

Table des matières

	Page
Avant-propos	vii
1 Théorie de la mesure	1
1.1 Préliminaires sur les ensembles	1
1.2 Tribus	5
1.3 Tribu de Borel sur un espace métrique	10
1.4 Mesures	12
1.5 Mesures sur un espace métrique	17
1.6 Mesures extérieures	21
1.7 Un théorème de prolongement	27
1.8 La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R}^n	31
1.9 Propriétés vraies presque partout	43
1.10 Exercices	44
2 Fonctions mesurables et intégrables	57
2.1 Fonctions mesurables entre espaces mesurables	57
2.2 Fonctions mesurables à valeurs réelles	59
2.3 Intégrabilité par rapport à une mesure des fonctions positives	64
2.4 Théorème de Beppo-Levi et applications	68
2.5 Fonctions numériques intégrables par rapport à une mesure	75
2.6 Théorème de convergence dominée	83
2.7 Intégrales de Riemann et de Lebesgue sur \mathbb{R}	92
2.8 Exercices	98
3 Intégration sur un espace produit	119
3.1 Théorèmes de Fubini pour les fonctions continues de deux variables réelles	119
3.2 Une version simple du théorème de Fubini	127
3.3 Classes monotones	128
3.4 Tribus et mesures produits	131
3.5 Théorèmes de Tonelli et de Fubini	139
3.6 Formules d'intégration par parties	141
3.7 Exercices	143

4	Espaces \mathbb{L}^p	151
4.1	Espaces \mathcal{L}^p pour $1 \leq p \leq +\infty$	151
4.2	Inégalités de Hölder et de Minkowski	155
4.3	Espaces \mathbb{L}^p	159
4.4	Théorèmes de densité dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$ pour $p \in [1, +\infty[$	162
4.5	Produit de convolution	167
4.6	Suites régularisantes	175
4.7	Construction de fonctions plateau	180
4.8	Transformation de Fourier	183
4.9	Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide	192
4.10	Formule sommatoire de Poisson	193
4.11	Exercices	200
5	Espaces de Hilbert	223
5.1	Produit scalaire	223
5.2	Orthogonalité, bases hilbertiennes	227
5.3	Le théorème de projection orthogonale	239
5.4	Polynômes orthogonaux	244
5.5	Dual topologique d'un espace de Hilbert	250
5.6	Convergence faible	256
5.7	Opérateurs de Hilbert-Schmidt	258
5.8	Exercices	264
6	Fonctions presque périodiques	281
6.1	Polynômes trigonométriques généralisés	282
6.2	Fonctions presque périodiques	286
6.3	Exercices	301
7	Fonctions différentiables	309
7.1	Différentielle	310
7.2	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	317
7.3	Dérivée directionnelles, dérivées partielles	324
7.4	Fonctions d'une variable réelle continues et nulle part dérivables	330
7.5	Exercices	339
8	Différentielles d'ordre supérieur	363
8.1	Différentielle d'ordre deux	363
8.2	Formules de Taylor à l'ordre deux	369
8.3	Fonctions convexes	371
8.4	Différentielles d'ordre $p \geq 2$	373
8.5	Différentiabilité et problèmes d'extrema	378
8.6	Exercices	383
9	Inversion locale, fonctions implicites	389
9.1	Difféomorphismes	389
9.2	Théorème d'inversion locale	393
9.3	Théorème des fonctions implicites	400
9.4	Extrema liés	404

