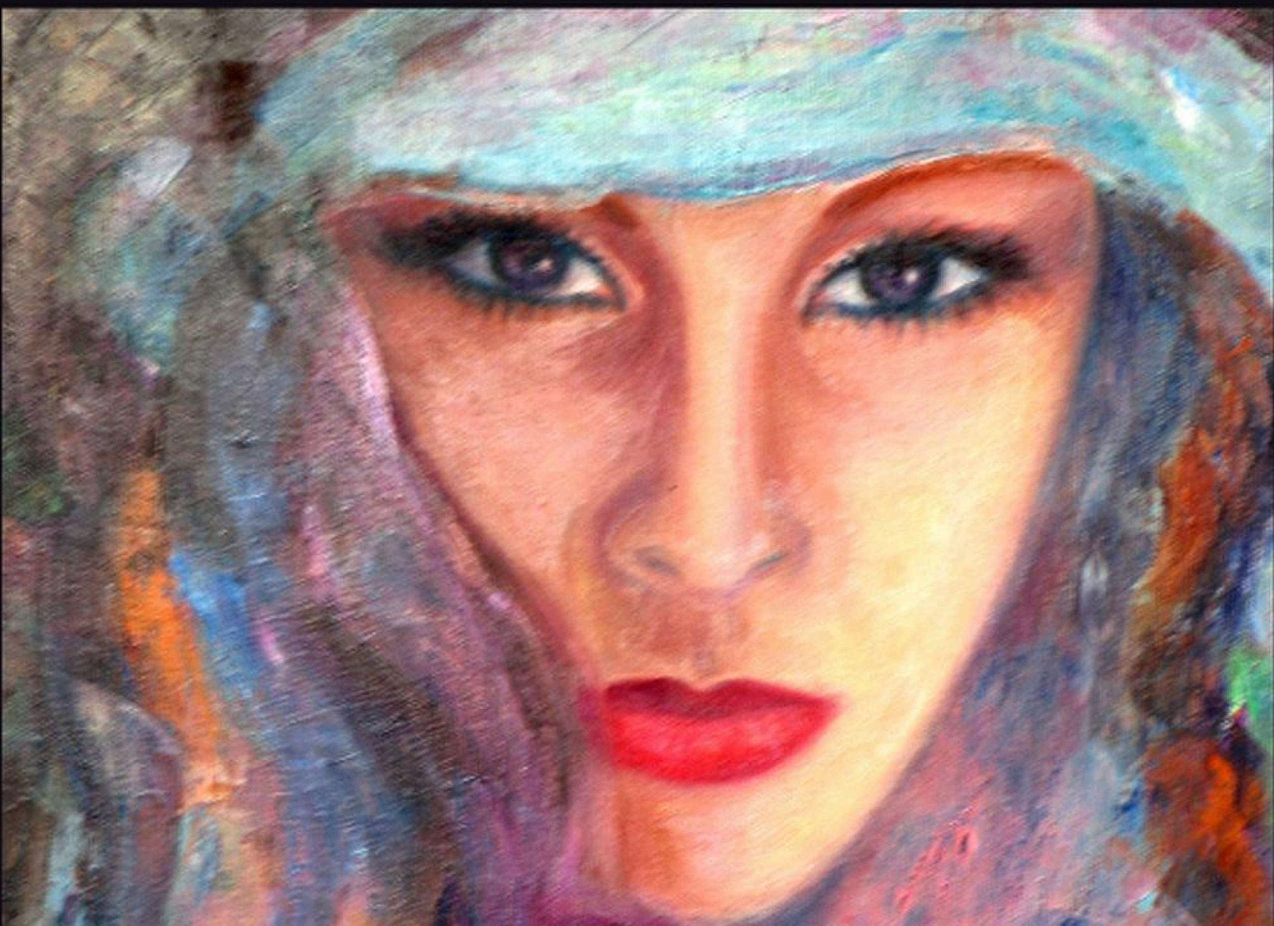
Annales du CAPES externe de mathématiques

1999 à 2005



D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi

Annales du CAPES externe de mathématiques 1999 à 2005

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi

Photo de couverture :
Tableau de Nadine Rombaldi

Independently published
ISBN-13 : 9798629565635

Table des matières

[0] [cmon0012] v2.00

Avant-propos

Cet ouvrage est constitué des énoncés et corrigés de quinze problèmes posés au CAPES externe de Mathématiques entre 1999 et 2005. Certains de ces corrigés sont complétés par des remarques et des compléments.

Une utilisation efficace de ces problèmes consiste bien évidemment à les chercher au préalable puis à confronter les résultats obtenus aux solutions proposées.

Les candidats à l'Agrégation interne de Mathématiques pourront également utiliser avec profit ce travail.

Les objectifs principaux d'un tel travail sont les suivants :

- proposer des épreuves d'entraînements ;
- proposer un modèle de rédaction ;
- élargir le champ des connaissances acquises en licence.

D'un point de vue pratique, il est essentiel de rappeler que de manière générale ces problèmes de concours (que ce soit de CAPES ou d'Agrégation) sont beaucoup trop longs pour être résolus en cinq heures. Sur un problème comportant cinq parties la résolution correcte des questions des deux premières parties est en général suffisante pour assurer une admissibilité bien classée, il est donc conseillé de se concentrer sur les deux premières parties du problème et d'essayer d'en résoudre un maximum de questions plutôt que de « papillonner » et ne travailler que sur quelques questions élémentaires. Le reste du problème peut se travailler dans un deuxième temps dans le but d'acquérir de nouvelles connaissances.

Un autre conseil capital est de lire attentivement les rapports du jury sur ces épreuves (disponibles sur le site internet SIAC2 du Ministère, à l'adresse http ://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm). On y insiste souvent sur la nécessité de rédiger avec rigueur et concision. Le jury est souvent catastrophé par la rédaction de certains candidats (écriture peu lisible, manque de rigueur, théorèmes de base cités de manière approximative).

Les lignes qui suivent, où l'on donne pour chaque année une liste de notions de base qu'il est peut-être utile de revoir avant de s'attaquer aux problèmes, sont en partie extraites des rapports de jury.

Concours 1999.

Épreuve 1. Fonctions polynômes à plusieurs variables.
Multiplicité des racines d'un polynôme.
Fonctions symétriques des racines.
Suites monotones bornées.
Théorèmes des valeurs intermédiaires, de Rolle et des accroissements finis.
Convexité des fonctions réelles.
Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
Topologie de $\mathbb{R}$, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Épreuve 2 Algèbre linéaire, hyperplans et dualité.
Groupe des isométries du plan, isométries du carré.
Arithmétique de base, congruences et anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Calcul matriciel.
Groupe des permutations, matrices de permutations.
Equation des classes.

Concours 2000.

Épreuve 1. Calculs sur les polynômes, ordre de multiplicité des racines.
Produits scalaires sur des espaces de fonctions.
Familles orthogonales et polynômes orthogonaux.
Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Continuité et dérivation d'une fonction définie par une intégrale.
Convergence des intégrales impropres.
Interpolation de Lagrange et d'Hermite.
Calcul approché des intégrales définies ou impropres (méthode de Gauss).

Épreuve 2. Groupe symétrique.
Formes quadratiques.
Géométrie dans l'espace.
Tétraèdres : volumes, projections orthogonales, symétries...

Concours 2001.

Épreuve 1. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Continuité à droite et à gauche.

Homéomorphismes.
Théorème des accroissements finis.
Intégrales dépendants d'un paramètre.
Suites extraites, densité.
Intégrales impropres.
Séries numériques.
Continuité des fonctions de plusieurs variables.
Notions de base en probabilités : variables aléatoires, probabilités conditionnelles, fonction de répartition, lois de Poisson et exponentielle.

Épreuve 2. Algèbre linéaire.
Arithmétique de niveau terminale S.
Suites récurrentes d'ordre 2.
Équation réduite des hyperboles.

Concours 2002.

Épreuve 1. Fonctions d'une variable réelle. Étude des variations.
Théorème des valeurs intermédiaires.
Propriétés des fonctions continues sur un compact.
Fonctions dérivables, formule de Leibniz.
Formule de Taylor-Young.
Développements limités.
Développements en séries entières.
Fonctions périodiques.
Espaces vectoriels, dimension, familles libres et sous-espaces.
Isomorphismes d'espaces vectoriels.
Equations différentielles linéaires d'ordre n.
Séries de fonctions, convergence uniforme et dérivation.

