

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Quelques rappels sur les groupes</b>	<b>1</b>
1.1 Sous-groupes distingués. Groupes quotients . . . . .	1
1.2 Ordre d'un élément dans un groupe . . . . .	6
1.3 Sous-groupe engendré par une partie . . . . .	10
1.4 Groupes monogènes, groupes cycliques . . . . .	13
1.5 Sous-groupes d'un groupe cyclique . . . . .	16
1.6 Actions de groupes . . . . .	19
1.7 Le théorème de Cauchy . . . . .	23
1.8 Sous-groupes multiplicatifs d'un corps commutatif . . . . .	24
1.9 Théorème de structure des groupes abéliens finis . . . . .	26
1.10 Exercices . . . . .	29
<b>2 Groupe des permutations d'un ensemble fini</b>	<b>37</b>
2.1 Permutations, cycles et transpositions . . . . .	37
2.2 Les groupes symétriques $\mathcal{S}_n$ . . . . .	39
2.3 Support et orbites d'une permutation . . . . .	40
2.4 Décomposition d'une permutation en produit de cycles . . . . .	42
2.5 Systèmes de générateurs de $\mathcal{S}(E)$ . . . . .	44
2.6 Signature d'une permutation . . . . .	45
2.7 Le groupe alterné . . . . .	49
2.8 Quelques exemples d'utilisation du groupe symétrique . . . . .	51
2.9 Exercices . . . . .	56
<b>3 Groupes et géométrie</b>	<b>73</b>
3.1 Espace affine associé à un espace vectoriel . . . . .	73
3.2 Le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ en dimension finie . . . . .	76
3.3 Orientation d'un espace affine réel . . . . .	80
3.4 Isométries affines conservant une partie . . . . .	81
3.5 Sous groupes finis de $Is^+(\mathcal{E})$ en dimensions 2 et 3 . . . . .	89
3.6 Exercices . . . . .	93

<b>4</b>	<b>Nombres complexes et géométrie</b>	<b>97</b>
4.1	Le plan affine euclidien et le plan d’Argand-Cauchy . . . . .	97
4.2	Module et arguments d’un nombre complexe . . . . .	99
4.3	Le triangle dans le plan complexe . . . . .	105
4.4	Droites et cercles dans le plan complexe . . . . .	119
4.5	Inversions . . . . .	125
4.6	Exercices . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Le groupe linéaire</b>	<b>139</b>
5.1	Premières propriétés . . . . .	139
5.2	Sous-groupes de $GL(E)$ en dimension finie . . . . .	141
5.3	Transvections et dilatations . . . . .	145
5.4	Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$ en dimension finie . . . . .	152
5.5	Groupes dérivés de $GL(E)$ et de $SL(E)$ . . . . .	154
5.6	Cas des corps finis . . . . .	155
5.7	Topologie de $GL(E)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . . . . .	159
5.8	Exercices . . . . .	165
<b>6</b>	<b>Actions de groupes sur des espaces de matrices</b>	<b>183</b>
6.1	Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par translation . . . . .	183
6.2	Action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence . . .	194
6.3	Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison . . . . .	199
6.4	Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence . . . . .	206
6.5	Exercices . . . . .	208
<b>7</b>	<b>Idéaux d’un anneau commutatif unitaire</b>	<b>213</b>
7.1	Rappels de quelques notions de base sur les anneaux . . . . .	213
7.2	Généralités sur les idéaux de $\mathbb{A}$ . . . . .	215
7.3	Idéaux de $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	217
7.4	Congruences, anneaux quotients . . . . .	221
7.5	Idéal premier, idéal maximal . . . . .	223
7.6	Anneaux factoriels . . . . .	224
7.7	Exercices . . . . .	227
<b>8</b>	<b>Anneaux principaux</b>	<b>237</b>
8.1	Définitions et exemples . . . . .	237
8.2	Anneaux à pgcd . . . . .	242
8.3	Le théorème chinois . . . . .	249
8.4	Idéal annulateur et polynôme minimal . . . . .	251
8.5	Exercices . . . . .	254
<b>9</b>	<b>Anneaux euclidiens</b>	<b>261</b>
9.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	261
9.2	pgcd dans un anneau euclidien . . . . .	264
9.3	Éléments premiers entre eux dans un anneau euclidien . . . . .	265
9.4	Exemples d’anneaux euclidiens . . . . .	265
9.5	Un exemple d’anneau principal non euclidien . . . . .	272
9.6	Anneaux euclidiens pour lesquels il y a unicité de la division . . . .	274
9.7	Exercices . . . . .	277