9.5 Exercices	406
10 Fonctions holomorphes	419
10.1 Dérivation complexe	419
10.2 Les conditions de Cauchy-Riemann	423
10.3 Déterminations du logarithme complexe	426
10.4 Intégrales curvilignes	428
10.5 Indice par rapport à un lacet	435
10.6 Primitives des fonctions holomorphes	439
10.7 Théorème des résidus pour les fonctions rationnelles	450
10.8 Exercices	452
11 Fonctions analytiques	467
11.1 Fonctions développables en série entière	467
11.2 Transformée de Fourier des fonctions rationnelles	478
11.3 Prolongement analytique et zéros isolés	481
11.4 Le principe du maximum	483
11.5 Exercices	489
12 Suites de fonctions holomorphes	501
12.1 Suites et séries de fonctions holomorphes	501
12.2 Produits infinis de fonctions holomorphes	504
12.3 Fonctions holomorphes définies par une intégrale	509
12.4 Exercices	513
13 Homotopie	521
13.1 Chemins et lacets homotopes	521
13.2 Le théorème de Cauchy	524
13.3 Développement en série de Laurent sur une couronne	531
13.4 Exercices	534
14 Fonctions méromorphes	541
14.1 Singularités isolées d'une fonction holomorphe	541
14.2 Fonctions méromorphes	547
14.3 Théorème des résidus	548
14.4 Exercices	554
15 Transformation de Laplace	561
15.1 Abscisse de convergence	561
15.2 Propriétés de la transformée de Laplace	565
15.3 Transformée de Laplace sur l'axe réel	569
15.4 Transformée de Laplace sur le bord du domaine de convergence	573
15.5 Transformation de Laplace et produit de convolution	576
15.6 Exercices	578

16 Fonctions usuelles et spéciales	595
16.1 Fonctions exponentielles	595
16.2 Fonctions hyperboliques et trigonométriques	602
16.3 L'exponentielle complexe et le nombre π	602
16.4 Le logarithme complexe	608
16.5 L'exponentielle matricielle	612
16.6 Fonctions eulériennes gamma et bêta	614
16.7 Fonction zêta de Riemann	628
16.8 Fonction θ de Jacobi	637
16.9 Exercices	641
Références	655
Index	657

Avant-propos

Ce cours fait suite à celui destiné aux candidats à l'agrégation interne et externe de mathématiques, à savoir [36], qui est basé sur quelques parties communes des programmes d'analyse de ces concours. Avec ce deuxième volume, on développe quelques compléments à [36] et des parties du programme de l'agrégation externe non exigibles pour l'agrégation interne, en particulier les notions relatives à la théorie de la mesure et à l'intégrale de Lebesgue, aux fonctions holomorphes et aux espaces de Hilbert.

Le niveau de connaissance suffisant pour la lecture de cet ouvrage est celui d'une licence de mathématiques. Les notions de base sur les espaces normés, les espaces métriques, les suites et séries à valeurs dans un espace normés, les suites et séries de fonctions, les séries entières et de Fourier sont supposées acquises. La théorie de l'intégration au sens de Riemann sur un segment ou sur un intervalle avec la notion d'intégrale impropre est également supposée connue. On pourra se reporter à [36] pour ces notions.

Ce cours est l'occasion de revoir les points importants précédemment cités du programme d'analyse de l'agrégation externe et les quelques 200 exercices proposés, tous corrigés en détail, peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites et certains d'entre eux peuvent être utilisés pour des développements dans les leçons d'oral.

Avec les 4 premiers chapitres de ce livre, on expose les notions de base sur la théorie de la mesure et de l'intégration au sens de Lebesgue.

Le chapitre 5 est consacré à une introduction aux espaces de Hilbert réels ou complexes. Avec le chapitre qui suit, on s'intéresse à titre d'application aux fonctions presque périodiques de Bohr.

Les trois chapitres qui suivent sont consacrés au calcul différentiel sur un espace de Banach.

Vient ensuite l'étude des fonctions holomorphes et méromorphes avec le théorème des résidus.

Les derniers chapitres sont consacrés à quelques applications des notions précédentes. On s'y intéresse à la transformation de Laplace, à l'étude de quelques fonctions usuelles comme les fonctions exponentielle et logarithme sur \mathbb{R} , \mathbb{C} ou sur une algèbre de Banach, aux fonctions eulériennes gamma et bêta ainsi qu'à la fonction zêta de Riemann.

L'étude de la théorie des probabilités qui est une suite naturelle des chapitres consacrés à la théorie de la mesure est faite par Walter Appel dans [1].