Épreuve 2. Polynômes prenant des valeurs particulières sur certaines parties.
Interpolation de Lagrange.
Systèmes linéaires.
Arithmétique, étude de certains anneaux de nombres.

Concours 2003.

Épreuve 1. Espaces vectoriels normés.
Polynômes, polynômes trigonométriques.
Dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$.
Fonctions périodiques et trigonométriques.

Coefficients et séries de Fourier.
Intégrale de Riemann d'une fonction continue (et périodique) sur un compact (sur $\mathbb{R}$).
Prolongement par continuité.
Formules de trigonométrie.
Propriétés des fonctions continues sur un compact (uniforme continuité).
Convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions.
Continuité de la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente.

Épreuve 2. Calcul des probabilités. Notion d'événements indépendants.
Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et leurs éléments inversibles.
Notions de base en arithmétique.
Identité d'Euler par les probabilités.
Test de primalité de Miller-Rabin.

Concours 2004.

Épreuve 1. Suites réelles, monotones, adjacentes.
Raisonnements par récurrence.
Fonctions d'une variable réelle : limites, continuité, dérivabilité, convexité.
Inégalité des accroissements finis.
Intégration des fonctions continues sur un compact.
Propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes.
Suites de fonctions.
Equations différentielles.
Méthode d'Euler pour la résolution approchée d'équations différentielles d'ordre 1.

Épreuve 2. Notions de base en théorie des ensembles.
Relations d'équivalence, dénombrabilité.
Rotations vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.
Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$.
Algèbre linéaire : calcul des puissances d'une matrice.
Etude d'ensembles paradoxaux.

Concours 2005.

Épreuve 1. Formule de Taylor-Lagrange pour les polynômes.
Définition et utilisation des notions de borne inférieure et supérieure.
Théorème de la bijection pour les fonctions continues d'une variable réelle.
Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires

d'ordre 2.
Le caractère défini positif de l'intégration des fonctions continues sur un intervalle réel.
Propriétés des fonctions développables en série entière.
Solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 développables en série entière.
Connaissances de base sur les groupes.

Épreuve 2 annulée. Constructions à la règle et au compas.
Géométrie des Π-droites.

Épreuve 2 de remplacement. Courbes paramétrées.
Transformée de Descartes d'un arc paramétré.
Coniques : propriétés des tangentes à une hyperbole, à une parabole.
Fonctions polynomiales.

Comme on dit à la fin d'un cours, si vous avez des questions vous pouvez y aller. Sur le site MégaMaths, Dany-Jack se fera un plaisir de vous répondre. Jean-Etienne, de nature plus paresseuse, se repose sur son camarade.

En espérant que notre travail vous sera utile nous vous souhaitons bonne chance.

AVERTISSEMENT

pour l'édition 2 du 21 mars 2020

1. Ce livre, publié pour la première fois aux Editions Publibook en 2005, est proposé gracieusement sur le site MégaMaths et sur INTERNET ARCHIVE avec l'accord de ses auteurs.

2. Ce livre n'est plus d'actualité pour préparer le CAPES mathématique en 2020 car le programme disciplinaire de ce concours a sans cesse diminué au fur et à mesure des réformes entreprises à partir de la session 2011.

3. En 2020 il reste néanmoins conseillé d'utiliser ce livre pour préparer l'agrégation interne puisque les 15 problèmes corrigés qui y sont proposés touchent des thèmes importants à maîtriser pour ce concours dont le niveau mathématique reste exigeant.

Première partie

ANALYSE

Chapitre 1

CAPES externe 1999, épreuve 1

1.1 Énoncé

Notations et objet du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, *on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.*

Pour tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$ il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On note P' le polynôme dérivé du polynôme P.

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel normé avec :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

On note U_n le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes unitaires de degré n. Précisément un élément de U_n s'écrit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$.

On définit l'application φ_n de $\mathbb{R}^n$ (espace produit) dans U_n par :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \mapsto \varphi_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k).$$

On définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k}$ par :

$$\sigma_{n,0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\,, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) & \longmapsto & 1\,, \end{array}$$

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}\,, \quad \sigma_{n,k} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}\,, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k} \end{array}$$

L'objet du problème est l'étude d'une condition nécessaire puis d'une condition suffisante, portant sur les coefficients, pour qu'un polynôme réel ait toutes ses racines réelles.

Le résultat de la question **I.1.1.** *est utilisé dans la partie* ***II***.

Les parties ***II*** *et* ***III*** *sont indépendantes.*

La partie ***IV*** *utilise des résultats des parties* ***II*** *et* ***III***.

– I – La méthode de Newton pour les équations polynomiales

Pour cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et P est un polynôme appartenant à U_n dont toutes les racines sont réelles. On suppose que P a au moins deux racines réelles distinctes et on note :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$$

les racines réelles distinctes de P avec p entier compris entre 2 et n. Pour tout entier j compris entre 1 et p, la racine λ_j est de multiplicité m_j supérieure ou égale à 1 avec :

$$\sum_{j=1}^{p} m_j = n.$$

I.1.

I.1.1. Montrer que le polynôme dérivé P' admet les réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ pour racines de multiplicités respectives $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, $\cdots$, $m_p - 1$ (une multiplicité nulle signifie que λ_j n'est pas racine de P') et des racines simples $\mu_j \in \left]\lambda_{j+1}, \lambda_j\right[$ avec $1 \leq j \leq p-1$.

I.1.2. Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à λ_1 et tout entier k compris entre 0 et n, on a $P^{(k)}(x) > 0$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P.

I.2. *On définit la fonction $g : [\lambda_1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :*

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x - \dfrac{P(x)}{P'(x)} & \text{si } x > \lambda_1, \\ \lambda_1 & \text{si } x = \lambda_1. \end{cases}$$

I.2.1. Montrer que la fonction g est indéfiniment dérivable sur $[\lambda_1, +\infty[$.

I.2.2. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1,\ \lambda_1 < g(x) < x. \tag{1.1}$$

Jusqu'à la fin de **I.2.** b est un réel *strictement supérieur à* λ_1. *On définit alors la suite* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *par :*

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ \forall k \geq 0,\ x_{k+1} = g(x_k). \end{cases}$$

Montrer que cette suite converge en décroissant vers λ_1.

I.2.4. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1,\ 1 - g'(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{p} \dfrac{m_j}{(x-\lambda_j)^2}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{p} \dfrac{m_j}{x-\lambda_j}\right)^2}. \tag{1.2}$$

I.2.5. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1,\ \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x-\lambda_j}\right)^2 \leq n \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x-\lambda_j)^2}. \tag{1.3}$$

I.2.6. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall x > \lambda_1,\ 0 < g'(x) \leq 1 - \frac{1}{n}. \tag{1.4}$$

I.2.7. On suppose qu'on a trouvé un réel a inférieur ou égal à λ_1. Déduire de (1.4) une majoration de $|x_k - \lambda_1|$ pour tout entier k strictement positif en fonction de a, b, n et k.

I.3. *On désigne par :*

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n$$

les n *racines réelles distinctes ou confondues de* P *et on suppose qu'on a obtenu des valeurs approchées des* $m-1$ *premières racines* $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{m-1}$ *avec* m *compris entre* 2 *et* n. *On se propose de déduire un calcul approché de* ρ_m. *Pour ce faire on définit le polynôme* P_{m-1} *par :*

$$P_{m-1}(X) = \frac{P(X)}{(X-\rho_1)\cdots(X-\rho_{m-1})}.$$

On définit la fonction $g_{m-1} :]\rho_m, +\infty[\to \mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x > \rho_m,\ g_{m-1}(x) = x - \frac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)}$$

et la suite $\left(x_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *par :*

$$\begin{cases} x_0^{(m)} = b_m, \\ \forall k \geq 0,\ x_{k+1}^{(m)} = g_{m-1}\left(x_k^{(m)}\right), \end{cases}$$

où b_m *est un réel strictement supérieur à* ρ_m.

I.3.1. Montrer que la suite $\left(x_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

I.3.2. Exprimer, pour tout réel x strictement supérieur à ρ_m, $\dfrac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)}$ en fonction de $P(x)$, $P'(x)$ et des $x - \rho_j$ $(1 \leq j \leq m-1)$.
Quel peut-être l'intérêt d'une telle écriture ?

– II – Quelques propriétés des fonctions symétriques élémentaires

II.1.

II.1.1. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On lui associe $\lambda' = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Exprimer, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\sigma_{n,k}(\lambda)$ en fonction de λ_n et des $\sigma_{n-1,j}(\lambda')$ $(0 \leq j \leq n-1)$.