Table des matières

vii

<b>10 Les anneaux <math>\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}</math></b>	<b>279</b>
10.1 Congruences dans $\mathbb{Z}$ , anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	279
10.2 Le groupe multiplicatif $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^\times$ et la fonction indicatrice d’Euler	282
10.3 Le théorème chinois	285
10.4 Systèmes d’équations diophantiennes	289
10.5 $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$ est cyclique pour $p \geq 3$ premier	292
10.6 Exercices	294
<b>11 Nombres premiers</b>	<b>303</b>
11.1 L’ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers	303
11.2 Décomposition en produit de facteurs premiers	305
11.3 Répartition des nombres premiers, inégalités de Tchebychev	308
11.4 Théorèmes de Legendre et de Bertrand	319
11.5 Quelques tests de primalité	325
11.6 Nombres de Carmichael	329
11.7 La fonction de Möbius	331
11.8 Un théorème de Cesàro	334
11.9 Exercices	337
<b>12 Polynômes à une indéterminée</b>	<b>353</b>
12.1 L’algèbre $\mathbb{K}[X]$ . Degré, valuation, opérations sur les polynômes	353
12.2 Polynômes étagés ou échelonnés en degrés ou en valuation	356
12.3 Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif unitaire	358
12.4 Division euclidienne des polynômes	359
12.5 Fonctions polynomiales	361
12.6 Dérivation des polynômes. Formule de Taylor	364
12.7 Relations entre les racines et les coefficients d’un polynôme scindé	367
12.8 Polynômes irréductibles	370
12.9 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ . Anneaux quotients $\frac{\mathbb{K}[X]}{(P)}$	372
12.10 Polynômes d’interpolation de Lagrange	377
12.11 Polynômes à coefficients réels ou complexes	378
12.12 Idéaux et pgcd dans $\mathbb{K}[X]$	393
12.13 Polynômes premiers entre eux	396
12.14 Applications	399
12.15 Exercices	405
<b>13 Corps finis</b>	<b>415</b>
13.1 Caractéristique d’un anneau unitaire intègre	415
13.2 Résultats préliminaires sur les corps	416
13.3 Un théorème de Wedderburn	419
13.4 Construction de corps finis	421
13.5 Carrés dans un corps fini	426
13.6 Le symbole de Legendre	428

13.7	La loi de réciprocité quadratique . . . . .	431
13.8	Exercices . . . . .	434
<b>14</b>	<b>Formes linéaires, dualité</b>	<b>441</b>
14.1	L'espace dual $E^*$ . . . . .	441
14.2	Hyperplans . . . . .	445
14.3	Orthogonalité . . . . .	446
14.4	Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie . . . . .	451
14.5	Transposition . . . . .	451
14.6	Exercices . . . . .	454
<b>15</b>	<b>Formes quadratiques en dimension finie</b>	<b>461</b>
15.1	Formes bilinéaires et formes quadratiques . . . . .	461
15.2	Orthogonalité, noyau et rang . . . . .	465
15.3	Théorème de réduction de Gauss . . . . .	469
15.4	Signature d'une forme quadratique réelle . . . . .	475
15.5	Formes quadratiques sur un espace euclidien . . . . .	479
15.6	Formes quadratiques sur un corps fini . . . . .	480
15.7	Exercices . . . . .	483
<b>16</b>	<b>Coniques dans un plan affine euclidien</b>	<b>493</b>
16.1	Définition algébrique des coniques . . . . .	493
16.2	Quadriques dans un espace affine euclidien . . . . .	503
16.3	Définition par directrice, foyer et excentricité des coniques . . . . .	505
16.4	Définition bifocale des coniques à centre . . . . .	514
16.5	Définition par foyers et cercle directeur des coniques à centre . . . . .	519
16.6	Lieu orthoptique d'une conique . . . . .	524
16.7	Cocyclicité de 4 points sur une conique . . . . .	530
16.8	Exercices . . . . .	534
<b>17</b>	<b>Déterminants</b>	<b>545</b>
17.1	Formes multilinéaires alternées . . . . .	545
17.2	Déterminants . . . . .	547
17.3	Méthodes de calcul d'un déterminant . . . . .	551
17.4	Exemples d'utilisation du déterminant . . . . .	555
17.5	Exercices . . . . .	572
<b>18</b>	<b>Résultant et discriminant</b>	<b>581</b>
18.1	Définition et propriétés du résultant . . . . .	581
18.2	Quelques propriétés topologiques du résultant . . . . .	590
18.3	L'anneau des entiers algébriques . . . . .	591
18.4	Intersection de 2 courbes algébriques planes . . . . .	594
18.5	Exercices . . . . .	597

