Table des matières

Avant-propos

Ce cours fait suite à celui destiné aux candidats à l'agrégation interne et externe de mathématiques, à savoir [36], qui est basé sur quelques parties communes des programmes d'analyse de ces concours. Avec ce deuxième volume, on développe quelques compléments à [36] et des parties du programme de l'agrégation externe non exigibles pour l'agrégation interne, en particulier les notions relatives à la théorie de la mesure et à l'intégrale de Lebesgue, aux fonctions holomorphes et aux espaces de Hilbert.

Le niveau de connaissance suffisant pour la lecture de cet ouvrage est celui d'une licence de mathématiques. Les notions de base sur les espaces normés, les espaces métriques, les suite et séries à valeurs dans un espace normés, les suites et séries de fonctions, les séries entières et de Fourier sont supposées acquises. La théorie de l'intégration au sens de Riemann sur un segment ou sur un intervalle avec la notion d'intégrale impropre est également supposée connue. On pourra se reporter à [36] pour ces notions.

Ce cours est l'occasion de revoir les points importants précédemment cités du programme d'analyse de l'agrégation externe et les quelques 200 exercices proposés, tous corrigé en détail, peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites et certains d'entre eux peuvent être utilisés pour des développements dans les leçons d'oral.

Avec les 4 premiers chapitres de ce livre, on expose les notions de base sur la théorie de la mesure et de l'intégration au sens de Lebesgue.

Le chapitre 5 est consacré à une introduction aux espaces de Hilbert réels ou complexes. Avec le chapitre qui suit, on s'intéresse à titre d'application aux fonctions presque périodiques de Bohr.

Les trois chapitres qui suivent sont consacrés au calcul différentiel sur un espace de Banach.

Vient ensuite l'étude des fonctions holomorphes et méromorphes avec le théorème des résidus.

Les derniers chapitres sont consacrés à quelques applications des notions précédentes. On s'y intéresse à la transformation de Laplace, à l'étude de quelques fonctions usuelles comme les fonctions exponentielle et logarithme sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou sur une algèbre de Banach, aux fonctions eulériennes gamma et bêta ainsi qu'à la fonction zêta de Riemann.

L'étude de la théorie des probabilités qui est une suite naturelle des chapitres consacrés à la théorie de la mesure est faite par Walter Appel dans [1].

Comme dans le livre de Walter Appel consacré aux probabilités pour l'agrégation externe publié dans la même collection par Deboeck Supérieur, on pourra exploiter dans cet ouvrage une vingtaine de « Thèmes ». Il ne s'agit pas de développements prêts à l'emploi, mais plutôt de suggestions qu'il est possible d'intégrer à certaines leçons d'oral. La liste de ces thèmes figure à la page suivante.

Pour conclure, je tiens à remercier les éditions Deboeck et en particulier Alain Luguet pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant ce travail. Un grand merci à Walter Appel qui a corrigé de nombreuses coquilles et réalisé quelques figures d'illustrations.

Liste de quelques thèmes

1. L'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour f mesurable sur $\mathbb{R}$ (exercice 2.10, page 106).
2. Densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ dans l'espace normé $\left(\mathbb{L}^p, \|\cdot\|_p\right)$ (théorème 4.9, page 164).
3. Approximations de l'unité dans $\mathcal{L}^p$ pour $p \in [1, +\infty[$ et densité de l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{L}^p$ (théorème 4.19, page 176 et corollaire 4.3, page 179).
4. Construction de fonctions plateau : si K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui contient K, il existe alors $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ à support compact telle $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in K$ et $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ (théorème 4.21, page 182).
5. Formule d'inversion de Fourier : si $f \in \mathcal{L}^1$ est telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, on a alors $f(t) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\widehat{f}}(-t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}^n$ (théorème 4.24, page 191).
6. Formules sommatoires de Poisson théorème 4.27, page 197 et théorème 4.28, page 198 desquelles on déduit une formule d'inversion de Fourier dans un cas particulier (théorème 4.29, page 199 et exercice 4.17, page 220) ainsi qu'une équation fonctionnelle pour la fonction θ de Jacobi (corollaire 16.1, page 638).
7. Inégalité de Hardy : pour tout réel $p \in]1, \infty[$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$, on a :
$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x^p} \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x \leqslant q^p \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$$
(exercice 4.7, page 205).
8. Existence de base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(]a,b[\,,\pi)$ où $\pi :]a,b[\to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction poids pour laquelle il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha|t|}\pi(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$ (théorème 5.18, page 248).
9. Applications du théorème de représentation de Riesz (théorème 5.19, page 250) : le théorème de Hahn-Banach sur un espace de Hilbert (théorème 5.20, page 252), de Stampachia (théorème 5.21, page 254) et de Lax-Milgram (théorème 5.6, page 255).
10. Opérateurs de Hilbert-Schmidt (paragraphe 5.7, page 258).
11. Caractérisation des normes sur un espace vectoriel normé complexe déduite d'un produit scalaire (exercice 5.5, page 266).
12. Fonctions presque périodiques (chapitre 6, page 281). Ce thème permet de revoir les notions de compacité, précompacité et relative compacité ; de continuité et uniforme continuité ; de fonctions périodiques et polynômes trigonométriques ; de projection orthogonale dans le cadre hermitien.
13. Fonctions d'une variable réelle continues et nulle part dérivables (paragraphe 7.4, page 330).
14. Fonctions quasi-différentiables sur un espace de Banach (exercice 7.5, page 344).

15. Différentielle de l'exponentielle sur une algèbre de Banach (exercice 7.12, page 356).
16. Caractérisation des isométries affines sur un espace de Hilbert (exercices 7.11, page 354 et 8.5, page 387).
17. Lemme de Morse (exercices 8.4, page 385 et 9.4, page 407).
18. Le théorème d'Hadamard-Levy dans un cas particulier (théorème 9.7, page 399).
19. Transformée de Fourier des fonctions rationnelles en utilisant la formule de Cauchy (paragraphe 11.2, page 478).
20. Bi-holomorphismes du disque unité complexe (théorème 11.14, page 487) et bi-holomorphismes du demi-plan de Poincaré (corollaire 11.5, page 488).
21. Formule de Lie-Trotter-Kato pour l'exponentielle sur une algèbre de Banach (théorème 16.4, page 599).
22. Théorème de Weilandt donnant une caractérisation de la fonction Gamma complexe par son équation fonctionnelle et une condition de majoration (théorème 16.15, page 623).