II.1.2. Montrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k}.$$

II.2. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'application φ_n est continue de $\mathbb{R}^n$ dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}_n[X]$.

II.3. Soient n un entier strictement positif, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ avec λ_k non nul pour tout entier k compris entre 1 et n et $P = \varphi_n(\lambda)$ avec $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(a_n = 1)$.

II.3.1. Montrer que a_0 est différent de 0.

On désigne par Q le polynôme à coefficients réels et de degré n défini pour x réel non nul par :

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

II.3.2. En écrivant :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

exprimer les coefficients b_k $(0 \leq k \leq n)$ en fonction de coefficients a_j $(0 \leq j \leq n)$.

II.3.3. Déterminer δ appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $\frac{1}{a_0}Q = \varphi_n(\delta)$.

II.3.4. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ \sigma_{n,k}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \frac{\sigma_{n,n-k}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}. \tag{1.5}$$

II.4. Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ et $P = \varphi_n(\lambda)$.

II.4.1. Montrer qu'il existe μ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\frac{1}{n}P' = \varphi_{n-1}(\mu')$.

II.4.2. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\},\ \sigma_{n,k}(\lambda) = \frac{n}{n-k}\sigma_{n-1,k}(\mu').$$

II.5. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

II.5.1. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

II.5.2. Montrer que :

$$(n-1)(\sigma_{n,1}(\lambda))^2 - 2n\sigma_{n,2}(\lambda) \geq 0. \tag{1.6}$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

II.6. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$(n-1)(\sigma_{n,n-1}(\lambda))^2 - 2n\sigma_{n,n-2}(\lambda)\sigma_{n,n}(\lambda) \geq 0. \tag{1.7}$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée. (On distinguera le cas où l'un des λ_i est nul du cas où tous les λ_i sont non nuls et dans ce dernier cas on peut utiliser (1.5) et (1.6)).

II.7. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, on a pour k compris entre 1 et $n-1$:

$$(\sigma_{n,k}(\lambda))^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k}\sigma_{n,k-1}(\lambda)\,\sigma_{n,k+1}(\lambda) \geq 0. \tag{1.8}$$

en précisant dans quel cas l'égalité est réalisée (on peut procéder par récurrence sur $n \geq 2$ en utilisant le résultat de la question **II.4.2.** et l'inégalité (1.7)).

– III – Un résultat de continuité des racines d'un polynôme comme fonctions des coefficients

Pour cette partie, n est un entier strictement positif et P désigne un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant n racines réelles distinctes :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n.$$

III.1. Montrer qu'il existe un réel r strictement positif tel que les intervalles $I_k = [\lambda_k - r, \lambda_k + r]$ $(1 \leq k \leq n)$ soient deux à deux disjoints.

III.2. Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et n, on peut trouver des réels a_k et b_k appartenant à I_k tels que :

$$P(a_k)\,P(b_k) < 0.$$

III.3. *On note :*

$$[a,b] = [\lambda_n - r, \lambda_1 + r],$$

$$\alpha = \min\{|P(a_1)|, \cdots, |P(a_n)|, |P(b_1)| \cdots, |P(b_n)|\}.$$

III.3.1. Montrer qu'il existe un réel β strictement positif tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \ \sup_{x \in [a,b]} |Q(x)| \leq \beta \|Q\|. \tag{1.9}$$

III.3.2. Soit Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|Q - P\| < \dfrac{\alpha}{\beta}$.

a. Montrer que :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \ Q(a_k)\,Q(b_k) < 0.$$

b. Montrer que le polynôme Q a n racines réelles distinctes.

On a donc montré le résultat suivant :

Si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant n racines réelles distinctes, alors il existe un réel ε strictement positif tel que tout polynôme $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$ appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifiant $|b_k - a_k| < \varepsilon$ pour tout k compris entre 0 et n, admet n racines réelles distinctes.

(R1)

– IV – Inégalités de Newton

Pour cette partie on suppose l'entier n supérieur ou égal à 2.

IV.1. Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de U_n $(a_n = 1)$ admettant n racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. En utilisant (1.8) montrer que nécessairement :

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\},\ a_k^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k} a_{k-1}a_{k+1} \geq 0. \qquad \text{(R2)}$$

(inégalités de Newton). Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

IV.2. *Etude d'un exemple* — Soient a un réel et P le polynôme :

$$P(X) = X^5 + 5aX^3 + a^2X + 1.$$

IV.2.1. Montrer que si P a 5 racines réelles alors a est strictement négatif.

IV.2.2. *On suppose que a est strictement négatif.*

a. Montrer que les inégalités $(R2)$ sont vérifiées.

On pose $a = -\dfrac{1}{b^2}$ avec b strictement positif et :

$$\begin{aligned} R(X) &= X^5 - 5X^3 + X + b^5, \\ S(X) &= X^5 - 5X^3 + X. \end{aligned}$$

b. Montrer que P a 5 racines réelles si et seulement si R a 5 racines réelles.

c. Montrer que le polynôme dérivé S' a 4 racines réelles $-\alpha_1 < -\alpha_2 < \alpha_2 < \alpha_1$ et que $S(\alpha_2) < S(-\alpha_1)$.

d. En étudiant les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto S(x)$ montrer que P a 5 racines réelles distinctes si et seulement si $a < -\dfrac{1}{(S(\alpha_2))^{\frac{2}{5}}}$.

On admet le résultat suivant :

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *est un polynôme de* U_n *admettant* n *racines réelles strictement négatives, l'une d'elles étant de multiplicité supérieure ou égale à* 2, *alors :*

$$\exists k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}\,;\ a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} \leq 0. \tag{R3}$$

IV.3. Dans cette question on se propose de montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante : *si* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *est un polynôme de* U_n *(*$a_n = 1$*) vérifiant les conditions :*

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}\,,\ a_k > 0, \tag{H1}$$

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}\,,\ a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} > 0, \tag{H2}$$

alors toutes les racines de P *sont simples et réelles.*

IV.3.1. Montrer que si le polynôme P appartenant à U_n vérifie $(H2)$ alors il vérifie $(R2)$.

IV.3.2. Montrer la propriété $(\mathcal{P}_2)$.

Soit n *un entier supérieur ou égal à* 3. *On suppose que* $(\mathcal{P}_{n-1})$ *est vraie et on considère un polynôme* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *appartenant à* U_n *vérifiant les conditions* $(H1)$ *et* $(H2)$ *; on note alors* $Q = P - a_0$.

IV.3.3. Montrer que le polynôme Q admet n racines réelles simples, la plus grande étant 0.

Pour tout réel t *positif ou nul on pose :*

$$Q_t(X) = Q(X) + t,$$

on désigne par $N_t \in \mathbb{N}$ *le nombre de racines réelles distinctes de* Q_t *et on note :*

$$S = \{t > 0 \mid N_t < n\}\,.$$

IV.3.4. Calculer N_0.

IV.3.5. Montrer que S est non vide puis que S admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$.

IV.3.6. En utilisant le résultat $(R1)$ de la partie **III** montrer que $\alpha > 0$.

IV.3.7. En utilisant le résultat $(R1)$ de la partie **III** montrer que $N_\alpha < n$.

IV.3.8.

a. Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que pour tout t dans $[0, \alpha[$ les n racines réelles de Q_t sont dans $[-M, 0]$.

Soit $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de réels appartenant à $[0, \alpha[$ qui converge vers α. Pour tout entier naturel p on note :

$$\delta_{1,p} > \cdots > \delta_{n,p}$$

les n racines réelles de Q_{t_p} et on pose $\delta_p = (\delta_{1,p}, \cdots, \delta_{n,p})$.

b. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(\delta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente. On note $\left(\delta_{\sigma(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une telle sous suite et $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$ sa limite dans $\mathbb{R}^n$.

On note :

$$R(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \delta_k).$$

c. Montrer que dans $\mathbb{R}_n[X]$ on :

$$\lim_{p\to+\infty} Q_{t_{\sigma(p)}} = R.$$

d. Montrer que $R = Q_\alpha$.

e. Montrer que Q_α a toutes ses racines réelles strictement négatives, l'une d'elles étant de multiplicité supérieure ou égale à 2.

f. En utilisant le résultat $(R3)$ montrer que nécessairement α est strictement supérieur à a_0 et conclure.

IV.4. En considérant le polynôme $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 1$, montrer que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ n'est plus valable si on a l'hypothèse $(H2)$ sans l'hypothèse $(H1)$.