<b>19 Polynômes d’endomorphismes en dimension finie</b>	<b>603</b>
19.1 L’algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$	603
19.2 Polynômes annulateurs, polynôme minimal	604
19.3 Le théorème de Cayley-Hamilton	606
19.4 Le théorème de décomposition des noyaux	608
19.5 La décomposition de Dunford	611
19.6 Un algorithme pour obtenir la décomposition de Dunford	616
19.7 Endomorphismes semi-simples	620
19.8 Quelques applications	624
19.9 Exercices	635
<b>20 Valeurs propres</b>	<b>643</b>
20.1 Valeurs et vecteurs propres	643
20.2 Valeurs propres des endomorphismes nilpotents	648
20.3 Localisation des valeurs propres d’une matrice complexe	650
20.4 Rayon spectral des matrices complexes	654
20.5 Calcul approché des valeurs propres	660
20.6 Polynômes orthogonaux	660
20.7 Exercices	665
<b>21 Réduction des endomorphismes</b>	<b>675</b>
21.1 Endomorphismes trigonalisables	675
21.2 Trigonalisation simultanée	678
21.3 Réduction des endomorphismes nilpotents	679
21.4 Réduction de Jordan	681
21.5 Endomorphismes diagonalisables	682
21.6 Diagonalisation simultanée	684
21.7 Topologie de l’ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	685
21.8 Diverses factorisation de matrices	687
21.9 Réduction de Frobenius	693
21.10 Exercices	702
<b>22 Endomorphismes remarquables d’un espace euclidien</b>	<b>713</b>
22.1 Espaces vectoriels euclidiens	713
22.2 Adjoint d’un endomorphismes	718
22.3 Le groupe orthogonal	720
22.4 Réduction des endomorphismes orthogonaux	725
22.5 Symétries orthogonales dans les espaces euclidiens	730
22.6 Endomorphismes symétriques	732
22.7 Réduction des endomorphismes symétriques	733
22.8 Endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs	735
22.9 Quelques applications du théorème spectral	738
22.10 Endomorphismes normaux	743
22.11 Exercices	747

<b>23 Exponentielle de matrices</b>	<b>759</b>
23.1 Séries matricielles . . . . .	759
23.2 L'exponentielle matricielle. Propriétés . . . . .	761
23.3 Utilisation de la décomposition de Dunford . . . . .	765
23.4 Surjectivité et injectivité de l'exponentielle matricielle . . . . .	766
23.5 Exercices . . . . .	772
 <b>Bibliographie</b>	 <b>781</b>
 <b>Index</b>	 <b>783</b>

# Avant-propos

*Cet ouvrage est dédié à un très cher ami, Richard André-Jeannin, décédé en 2011*

Ce livre destiné aux candidats à l’agrégation interne et externe de Mathématiques complète le cours d’analyse et probabilités pour l’agrégation interne de Jean-François Dantzer dans la même collection. On trouvera des compléments à ces deux ouvrages, sous formes d’exercices et de problèmes, dans [32], les problèmes proposés pouvant être utilisés comme entraînements aux épreuves écrites, certains énoncés de problèmes de ce livre étant inspirés de problèmes d’agrégation interne ou externe.

Le niveau de connaissance suffisant pour la lecture de ce cours est celui du premier cycle universitaire.

Le but est de couvrir une grande partie des thèmes d’algèbre et géométrie proposés pour les épreuves orales et j’ai pris soin de faire suivre chaque théorème important d’une série d’applications.

Ce cours est aussi l’occasion de réviser des notions de base pour l’écrit et les nombreux exercices proposés, tous corrigés en détail, outre le fait qu’ils peuvent constituer un bon entraînement, peuvent être utilisés pour des développements dans les leçons d’oral de l’agrégation externe et interne ainsi que pour des leçons d’oral 2 de l’agrégation interne.

Les premiers chapitres sont consacrés à l’étude des groupes et leur utilisation en géométrie, en traitant en particulier l’étude des actions de groupe et du groupe symétrique. Le lien entre groupes et géométrie fait l’objet d’un chapitre particulier. On s’intéresse également à l’utilisation des nombres complexes en géométrie et au groupe linéaire.

L’arithmétique est étudiée dans un cadre général avec l’étude des anneaux principaux et euclidiens. L’arithmétique sur l’anneau  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, l’étude des nombres premiers et des anneaux  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  est l’objet de chapitres particuliers, de même que l’étude des polynômes à coefficients dans un corps commutatif ou un anneau commutatif unitaire. Ces notions d’arithmétique sont approfondies avec l’étude des corps finis.

Pour ce qui est de l’algèbre linéaire et bilinéaire, on s’intéresse à la dualité, aux déterminants avec une attention particulière pour le résultant, aux formes quadratiques, aux coniques et à la réduction des endomorphismes. On s’intéresse aussi aux séries matricielles et à l’exponentielle de matrice.

La plupart des chapitres de ce livre correspondent à des leçons d’oral de l’agrégation interne et externe, mais il ne s’agit pas de modèles de leçons.

Pour cette deuxième édition, les modifications essentielles sont les suivantes :

- corrections de coquilles et erreurs diverses de la première édition ;
- modification du chapitre 4 sur les nombres complexes et la géométrie ;
- ajout du chapitre 6 sur les actions de groupes sur des espaces de matrices ;
- suppression du chapitre sur les représentations de groupes finis (pour ne pas aboutir à un livre trop volumineux) ;
- modification du chapitre 16 sur les coniques ;
- ajout du paragraphe 21.9 sur la réduction de Frobenius dans le chapitre 21 sur la réduction des endomorphismes.

Je tiens encore à remercier mes bons amis Marie-Cécile Darracq et Gérard Vinel qui ont accepté la tâche ingrate de relire quelques chapitres de ce livre. Leurs conseils me furent très utiles. Je remercie également les éditions De Boeck, et en particulier Alain Luguët, pour la confiance qu'ils m'accordent.