonctions et développements limités	71
4.1 Prépondérance, domination et équivalents	71
4.2 Développements limités	76
4.3 Opérations sur les développements limités	78
4.4 Position d’une courbe par rapport aux tangentes ou aux asymptotes . . .	82
4.5 Développements asymptotiques	82

4.6	Exercices	83
5	Intégrales et primitives	87
5.1	Subdivisions. Intégrale des fonctions en escalier	87
5.2	Fonctions Riemann-intégrables	91
5.3	Exemples de fonctions intégrables	98
5.4	Intégrale de Riemann et primitives	103
5.5	Les fonctions logarithme népérien et exponentielle	105
5.6	Calculs d'intégrales et de primitives	107
5.7	Calculs de primitives particulières	109
5.8	Sommes de Riemann	114
5.9	Exercices	117
6	Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et de Taylor	125
6.1	Le théorème de Rolle	125
6.2	Quelques applications du théorème de Rolle	127
6.3	Théorème et inégalité des accroissements finis	130
6.4	Quelques applications du théorème des accroissements finis	131
6.5	La formule de Taylor-Lagrange	134
6.6	Le théorème de Taylor-Young	135
6.7	Formule de Taylor avec reste intégral	136
6.8	Quelques applications de la formule de Taylor-Lagrange	136
6.9	Exercices	138
7	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2	143
7.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre	143
7.2	Équations différentielles d'ordre 1 classiques	147
7.3	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	149
7.4	Exercices	154
8	Séries numériques	161
8.1	Convergence d'une série numérique	161
8.2	Séries alternées	163
8.3	Convergence absolue, semi-convergence	164
8.4	Séries à termes réels positifs	165
8.5	Produit de deux séries	176
8.6	La transformation d'Abel	178
8.7	Exercices	182
9	Intégrales impropres	195
9.1	Définitions et exemples d'intégrales généralisées	195
9.2	Les intégrales généralisées de Riemann	198
9.3	Opérations sur les intégrales généralisées	199
9.4	Condition nécessaire de convergence de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$	201
9.5	Cas des fonctions à valeurs positives. Intégrales absolument convergentes	202
9.6	Un théorème d'Abel	207
9.7	Exercices	208

10	Espaces vectoriels normés	219
10.1	Semi-normes et normes	219
10.2	Topologie associée à une norme	220
10.3	Applications linéaires continues	226
10.4	Normes équivalentes	227
10.5	Espaces vectoriels normés de dimension finie	231
10.6	Exercices	233
11	Fonctions de plusieurs variables réelles	239
11.1	Fonctions différentiables	239
11.2	Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles	243
11.3	Différentielles d'ordre supérieur	247
11.4	Théorème et inégalité des accroissements finis	250
11.5	Formule de Taylor-Lagrange	251
11.6	Recherche d'extrema	253
11.7	Exercices	256
12	Suites de fonctions	263
12.1	Convergence simple et convergence uniforme	263
12.2	Propriétés des fonctions stables par convergence uniforme	267
12.3	Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment	272
12.4	Le théorème de Weierstrass	277
12.5	Exercices	281
13	Séries de fonctions	289
13.1	Convergence simple, uniforme et normale	289
13.2	Propriétés de la somme d'une série de fonctions convergente	292
13.3	Exercices	294
14	Séries entières	301
14.1	Rayon de convergence d'une série entière	301
14.2	Opérations sur les séries entières	305
14.3	Fonctions développables en série entière	307
14.4	Séries entières et équations différentielles	314
14.5	Exercices	315
15	Série de Fourier d'une fonction périodique	323
15.1	Séries entières et séries de Fourier	323
15.2	L'espace préhilbertien \mathcal{D} de Dirichlet	325
15.3	Polynômes trigonométriques et séries de Fourier	327
15.4	L'inégalité de Bessel	330
15.5	Convergence ponctuelle des séries de Fourier	332
15.6	Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques	334
15.7	Le théorème de Dirichlet	339
15.8	Exercices	342

16 Problèmes de Capes	353
16.1 Capes1999, épreuve 1	353
16.2 Capes 2000, épreuve 1	367
16.3 Capes 2004, épreuve 1	383
16.4 Capes 2007, épreuve 1	402
16.5 CAPES 2008, épreuve 1	417
16.6 Capes 2009, épreuve 1	435
16.7 Capes 2011, épreuve 1	465
 Bibliographie	 485
 Index	 487

Avant-propos

Ce cours d'analyse s'adresse aux étudiants préparant le Capes de mathématiques. Les élèves en classes préparatoires aux grandes écoles pourront aussi tirer profit de cet ouvrage. C'est le premier volume d'une série qui en comporte 3, le deuxième volume étant consacré à l'algèbre et la géométrie et le troisième à la théorie des probabilités. Il ne s'agit pas de manuels de « méthodes » où l'on sacrifie la notion de rigueur qui est l'essence même des mathématiques. Les notions étudiées le sont de façon rigoureuse en démontrant tous les résultats énoncés. Chaque chapitre se termine par une série d'exercices tous corrigés en détails. C'est ce type d'exercices qu'il est utile de savoir faire avant de travailler sur des épreuves écrites du concours.

Ce premier volume est consacré aux notions d'analyse réelle habituellement enseignées en première et deux années de licence (L1 et L2), à savoir l'étude des suites et séries numériques, des fonctions d'une variable réelle, de l'intégration, des espaces vectoriels normés, des équations différentielles d'ordre 1 ou 2 et des suites et séries de fonctions. Le dernier chapitre est consacré à quelques épreuves d'analyse du Capes, le niveau d'exigence pour cette épreuve ne dépassant pas le niveau de connaissance acquis en première et deuxième année d'université ou de classe préparatoire aux grandes écoles. Les problèmes de Capes étant souvent trop longs pour être traités en cinq heures, à titre d'entraînement, on peut se contenter de travailler sur les deux premières parties d'un problème, la suite du problème pouvant être étudiée par la suite à titre d'approfondissement. Nous espérons que ce travail sera utile aux candidats au Capes.

Pour conclure, nous tenons à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguet pour la confiance qu'ils nous accordent en publiant ce travail.