IV.5. Dans cette question on se propose de montrer que le coefficient 4 de $(H2)$ ne peut pas être diminué, c'est-à-dire que pour tout réel γ strictement inférieur à 4 il existe un polynôme P appartenant à U_n à coefficients strictement positifs vérifiant :

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}, \; a_k^2 - \gamma a_{k-1}a_{k+1} > 0 \qquad \text{(H3)}$$

et admettant des racines complexes non réelles.

IV.5.1. Montrer le résultat pour $n = 2$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se donne un réel γ strictement inférieur à 4 et on suppose qu'on a trouvé un polynôme $B(X) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ appartenant à U_{n-1}, vérifiant $(H1)$ et $(H3)$ et admettant des racines complexes non réelles. On pose alors pour tout réel t strictement positif :

$$P_t(X) = (tX+1)\, B(X)\,.$$

Pour tout entier m supérieur ou égal à 2 et tout polynôme $A(X) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k$ à coefficients réels tous non nuls on note :

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, m-1\}\,,\ \theta(A,k) = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}}.$$

IV.5.2. Montrer que :

a. pour tout entier k compris entre 2 et $n-1$ on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(P_t, k) = \theta(B, k-1)\,,$$

b. $\lim_{t\to+\infty} \theta(P_t, 1) = +\infty$.

IV.5.3. En déduire qu'on peut trouver un réel t strictement positif tel que $\theta(P_t, k) > \gamma$ pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$ puis conclure.

1.2 Corrigé

Préliminaires

Quand on décrit certaines méthodes de résolution approchée d'équations polynomiales, on est parfois amené à faire l'hypothèse que les polynômes considérés ont toutes leurs racines réelles et les exemples proposés sont les polynômes orthogonaux ou les polynômes caractéristiques de matrices symétriques réelles.

La méthode de Newton-Maehly ([22]), ou méthode de suppression des zéros (1954), est un exemple de telle méthode qui permet de calculer des valeurs approchées de toutes les racines d'un polynôme réel ayant toutes ses racines réelles.

Dans ce contexte une question naturelle est :

« à quelles conditions un polynôme à coefficients réels a-t'il toutes ses racines réelles ? »

Une condition nécessaire est donnée par les inégalités de Newton ([16] et [30]) :

Théorème 1.1 *Si* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ *($n \geq 2$, $a_n \neq 2$) admet n racines réelles alors :*

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}, \ a_k^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k} a_{k-1}a_{k+1} \geq 0.$$

L'exemple de :

$$P(X) = 5X^3 + 39X^2 + 92X + 58 = (X+1)\left(5X^2 + 34X + 58\right)$$

montre que la réciproque est fausse.

Une condition suffisante est donnée par le résultat suivant ([20]) :

Théorème 1.2 *Si* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ *($n \geq 2$) est tel que :*

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}, \ a_k > 0, \\ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}, \ a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} > 0, \end{cases}$$

alors toutes les racines de P sont simples et réelles.

Le coefficient 4 du théorème précédent ne peut pas être diminué. Précisément, on a le résultat suivant ([20]) :

Théorème 1.3 *Pour tout réel $\gamma \in \left]0, 4\right[$ il existe* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ *($n \geq 2$) tel que :*

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}, \ a_k > 0, \\ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}, \ a_k^2 - \gamma\alpha a_{k-1}a_{k+1} > 0 \end{cases}$$

et admettant des racines complexes non réelles.

– I – La méthode de Newton pour les équations polynomiales

I.1.

I.1.1. Pour $j \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $m_j \geq 2$, λ_j est racine d'ordre $m_j - 1$ du polynôme P'. Ce qui donne $\sum_{j=1}^{p}(m_j - 1) = n - p$ racines réelles pour P'. D'autre part, le théorème de Rolle nous dit que pour tout j dans $\{1, \cdots, p-1\}$ il existe $\mu_j \in \left]\lambda_{j+1}, \lambda_j\right[$ tel que $P'\left(\mu_j\right) = 0$, ce qui donne $p - 1$ racines réelles supplémentaires pour P'. On a donc un total de $n - 1$ racines réelles pour P' et les μ_j sont nécessairement simples. En particulier les racines de P' sont réelles et contenues dans l'intervalle $[\lambda_p, \lambda_1]$.

Remarque 1.4 *De manière plus générale, si P est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors les racines du polynôme dérivé P' sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P (théorème de Lucas).*

I.1.2. Le raisonnement qui précède nous montre que pour $0 \leq k \leq n-1$ les racines de $P^{(k)}$ sont dans l'intervalle $[\lambda_p, \lambda_1]$. On en déduit alors que $P^{(k)}$ est de signe constant sur $]\lambda_1, +\infty[$. Soit avec $a_n = 1$, $P^{(k)}(x) > 0$ pour $x > \lambda_1$ et $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Pour $k = n$, on a $P^{(n)}(x) = n! > 0$.

I.2.

I.2.1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} Q(x), \\ P'(x) = (x-\lambda_1)^{m_1-1} R(x), \end{cases}$$

avec $Q(\lambda_1) \neq 0$ et $R(\lambda_1) \neq 0$. La fonction g est donc définie par :

$$\forall x \geq \lambda_1,\ g(x) = x - (x-\lambda_1)\frac{Q(x)}{R(x)}$$

et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\lambda_1, +\infty[$ s'en déduit facilement.

I.2.2. Pour $x > \lambda_1$, on a $\dfrac{P(x)}{P'(x)} > 0$ et $g(x) < x$.

De $g'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{(P'(x))^2} > 0$ pour $x > \lambda_1$, on déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[\lambda_1, +\infty[$ et la condition $x > \lambda_1$ entraîne $g(x) > g(\lambda_1) = \lambda_1$.

Remarque 1.5 *On peut aussi utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2 pour écrire :*

$$\forall x > \lambda_1,\ 0 = P(\lambda_1) = P(x) + (\lambda_1 - x)P'(x) + \frac{(\lambda_1 - x)^2}{2}P''(c_x),$$

avec $c_x \in]\lambda_1, x[$. On en déduit alors que :

$$\forall x > \lambda_1,\ g(x) - \lambda_1 = \frac{(\lambda_1 - x)^2}{2}\frac{P''(c_x)}{P'(x)} > 0.$$

I.2.3. Des inégalités établies en **I.2.2.** on déduit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie (l'intervalle $[\lambda_1, +\infty[$ est stable par g) et :

$$\forall k \geq 0,\ \lambda_1 < x_{k+1} < x_k,$$

c'est-à-dire que cette suite est strictement décroissante et minorée. Elle converge donc et sa limite est λ_1 (λ_1 est l'unique point fixe de la fonction g continue sur le fermé $[\lambda_1, +\infty[$).

Remarque 1.6 *La détermination d'un réel $b > \lambda_1$ peut se faire en utilisant le résultat suivant :*
Pour toute racine λ du polynôme P, on a :

$$|\lambda| \leq \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}.$$

En effet si $P(\lambda) = 0$, alors :

$$|\lambda|^n = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \, |\lambda|^i$$

et pour $|\lambda| > 1$ on obtient :

$$|\lambda| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|\lambda|^{n-i}} \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \, .$$

I.2.4. Pour tout $x > \lambda_1$, on a :

$$1 - g'(x) = \frac{P'(x)^2 - P(x) P''(x)}{(P'(x))^2} = \frac{-\left(\frac{P'}{P}\right)'(x)}{\left(\frac{P'}{P}\right)^2(x)},$$

c'est-à-dire avec $P(x) = \prod_{j=1}^{p} (x - \lambda_j)^{m_j}$ et $P'(x) = \sum_{j=1}^{p} m_j \frac{P(x)}{x - \lambda_j}$:

$$1 - g'(x) = \frac{\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x - \lambda_j)^2}}{\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x - \lambda_j}\right)^2}.$$

I.2.5. Avec l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on peut écrire :

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\sqrt{m_j}}{x - \lambda_j} \sqrt{m_j}\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x - \lambda_j)^2} \sum_{j=1}^{p} m_j = n \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x - \lambda_j)^2}.$$

Remarque 1.7 *On peut également utiliser la convexité de la fonction $t \mapsto t^2$. Ce qui donne :*

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{n} \frac{1}{x - \lambda_j}\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{n} \frac{1}{(x - \lambda_j)^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x - \lambda_j)^2}.$$

I.2.6. En **I.2.2.** on a déjà montré que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in]\lambda_1, +\infty[$.
On peut aussi écrire, pour $x > \lambda_1$, que :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x-\lambda_j}\right)^2 &= \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j^2}{(x-\lambda_j)^2} + 2 \sum_{1\leq i<j\leq p} \frac{m_i m_j}{(x-\lambda_i)(x-\lambda_j)} \\ &> \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x-\lambda_j)^2},\end{aligned}$$

($m_j \in \mathbb{N}^*$) et on déduit de l'égalité (1.2) que $g'(x) > 0$ pour tout x dans $]\lambda_1, +\infty[$.
De (1.2) et (1.3) on déduit que $g'(x) \leq 1 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $x \in]\lambda_1, +\infty[$.

