

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Avant-propos</b>  | <b>ix</b> |
| <b>1 Éléments de logique et de théorie des ensembles</b>                       | <b>1</b>  |
| 1.1 Quelques notions de logique . . . . .                                      | 1         |
| 1.2 Les connecteurs logiques de base . . . . .                                 | 2         |
| 1.3 Quelques méthodes de raisonnement . . . . .                                | 4         |
| 1.4 Notions de base sur les ensembles. Quantificateurs . . . . .               | 5         |
| 1.5 Les symboles $\sum$ et $\prod$ . . . . .                                   | 7         |
| 1.6 Les théorèmes de récurrence . . . . .                                      | 8         |
| 1.7 L’algèbre des parties d’un ensemble . . . . .                              | 9         |
| 1.8 Applications. Notions d’injectivité, surjectivité et bijectivité . . . . . | 11        |
| 1.9 Relations d’ordre et d’équivalence . . . . .                               | 16        |
| 1.10 Exercices . . . . .   | 18        |
| <b>2 Structure de groupe</b>   | <b>31</b> |
| 2.1 Loi de composition interne . . . . .                                       | 31        |
| 2.2 Groupes . . . . .  | 33        |
| 2.3 Sous-groupes . . . . .   | 35        |
| 2.4 Sous-groupe engendré par une partie . . . . .                              | 36        |
| 2.5 Groupes monogènes . . . . .  | 37        |
| 2.6 Groupes finis. Théorème de Lagrange . . . . .                              | 39        |
| 2.7 Morphismes de groupes . . . . .  | 40        |
| 2.8 Ordre d’un élément dans un groupe . . . . .                                | 43        |
| 2.9 Exercices . . . . .  | 46        |
| <b>3 Structures d’anneau et de corps</b>                                       | <b>57</b> |
| 3.1 Anneaux . . . . .  | 57        |
| 3.2 Éléments inversibles dans un anneau unitaire . . . . .                     | 60        |
| 3.3 Sous-anneaux . . . . .   | 61        |
| 3.4 Morphismes d’anneaux . . . . .   | 62        |
| 3.5 Corps . . . . .  | 62        |
| 3.6 Morphismes de corps . . . . .  | 64        |
| 3.7 Exercices . . . . .  | 64        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>4</b> | <b>Division euclidienne dans <math>\mathbb{Z}</math></b>  | <b>71</b>  |
| 4.1      | Divisibilité et congruences . . . . .   | 71         |
| 4.2      | Le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ . . . . .   | 72         |
| 4.3      | Les systèmes de numération . . . . .  | 73         |
| 4.4      | Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple . . . . .  | 74         |
| 4.5      | L’algorithme d’Euclide . . . . .  | 80         |
| 4.6      | Equations diophantiennes $ax + by = c$ . . . . .  | 82         |
| 4.7      | Equations $ax \equiv b \pmod{n}$ . . . . .  | 83         |
| 4.8      | Le théorème Chinois . . . . .   | 84         |
| 4.9      | L’ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers . . . . .   | 85         |
| 4.10     | Décomposition en facteurs premiers . . . . .  | 87         |
| 4.11     | Les théorèmes de Fermat et de Wilson . . . . .  | 89         |
| 4.12     | Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d’Euler . . . . .   | 92         |
| 4.13     | Exercices . . . . .   | 97         |
| <b>5</b> | <b>Le corps <math>\mathbb{C}</math> des nombres complexes</b>   | <b>109</b> |
| 5.1      | Conditions nécessaires à la construction de $\mathbb{C}$ . . . . .  | 110        |
| 5.2      | Construction de $\mathbb{C}$ . . . . .  | 110        |
| 5.3      | Conjugué et module d’un nombre complexe . . . . .   | 113        |
| 5.4      | Les équations de degré 2 . . . . .  | 116        |
| 5.5      | Les équations de degré 3 et 4 . . . . .   | 119        |
| 5.6      | Arguments d’un nombre complexe . . . . .  | 120        |
| 5.7      | Racines $n$ -ièmes d’un nombre complexe . . . . .   | 125        |
| 5.8      | Exercices . . . . .   | 127        |
| <b>6</b> | <b>Espaces vectoriels réels ou complexes</b>  | <b>139</b> |
| 6.1      | L’espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ . . . . .   | 139        |
| 6.2      | Définition d’un espace vectoriel réel ou complexe . . . . .   | 140        |
| 6.3      | Sous-espaces vectoriels . . . . .   | 142        |
| 6.4      | Applications linéaires . . . . .  | 146        |
| 6.5      | Base canonique de $\mathbb{K}^n$ et expression matricielle des applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ . . . . . | 149        |
| 6.6      | Matrices réelles ou complexes . . . . .   | 150        |
| 6.7      | Systèmes d’équations linéaires . . . . .  | 159        |
| 6.8      | Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels . . . . .  | 160        |
| 6.9      | Exercices . . . . .   | 161        |
| <b>7</b> | <b>Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie</b>   | <b>169</b> |
| 7.1      | Systèmes libres, systèmes générateurs et bases . . . . .  | 169        |
| 7.2      | Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .   | 171        |
| 7.3      | Rang d’un système de vecteurs ou d’une application linéaire . . . . .   | 179        |
| 7.4      | Expression matricielle des applications linéaires . . . . .   | 181        |
| 7.5      | Formules de changement de base . . . . .  | 184        |
| 7.6      | Exercices . . . . .   | 186        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>8 Opérations élémentaires et déterminants</b>                                       | <b>191</b> |
| 8.1 Opérations élémentaires. Matrices de dilatation et de transvection                 | 192        |
| 8.2 Déterminants des matrices carrées . . . . .  | 195        |
| 8.3 Déterminant d’une famille de vecteurs . . . . .                                    | 203        |
| 8.4 Déterminant d’un endomorphisme . . . . .   | 204        |
| 8.5 Exercices . . . . .  | 205        |
| <b>9 Polynômes à coefficients réels ou complexes</b>                                   | <b>211</b> |
| 9.1 L’algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ . . . . . | 211        |
| 9.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .                                | 215        |
| 9.3 Polynômes premiers entre eux . . . . .   | 220        |
| 9.4 Fonctions polynomiales, racines des polynômes . . . . .                            | 222        |
| 9.5 Dérivation des polynômes. Formule de Taylor . . . . .                              | 225        |
| 9.6 Polynômes irréductibles . . . . .  | 227        |
| 9.7 Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples . . . . .             | 231        |
| 9.8 Polynômes d’interpolation de Lagrange . . . . .                                    | 236        |
| 9.9 Exercices . . . . .  | 238        |
| <b>10 Réduction des endomorphismes</b>   | <b>245</b> |
| 10.1 Polynômes d’endomorphismes, polynômes annulateurs, polynôme minimal . . . . .     | 245        |
| 10.2 Le théorème de décomposition des noyaux . . . . .                                 | 246        |
| 10.3 Valeurs et vecteurs propres . . . . .   | 248        |
| 10.4 Le théorème de Cayley-Hamilton . . . . .  | 251        |
| 10.5 Diagonalisation . . . . .   | 253        |
| 10.6 Endomorphismes trigonalisables . . . . .  | 255        |
| 10.7 Exercices . . . . .   | 257        |
| <b>11 Formes bilinéaires et quadratiques réelles ou complexes</b>                      | <b>263</b> |
| 11.1 Formes linéaires . . . . .  | 263        |
| 11.2 Formes bilinéaires . . . . .  | 266        |
| 11.3 Expression matricielle des formes bilinéaires (en dimension finie) . . . . .      | 267        |
| 11.4 Formes quadratiques . . . . .   | 269        |
| 11.5 Théorème de réduction de Gauss . . . . .  | 271        |
| 11.6 Orthogonalité, noyau et rang . . . . .  | 278        |
| 11.7 Signature d’une forme quadratique réelle en dimension finie . . . . .             | 282        |
| 11.8 Quadriques dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ . . . . .                        | 285        |
| 11.9 Exercices . . . . .   | 289        |
| <b>12 Espaces préhilbertiens</b>   | <b>305</b> |
| 12.1 Produit scalaire . . . . .  | 305        |
| 12.2 Orthogonalité . . . . .   | 307        |
| 12.3 Procédé d’orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .                             | 309        |
| 12.4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie . . . . .            | 311        |
| 12.5 Les endomorphismes symétriques réels . . . . .                                    | 317        |
| 12.6 Espaces vectoriels hermitiens . . . . .   | 318        |
| 12.7 Réduction des matrices normales . . . . .   | 321        |
| 12.8 Exercices . . . . .   | 322        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>13 Problèmes de Capes</b>                  | <b>337</b> |
| 13.1 Capes 2004, épreuve 2 . . . . .          | 337        |
| 13.2 Capes agricole 2004, épreuve 1 . . . . . | 355        |
| 13.3 CAPES 2009, épreuve 2 . . . . .          | 369        |
| 13.4 CAPES 2010, épreuve 2 . . . . .          | 383        |
| 13.5 Capes 2011, épreuve 2 . . . . .          | 402        |
| 13.6 Capes 2013, épreuve 2 . . . . .          | 420        |
| <b>Bibliographie</b>                          | <b>433</b> |
| <b>Index</b>                                  | <b>435</b> |