Comme dans le livre de Walter Appel consacré aux probabilités pour l'agrégation externe publié dans la même collection par Deboeck Supérieur, on pourra exploiter dans cet ouvrage une vingtaine de « Thèmes ». Il ne s'agit pas de développements prêts à l'emploi, mais plutôt de suggestions qu'il est possible d'intégrer à certaines leçons d'oral. La liste de ces thèmes figure à la page suivante.

Pour conclure, je tiens à remercier les éditions Deboeck et en particulier Alain Luguët pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant ce travail. Un grand merci à Walter Appel qui a corrigé de nombreuses coquilles et réalisé quelques figures d'illustrations.

Liste de quelques thèmes

1. L'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour f mesurable sur \mathbb{R} (exercice 2.10, page 106).
2. Densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} dans l'espace normé $(\mathbb{L}^p, \|\cdot\|_p)$ (théorème 4.9, page 164).
3. Approximations de l'unité dans \mathcal{L}^p pour $p \in [1, +\infty[$ et densité de l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact de \mathbb{R}^n dans \mathbb{L}^p (théorème 4.19, page 176 et corollaire 4.3, page 179).
4. Construction de fonctions plateau : si K un compact non vide de \mathbb{R}^n et \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n qui contient K , il existe alors $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ à support compact telle $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in K$ et $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ (théorème 4.21, page 182).
5. Formule d'inversion de Fourier : si $f \in \mathcal{L}^1$ est telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, on a alors $f(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\widehat{f}}(-t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}^n$ (théorème 4.24, page 191).
6. Formules sommatoires de Poisson théorème 4.27, page 197 et théorème 4.28, page 198 desquelles on déduit une formule d'inversion de Fourier dans un cas particulier (théorème 4.29, page 199 et exercice 4.17, page 220) ainsi qu'une équation fonctionnelle pour la fonction θ de Jacobi (corollaire 16.1, page 638).
7. Inégalité de Hardy : pour tout réel $p \in]1, \infty[$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x^p} \left| \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \leq q^p \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x)|^p dx$$

(exercice 4.7, page 205).

8. Existence de base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(]a, b[, \pi)$ où $\pi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction poids pour laquelle il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\int_a^b e^{\alpha|t|} \pi(t) dt < +\infty$ (théorème 5.18, page 248).
9. Applications du théorème de représentation de Riesz (théorème 5.19, page 250) : le théorème de Hahn-Banach sur un espace de Hilbert (théorème 5.20, page 252), de Stampachia (théorème 5.21, page 254) et de Lax-Milgram (théorème 5.6, page 255).
10. Opérateurs de Hilbert-Schmidt (paragraphe 5.7, page 258).
11. Caractérisation des normes sur un espace vectoriel normé complexe déduite d'un produit scalaire (exercice 5.5, page 266).
12. Fonctions presque périodiques (chapitre 6, page 281). Ce thème permet de revoir les notions de compacité, précompacité et relative compacité; de continuité et uniforme continuité; de fonctions périodiques et polynômes trigonométriques; de projection orthogonale dans le cadre hermitien.
13. Fonctions d'une variable réelle continues et nulle part dérivables (paragraphe 7.4, page 330).
14. Fonctions quasi-différentiables sur un espace de Banach (exercice 7.5, page 344).

15. Différentielle de l'exponentielle sur une algèbre de Banach (exercice 7.12, page 356).
16. Caractérisation des isométries affines sur un espace de Hilbert (exercices 7.11, page 354 et 8.5, page 387).
17. Lemme de Morse (exercices 8.4, page 385 et 9.4, page 407).
18. Le théorème d'Hadamard-Levy dans un cas particulier (théorème 9.7, page 399).
19. Transformée de Fourier des fonctions rationnelles en utilisant la formule de Cauchy (paragraphe 11.2, page 478).
20. Bi-holomorphismes du disque unité complexe (théorème 11.14, page 487) et bi-holomorphismes du demi-plan de Poincaré (corollaire 11.5, page 488).
21. Formule de Lie-Trotter-Kato pour l'exponentielle sur une algèbre de Banach (théorème 16.4, page 599).
22. Théorème de Weilandt donnant une caractérisation de la fonction Gamma complexe par son équation fonctionnelle et une condition de majoration (théorème 16.15, page 623).