Remarque 1.8 *L'égalité $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{n}$ est réalisée si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ce qui est réalisé si et seulement si $\dfrac{\sqrt{m_j}}{x-\lambda_j} = \mu_x \sqrt{m_j}$ avec $\mu_x > 0$, ce qui équivaut à dire que tous les λ_j sont égaux et qui est en contradiction avec l'hypothèse $p \geq 2$. On a donc en réalité $g'(x) < 1 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $x > \lambda_1$.*

I.2.7. On suppose ici qu'on a isolé la racine λ_1 dans un intervalle $[a, b[$.
Du fait que la fonction g est strictement croissante sur $[\lambda_1, +\infty[$ on déduit que $x_k > \lambda_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si $x_0 = b > \lambda_1$. En utilisant le théorème des accroissements finis et les inégalités établies en **I.2.6.** on déduit que :

$$\forall k \geq 0,\ 0 < x_{k+1} - \lambda_1 = g(x_k) - g(\lambda_1) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x_k - \lambda_1)$$

et par récurrence :

$$\forall k \geq 0,\ 0 < x_k - \lambda_1 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k (x_0 - \lambda_1).$$

Donc :

$$\forall k \geq 0,\ 0 < x_k - \lambda_1 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k (b - a).$$

Remarque 1.9 *Avec le théorème des accroissements finis, on a :*

$$\forall k \geq 0,\ 0 \leq x_k - \lambda_1 \leq M_1^k (x_0 - \lambda_1)$$

où $M_1 = \sup_{x\in[\lambda_1,x_0]} |g'(x)|$*. En tenant compte de* $g'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2}$*, on déduit que dans le cas où* λ_1 *est une racine simple de* P*, on a* $g'(\lambda_1) = 0$ *et la convergence est d'autant plus rapide que* x_0 *est proche de* λ_1*. De manière plus générale, on a* $g'(\lambda_1) = 1 - \dfrac{1}{m_1}$*, la convergence étant plus rapide si* λ_1 *est une racine simple de* P*.*
En divisant P *par le* pgcd *de* P *et* P'*, on se ramène à un polynôme qui a les mêmes racines que* P*, ces dernières étant simples.*

I.3.

I.3.1. On a :

$$P_{m-1}(X) = \prod_{i=m}^{n} (X - \rho_i).$$

Si $m = n$ il n'y a rien à faire et pour $m < n$, comme en **I.2.3.** on montre que la suite $\left(x_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant strictement vers ρ_m.

I.3.2. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{m-1}(x) \prod_{k=1}^{m-1} (x - \rho_k) = P(x)$$

et en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'_{m-1}(x) \prod_{k=1}^{m-1} (x - \rho_k) + P_{m-1}(x) \sum_{k=1}^{m-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m-1} (x - \rho_j) = P'(x).$$

En écrivant, pour tout réel x :

$$\prod_{k=1}^{m-1} (x - \rho_k) = \frac{P(x)}{P_{m-1}(x)},\ P_{m-1}(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m-1} (x - \rho_j) = \frac{P(x)}{x - \rho_k},$$

(les fonctions de droite dans ces égalités se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$) on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'_{m-1}(x) \frac{P(x)}{P_{m-1}(x)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{P(x)}{x - \rho_k} = P'(x).$$

Les fonctions P_{m-1} et P'_{m-1} ne s'annulant jamais sur $]\rho_m, +\infty[$, on peut écrire :

$$\forall x > \rho_m,\ \frac{P'_{m-1}(x)}{P_{m-1}(x)} P(x) = P'(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{P(x)}{x - \rho_k},$$

ou encore :

$$\forall x > \rho_m, \ \frac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)} = \frac{P(x)}{P'(x) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{P(x)}{x-\rho_j}}.$$

Cette écriture permet la programmation de la suite $\left(x_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ en utilisant la donnée des coefficients de P et les approximations obtenues aux étapes précédentes des $m-1$ premières racines.

Remarque 1.10 *Pour accélérer la convergence, on considère tout d'abord la suite $\left(y_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{cases} y_0^{(m)} = b_m, \\ y_{n+1}^{(m)} = y_n^{(m)} - 2\dfrac{P_{m-1}\left(y_n^{(m)}\right)}{P'_{m-1}\left(y_n^{(m)}\right)}, \ (n \geq 0). \end{cases}$$

On utilise cette suite tant que $y_{n+1}^{(m)} < y_n^{(m)}$, puis dès que $y_{n+1}^{(m)} \geq y_n^{(m)}$ pour un indice n_0, on utilise la suite $\left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $y_{n_0}^{(m)}$ comme point de départ.

On a donc en définitive la programmation structurée suivante :

Procédure Newton-Maehly (Entrée p : Entier ; P : Polynôme ;
Sortie ρ : Vecteur) ;

Début
$\alpha_0 = \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}$;
Pour m Allant de 1 à p Faire
Début
$y_0 = \alpha_0$; $U = P(y_0)$; $y_1 = y_0 - 1$; $y = y_0$;
Tant que ($|U| > \varepsilon$) et $(y_1 < y)$ faire
Début
$S = 0$;
Pour j Allant de 1 à $m-1$ Faire
Début
$S = S + \dfrac{1}{y_0 - \rho_j}$;
Fin ;
$V = P'(y_0)$;
$y_1 = y_0 - 2\dfrac{U}{V - US}$;

$y = y_0$; $y_0 = y_1$; $U = P(y_0)$;
Fin ;
$x_0 = y_0$; $U = P(y_0)$;
Tant que ($|U| > \varepsilon$) faire
Début
$S = 0$;
Pour j Allant de 1 à $m-1$ Faire
Début
$S = S + \dfrac{1}{x_0 - \rho_j}$;
Fin ;
$V = P'(x_0)$;
$x_1 = x_0 - \dfrac{U}{V - US}$;
$x_0 = x_1$; $U = P(x_0)$;
Fin ;
$\rho_m = x_0$;
Fin ;
Fin ;

– II – Quelques propriétés des fonctions symétriques élémentaires

II.1.

II.1.1. On a :

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n,0}(\lambda) = \sigma_{n-1,0}(\lambda') = 1,\\
&\sigma_{n,k}(\lambda) = \sigma_{n-1,k}(\lambda') + \lambda_n \sigma_{n-1,k-1}(\lambda') \ (1 \leq k \leq n-1),\\
&\sigma_{n,n}(\lambda) = \lambda_n \sigma_{n-1,n-1}(\lambda').
\end{aligned} \tag{1.10}$$

II.1.2. Pour $n = 1$, on a $\varphi_1(\lambda) = X - \lambda_1$, $\sigma_{1,0}(\lambda) = 1$ et $\sigma_{1,1}(\lambda) = \lambda_1$.
Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$.
On note $\lambda' = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$, $\lambda = (\lambda', \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et en écrivant que $\varphi_n(\lambda) = \varphi_{n-1}(\lambda')(X - \lambda_n)$, on obtient :

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{n,k} X^{n-k}$$

où on a noté :

$$\varphi_{n,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ (-1)^k \left(\sigma_{n-1,k}(\lambda') + \sigma_{n-1,k-1}(\lambda')\lambda_n\right) \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ (-1)^n \sigma_{n-1,n-1}(\lambda')\lambda_n \text{ si } k = n \end{cases}$$

On conclut alors avec les identités (1.10).

II.2. La continuité de φ_n se déduit de la continuité des fonctions $\sigma_{n,k}$ (somme de produits de fonctions continues).

II.3.