# Avant-propos

Ce cours d’algèbre s’adresse aux étudiants préparant le Capes de mathématiques. C’est le deuxième volume d’une série qui en comporte 3, le premier volume étant consacré à l’analyse et le troisième à la théorie des probabilités. Il ne s’agit pas de manuels de « méthodes » où l’on sacrifie la notion de rigueur qui est l’essence même des mathématiques. Les notions étudiées le sont de façon rigoureuse en démontrant tous (ou presque) les résultats énoncés. Chaque chapitre se termine par une série d’exercices tous corrigés en détails. C’est ce type d’exercices qu’il est utile de savoir faire avant de travailler sur des épreuves écrites du concours.

Ce deuxième volume est consacré aux notions d’algèbre habituellement enseignées en première et deux années de licence (L1 et L2), à savoir l’étude de quelques notions de logique et de théorie des ensembles, des structures de groupe, d’anneaux et de corps, en se concentrant sur l’anneau des entiers relatifs, le corps des nombres complexes, l’anneau des polynômes à coefficients réels ou complexes et les principales notions d’algèbre linéaire et bilinéaire avec la réduction des endomorphismes et des formes quadratiques. On s’intéresse également à quelques notions d’arithmétique. Le dernier chapitre est consacré à quelques épreuves d’algèbre et de géométrie du Capes, le niveau d’exigence pour cette épreuve ne dépassant pas le niveau de connaissance acquis en première et deuxième année d’université ou de classe préparatoire aux grandes écoles. Pour les notions de géométrie utiles dans certains problèmes de Capes, on se reportera à l’excellent livre de Dany Jacque Mercier : Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l’agrégation. Les problèmes de Capes étant souvent trop longs pour être traités en cinq heures, à titre d’entraînement, on peut se contenter de travailler sur les deux premières parties d’un problème, la suite du problème pouvant être étudiée par la suite à titre d’approfondissement. Nous espérons que ce travail sera utile aux candidats au Capes.

Les élèves en classes préparatoires aux grandes écoles pourront aussi tirer profit de cet ouvrage.

Pour conclure, nous tenons à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguet pour la confiance qu’ils nous accordent en publiant ce travail.