II.3.1. Tous les λ_k étant non nuls $(1 \leq k \leq n)$, on déduit que :

$$a_0 = P(0) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0.$$

II.3.2. On a :

$$Q(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k,$$

donc :

$$b_k = a_{n-k} \ \ (0 \leq k \leq n).$$

II.3.3. On a $Q(x) = 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (pour $x = 0$, on a $Q(0) = b_0 = a_n = 1$). On déduit alors que $\frac{1}{a_0} Q = \varphi(\delta)$ avec $\delta = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

II.3.4. On a, pour $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}
&b_{n-k} = a_k, \\
&a_k = (-1)^{n-k} \sigma_{n,n-k}(\lambda), \\
&\frac{b_{n-k}}{b_n} = (-1)^k \sigma_{n,k}(\delta), \\
&b_n = a_0 = (-1)^n \sigma_{n,n}(\lambda).
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\sigma_{n,k}(\delta) = \frac{(-1)^k a_k}{a_0} = \frac{\sigma_{n,n-k}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}.$$

II.4.

II.4.1. Le polynôme P a toutes ses racines réelles et on a vu en partie **I** (question **I.1.1.**) qu'il en est de même du polynôme dérivé P'. L'existence de $\mu' \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\frac{1}{n} P' = \varphi_{n-1}(\mu')$ en résulte alors.

II.4.2. On a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k}$$

et :

$$\frac{1}{n}P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n} \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k-1}.$$

Mais on peut aussi écrire que :

$$\frac{1}{n}P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\mu') X^{n-1-k}.$$

En identifiant les coefficients de X^{n-1-k}, pour $0 \leq k \leq n-1$, on obtient :

$$\sigma_{n,k}(\lambda) = \frac{n}{n-k} \sigma_{n-1,k}(\mu').$$

II.5.

II.5.1. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n} \lambda_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n\lambda_i^2 = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

L'égalité étant réalisée si et seulement si tous les λ_i sont égaux.

Remarque 1.11 *On peut également utiliser la convexité de la fonction $t \mapsto t^2$. Ce qui donne :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \lambda_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \lambda_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

II.5.2. On a :

$$(\sigma_{n,1}(\lambda))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2\sigma_{n,2}(\lambda)$$

et :

$$0 \leq n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 = (n-1)(\sigma_{n,1}(\lambda))^2 - 2n\sigma_{n,2}(\lambda).$$

L'égalité étant réalisée si et seulement si tous les λ_i sont égaux.

Remarque 1.12 *On peut aussi utiliser la formule de Kœnig-Huygens pour la variance :*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 \geq 0,$$

qui donne en termes de fonctions symétriques élémentaires :

$$\frac{1}{n}\left(\left(\sigma_{n,1}(\lambda)\right)^2 - 2\sigma_{n,2}(\lambda)\right) - \frac{1}{n^2}\left(\sigma_{n,1}(\lambda)\right)^2 \geq 0.$$

C'est-à-dire :

$$(n-1)\left(\sigma_{n,1}(\lambda)\right)^2 - 2n\sigma_{n,2}(\lambda) \geq 0.$$

II.6. Si il existe un indice $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que $\lambda_j = 0$ alors $\sigma_{n,n}(\lambda) = 0$ et l'inégalité (1.7) est vérifiée. Avec $\sigma_{n,n-1}(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i$ on déduit que l'égalité est réalisée si et seulement si il existe un indice $i \neq j$ tel que $\lambda_i = 0$.

On suppose maintenant que $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. En utilisant (1.5), on peut écrire que :

$$\frac{\sigma_{n,n-1}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)} = \sigma_{n,1}(\delta), \quad \frac{\sigma_{n,n-2}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)} = \sigma_{n,2}(\delta),$$

où on a posé $\delta = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$ et l'inégalité (1.6) appliquée à δ donne :

$$(n-1)\left(\frac{\sigma_{n,n-1}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}\right)^2 - 2n\frac{\sigma_{n,n-2}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)} \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$(n-1)\left(\sigma_{n,n-1}(\lambda)\right)^2 - 2n\sigma_{n,n-2}(\lambda)\,\sigma_{n,n}(\lambda) \geq 0,$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si tous les λ_i sont égaux.

II.7. On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, il s'agit de montrer que $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 \geq 0$, ce qui équivaut à $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 2$ l'égalité étant réalisée, pour $1 \leq k \leq n-2$, si et seulement si les deux membres sont nuls ou si tous les λ_i sont égaux. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^n$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Le polynôme $P = \varphi_n(\lambda)$ a toutes ses racines réelles. En **I.1.1.** on a montré que $Q = \frac{1}{n}P'$ admet $n-1$ racines réelles $\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \cdots \geq \mu'_{n-1}$ telles que $\lambda_{i+1} \leq \mu'_i \leq \lambda_i$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n-1$. En utilisant le résultat de **II.4.2.** on a :

$$\sigma_{n,k}(\lambda) = \frac{n}{n-k}\sigma_{n-1,k}\left(\mu'\right) \;\; (0 \leq k \leq n-1)$$

où on a noté $\mu' = (\mu'_1, \cdots, \mu'_{n-1})$. Avec l'hypothèse de récurrence on a, pour k compris entre 1 et $n-2$:

$$\left(\sigma_{n-1,k}\left(\mu'\right)\right)^2 - \frac{n-k}{n-1-k}\frac{k+1}{k}\sigma_{n-1,k-1}\left(\mu'\right)\sigma_{n-1,k+1}\left(\mu'\right) \geq 0.$$

On en déduit alors :

$$\left(\sigma_{n,k}\left(\lambda\right)\right)^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k}\sigma_{n,k-1}\left(\lambda\right)\sigma_{n,k+1}\left(\lambda\right) \geq 0 \ \ (1 \leq k \leq n-2).$$

Pour $k = n-1$ c'est l'inégalité (1.7).
Si les λ_i ne sont pas tous identiques, il en est de même des λ'_i et les inégalités sont strictes ou réduites à $0 = 0$.

– III – Un résultat de continuité des racines d'un polynôme comme fonctions des coefficients

III.1. On peut prendre :

$$0 < r < \min_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{2}.$$

III.2. Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a $P'(\lambda_k) \neq 0$ (λ_k est racine simple de P) avec P' continue sur $\mathbb{R}$. On peut donc trouver $r_k \in]0, r[$ tel que $P'(x)$ soit non nul pour tout x dans $J_k = [\lambda_k - r_k, \lambda_k + r_k] \subset I_k$. Sur J_k la fonction P est donc strictement monotone avec $P(\lambda_k) = 0$ et on a nécessairement $P(\lambda_k - r_k) P(\lambda_k + r_k) < 0$.

III.3.

III.3.1. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ de dimension finie les normes $Q \mapsto \|Q\|$ et $Q \mapsto \sup\limits_{x \in [a,b]} |Q(x)|$ sont équivalentes. D'où l'existence de β.

Remarque 1.13 *On peut aussi écrire pour* $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$ *:*

$$\forall x \in [a,b], \ |Q(x)| \leq \|Q\| \sum_{k=0}^{n} |x|^k \leq \beta \|Q\|$$

où $\beta = \sup\limits_{x \in [a,b]} \sum\limits_{k=0}^{n} |x|^k$.

III.3.2.

a. On a :

$$\sup_{x\in[a,b]} |Q(x) - P(x)| \leq \beta \|Q - P\| < \alpha,$$

donc :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ P(x) - \alpha < Q(x) < P(x) + \alpha.$$

Supposons, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, que $P(a_k) < 0$ et $P(b_k) > 0$. On a alors :

$$\begin{cases} \alpha \leq |P(a_k)| = -P(a_k)\,, \\ \alpha \leq |P(b_k)| = P(b_k) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} Q(a_k) < P(a_k) + \alpha \leq 0, \\ Q(b_k) > P(b_k) - \alpha \geq 0. \end{cases}$$

b. Avec, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, $Q(a_k)\,Q(b_k) < 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires on déduit qu'il existe t_k compris entre a_k et b_k, donc dans I_k, tel que $Q(t_k) = 0$. Les intervalles I_k étant deux à deux disjoints on en déduit que Q a n racines réelles distinctes.

– IV – Inégalités de Newton

IV.1. En posant $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned} &a_k = (-1)^{n-k}\,\sigma_{n,n-k}(\lambda)\,, \\ &a_k^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k}a_{k-1}a_{k+1} \\ &= (\sigma_{n,n-k}(\lambda))^2 - \frac{k+1}{k}\frac{n-k+1}{n-k}\sigma_{n,n-k-1}(\lambda)\,\sigma_{n,n-k+1}(\lambda) \end{aligned}$$

et les inégalités (1.8) (pour $n-k$) sont équivalentes à :

$$a_k^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k}a_{k-1}a_{k+1} \geq 0 \ \ (1 \leq k \leq n-1)\,.$$

L'égalité est réalisée si et seulement si les deux membres de $(R2)$ sont nuls ou si tous les λ_i sont identiques.

IV.2. *Etude d'un exemple*

IV.2.1. L'inégalité $(R2)$ pour $k = 2$ équivaut à $a \leq 0$. Pour $a = 0$, le polynôme P a 4 racines complexes non réelles et -1 pour unique racine réelle. On a donc $a < 0$ si P a 5 racines réelles.

IV.2.2.

a. Pour $k=1$ et $k=3$ les inégalités $(R2)$ traduisent $a^2 \geq 0$ et pour $k=2$ et $k=4$ elles traduisent $a \leq 0$.

b. On a $P\left(\frac{1}{b}X\right) = \frac{1}{b^5}R(X)$ et donc P a 5 racines réelles si et seulement si R a 5 racines réelles.

c. Les zéros de $S'(X) = 5X^4 - 15X^2 + 1$ sont $\pm\alpha_1$ et $\pm\alpha_2$ où :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{\frac{41}{5}}},\ \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3-\sqrt{\frac{41}{5}}}.$$

On a :

$$\gamma_1 = S(-\alpha_1) = \alpha_1\beta_1,\ \gamma_2 = S(\alpha_2) = \alpha_2\beta_2,$$

avec :

$$\beta_1 = \frac{11}{5} + \sqrt{\frac{41}{5}},\ \beta_2 = \sqrt{\frac{41}{5}} - \frac{11}{5}.$$

et

$$S(\alpha_2) < S(-\alpha_1).$$

d. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	α_2	α_1 $\quad +\infty$
S'	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$
S	$-\infty$ $\nearrow$	γ_1 $\searrow$	$-\gamma_2$ $\nearrow$	γ_2 $\searrow$	$-\gamma_1$ $\nearrow$ $+\infty$

Le polynôme P a 5 racines réelles distinctes si et seulement si l'équation $S(x) = -b^5$ a 5 racines réelles, ce qui équivaut à :

$$b^5 < \min(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_2,$$

ou encore à :

$$a < -\frac{1}{(\gamma_2)^{\frac{2}{5}}} = -\frac{1}{(S(\alpha_2))^{\frac{2}{5}}} \simeq -2.015891513.$$

IV.3.

IV.3.1. Si $a_{k-1}a_{k+1} \leq 0$ il n'y a rien à montrer. Pour les autres cas, il suffit de montrer que pour tout réel a strictement positif, on a :

$$a - 4 > 0 \ \Rightarrow\ a - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k} \geq 0$$

pour tout k compris entre 1 et $n-1$. Ce qui se déduit immédiatement de :

$$4-\frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k}\geq 0$$

pour tout k compris entre 1 et $n-1$.

IV.3.2. Pour $n=2$ on a $P(X)=a_0+a_1X+X^2$ avec $\Delta=a_1^2-4a_0>0$ et P admet deux racines réelles distinctes.

IV.3.3. On a $Q(X)=P(X)-a_0=XR(X)$ où $R(X)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}b_kX^k$ avec $b_k=a_{k+1}$ et :

$$b_k^2-4b_{k-1}b_{k+1}=a_{k+1}^2-4a_ka_{k+2}>0 \ \ (1\leq k\leq n-2).$$

Avec l'hypothèse de récurrence, on déduit alors que R admet $n-1$ racines réelles simples. De plus, on a $R(x)\geq a_1>0$ pour tout $x\geq 0$. On en conclut alors que Q admet n racines réelles simples, la plus grande étant 0.

IV.3.4. On a $N_0=n$.

IV.3.5. Soient $0=t_1>t_2>\cdots>t_n$ les n racines réelles de Q et $m=\inf\limits_{[t_n,t_1]}Q(x)<0$. Pour $t>-m$ et $x\in[t_n,t_1]$ on a $Q(x)+t\geq m+t>0$ et sur $]-\infty,t_n[$ [resp. sur $]t_1,+\infty[$] la fonction Q est strictement monotone donc l'équation $Q(x)+t$ a au plus une racine. On a donc $N_t<n$ pour $t>-m$ et $S\neq\emptyset$.

S admet une borne inférieure $\alpha\geq 0$ comme partie non vide et minorée de $\mathbb{R}^+$.

IV.3.6. Le polynôme Q_0 a n racines réelles. Avec le résultat $(R1)$ on déduit alors qu'il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que pour tout $t\in\,]0,\varepsilon[$ le polynôme Q_t a également n racines réelles distinctes, c'est-à-dire que $N_t=n$. On déduit donc que $\alpha>0$.

IV.3.7. En utilisant le résultat $(R1)$ on voit que si $N_\alpha=n$ on peut alors trouver un réel $\varepsilon>0$ tel que pour tout $t\in[\alpha,\alpha+\varepsilon[$ le polynôme Q_t a n racines réelles distinctes, c'est-à-dire que $[\alpha,\alpha+\varepsilon[\,\cap\, S=\emptyset$ ce qui est en contradiction avec la définition de la borne inférieure α. On a donc $N_\alpha<n$.

IV.3.8.

a. Par définition de la borne inférieure α le polynôme Q_t a n racines réelles distinctes pour tout $t\in[0,\alpha[$.

De $\lim\limits_{|x|\to+\infty}|Q(x)|=+\infty$ on déduit qu'il existe un réel $M>0$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus[-M,M]\,,\ |Q(x)|>\alpha.$$

Pour $t \in [0, \alpha[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ racine de Q_t, on a :

$$|Q(\lambda)| = |-t| = t < \alpha$$

et nécessairement $\lambda \in [-M, M]$.
De plus en utilisant $(R1)$ on a :

$$\forall x \geq 0,\ Q_t(x) = Q(x) + t \geq t > 0$$

et en conséquence $\lambda \in [-M, 0]$.

b. La suite $(\delta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $[-M, 0]^n \subset \mathbb{R}^n$. On peut donc en extraire une sous suite convergente.

c. On a, du fait de la continuité de φ_n :

$$Q_{t_{\sigma(p)}} = \varphi_n\left(\delta_{\sigma(p)}\right) \underset{p\to+\infty}{\to} \varphi_n(\delta) = R.$$

d. On a :

$$Q_{t_{\sigma(p)}} = Q + t_{\sigma(p)} \underset{p\to+\infty}{\to} Q + \alpha = Q_\alpha$$

et en conséquence $Q_\alpha = R$.

e. Les racines de Q_α sont les $\delta_k = \lim\limits_{p\to+\infty} \delta_{k,\sigma(p)}$ avec $\delta_{k,\sigma(p)} \leq 0$. On a donc $\delta_k \leq 0$. De $Q_\alpha(0) = \alpha > 0$ on déduit que $\delta_k < 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Enfin de $N_\alpha < n$ on déduit que l'une des racines de Q_α est de multiplicité supérieure ou égale à 2.

f. En notant $Q_\alpha(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a'_k X^k$ ($a'_k = a_k$ pour $1 \leq k \leq n$ et $a'_0 = \alpha$) et en utilisant le résultat $(R3)$ on déduit qu'il existe un indice k compris entre 1 et $n-1$ tel que $a'^2_k - 4a'_{k-1}a'_{k+1} \leq 0$. Si $k \geq 2$ on est en contradiction avec l'hypothèse $(H2)$ donc $k = 1$ et :

$$a_1^2 - 4\alpha a_1 = a'^2_1 - 4a'_0 a'_1 \leq 0.$$

Si $\alpha \leq a_0$ alors :

$$a_1^2 - 4a_0 a_1 \leq a_1^2 - 4\alpha a_1 \leq 0$$

ce qui est encore en contradiction avec l'hypothèse $(H2)$.
On a donc nécessairement $\alpha > a_0$ et $N_{a_0} = n$, c'est-à-dire que $P = Q + a_0$ a n racines réelles.

IV.4. Le polynôme :

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 1$$

admet deux racines complexes non réelles et l'hypothèse $(H2)$ est quand même vérifiée.

IV.5.

IV.5.1. Pour $0 < \gamma < 4$ on peut trouver des réels $a_0 > 0$ et $a_1 > 0$ tels que :

$$\gamma a_0 < a_1^2 < 4a_0$$

Le polynôme $P(X) = X^2 + a_1 X + a_0$ a deux racines complexes non réelles et vérifie $(H3)$.

IV.5.2. On a :

$$\begin{aligned}
\theta(P_t, 1) &= \frac{(b_1 + tb_0)^2}{b_0 (b_2 + tb_1)}, \\
\theta(P_t, k) &= \frac{(b_k + tb_{k-1})^2}{(b_{k-1} + tb_{k-2})(b_{k+1} + tb_k)} \ (2 \leq k \leq n-2), \\
\theta(P_t, n-1) &= \frac{(b_{n-1} + tb_{n-2})^2}{(b_{n-2} + tb_{n-3})(tb_{n-1})},
\end{aligned}$$

avec $b_k > 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. On déduit alors que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to +\infty} \theta(P_t, k) = \theta(B, k-1) \ (2 \leq k \leq n-1), \\
&\lim_{t \to +\infty} \theta(P_t, 1) = +\infty.
\end{aligned}$$

IV.5.3. Pour $t > 0$ assez grand on aura $\theta(P_t, k) > \gamma$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$, c'est-à-dire que le polynôme P_t vérifie les hypothèses $(H1)$ et $(H3)$ et il admet des racines complexes non réelles (celles de B).

1.3 Démonstration de $(R3)$

On vérifie d'abord le résultat pour $n = 2$.

Pour $n = 2$, le résultat provient du fait que si P admet une racine réelle double alors son discriminant $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$ est nul.

On vérifie ensuite le résultat pour $n = 3$.

Pour $n = 3$, on a :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + X^3 = (X + a)^2 (X + b)$$

avec $a > 0$, $b > 0$ et :

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\sigma_3 = a^2 b, \\
a_1 &= \sigma_2 = a^2 + 2ab, \\
a_2 &= -\sigma_1 = 2a + b.
\end{aligned}$$

Supposons que $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$ et $a_2^2 - 4a_1a_3 > 0$. On a alors $a^3 (a - 4b) > 0$ et $b (b - 4a) > 0$, soit en tenant compte de la positivité de a et b, $b - 4a > 0$ et $x_2 - 4x_1 > 0$. Ce qui donne $b > 4a > 16b > 0$, c'est-à-dire une impossibilité.

On suppose pour la suite que $n > 3$ et on utilise la factorisation :

$$P(X) = (X+a)^2 \sum_{k=0}^{n-2} b_k X^k.$$

On note également :

$$b_{-2} = b_{-1} = b_{n-1} = b_n = 0.$$

On a alors $a_k \geq 0$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$ et $b_k \geq 0$ pour $k \in \{0, \cdots, n-2\}$.

En notant $-x_3, \cdots, -x_p$ les autres racines réelles strictement négatives de P avec $x_i > 0$, on a :

$$P(X) = (x+a)^2 \prod_{i=3}^{n} (X + x_i).$$

Il en résulte que tous les coefficients de P et ceux de Q sont strictement positifs.

On exprime ensuite chaque coefficient a_k $(0 \leq k \leq n)$ en fonction de a et des coefficients b_j $(0 \leq j \leq n)$.

On a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (X+a)^2 \sum_{k=0}^{n-2} b_k X^k.$$

Par identification des coefficients de X^k pour $0 \leq k \leq n$, on déduit que :

$$a_k = b_{k-2} + 2ab_{k-1} + a^2 b_k \ \ (0 \leq k \leq n),$$

où on a posé $b_i = 0$ pour $i < 0$ et $i > n-2$.

On note :

$$\begin{aligned}
\delta_k &= a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} \ \ (1 \leq k \leq n-1), \\
p_k &= ab_k - 4b_{k-1} \ \ (0 \leq k \leq n-1), \\
q_k &= b_{k-1} - 4ab_k \ \ (0 \leq k \leq n-1).
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, δ_k peut s'écrire sous la forme :

$$\delta_k = a^3 b_k p_k + b_{k-2} q_{k-1} - r_k,$$

avec $r_k > 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\delta_k = a_k^2 - 4a_{k-1}a_{k+1} &= \left(b_{k-2} + 2ab_{k-1} + a^2 b_k\right)^2 \\
&- 4\left(b_{k-3} + 2ab_{k-2} + a^2 b_{k-1}\right)\left(b_{k-1} + 2ab_k + a^2 b_{k+1}\right)
\end{aligned}$$

et en développant on obtient :

$$\begin{aligned}\delta_k &= a^4b_k^2 + b_{k-2}^2 - 4a^3b_kb_{k-1} - 4ab_{k-1}b_{k-2} - r_k \\ &= a^3b_k\left(ab_k - 4b_{k-1}\right) + b_{k-2}\left(b_{k-2} - 4ab_{k-1}\right) - r_k \\ &= a^3b_kp_k + b_{k-2}q_{k-1} - r_k\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}r_k &= 14a^2b_kb_{k-2} + 8a^3b_{k+1}b_{k-2} + 4a^2b_{k+1}b_{k-3} \\ &\quad + 8ab_kb_{k-3} + 4b_{k-3}b_{k-1} + 4a^4b_{k-1}b + 1 > 0.\end{aligned}$$

On suppose que $\delta_k > 0$ pour tout $k \in \{2, \cdots, n-1\}$. On a alors $q_{n-2} > 0$.

On a :

$$\delta_{n-1} = a^3b_{n-1}p_{n-1} + b_{n-3}q_{n-2} - r_{n-1} \geq 0,$$

avec $b_{n-1} = 0$, $b_{n-3} > 0$ et $r_{n-1} > 0$. Il en résulte que :

$$q_{n-2} = b_{n-3} - 4ab_{n-2} > 0.$$

On en déduit ensuite le signe de p_{n-2}, celui de q_{n-3} puis les signes des quantités p_k $(k = 1, \cdots, n-1)$.

On a :

$$ab_{n-2} < \frac{1}{4}b_{n-3},$$

donc :

$$p_{n-2} = ab_{n-2} - 4b_{n-3} < -\frac{15}{4}b_{n-3} < 0.$$

Puis de :

$$\delta_{n-2} = a^3b_{n-2}p_{n-2} + b_{n-4}q_{n-3} - r_{n-2} \geq 0,$$

avec $a > 0$, $b_{n-2} > 0$, $p_{n-2} < 0$, $b_{n-4} > 0$ et $r_{n-2} > 0$ on déduit que :

$$q_{n-3} = b_{n-4} - 4ab_{n-3} > 0.$$

On montre alors par récurrence que :

$$p_k < 0,\ q_k > 0\ \left(1 \geq k \leq n-2\right).$$

On a déjà $p_{n-2} < 0$ et $q_{n-2} > 0$. Supposons que $p_k < 0$ et $q_k > 0$ pour $k \in \{2, \cdots, n-2\}$. De :

$$\delta_k = a^3b_kp_k + b_{k-2}q_{k-1} - r_k > 0,$$

avec $a > 0$, $b_k > 0$, $p_k < 0$, $b_{k-1} > 0$ et $r_k > 0$ on déduit que :

$$q_{k-1} = b_{k-2} - 4ab_{k-1} > 0,$$

puis :

$$p_{k-1} = ab_{k-1} - 4b_{k-2} < -\frac{15}{4}b_{k-2} < 0.$$

On montre ensuite que $\delta_1 > 0$.

On a :

$$\delta_1 = a^3 b_1 p_1 + b_{-1} q_0 - r_1 = a^3 b_1 p_1 - r_1,$$

avec $a > 0$, $b_1 > 0$, $p_1 < 0$ et $r_1 > 0$. Il en résulte que $\delta_1 < 0$.

Enfin on déduit le résultat $(R3)$ pour tout $n > 3$.

S'il existe $k \in \{2, \cdots, n-2\}$ tel que $\delta_k \leq 0$ alors $(R3)$ est vérifié et sinon on a vu que nécessairement $\delta_1 < 0$ et $(R3)$ est encore vérifié.

Chapitre 2

CAPES externe 2000, épreuve 1

2.1 Énoncé

Notations et objectif du problème

On note $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels et, pour* p et q éléments de $\mathbb{N}$ vérifiant $p \leq q$:

$$[p, q] = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ et } p \leq m \text{ et } m \leq q\}$$

On note également :

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;

$\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.

La lettre n désignant un nombre entier naturel, on note :

$\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

Quel que soit le polynôme P *appartenant à* $\mathbb{R}[X]$ *que l'on considère, on identifie dans tout le problème le polynôme* P *et la fonction* $x \mapsto P(x)$ *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *qui lui est naturellement associé.*

La lettre k désignant un entier naturel et la lettre I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, on note $\mathcal{C}^k(I)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des applications f de I vers $\mathbb{R}$ k fois dérivables sur I et de dérivée k-ème continue.

En particulier, $\mathcal{C}^0(I)$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des applications f de I vers $\mathbb{R}$ continues sur I.

Si f est une application d'un ensemble J contenant I vers $\mathbb{R}$ et que la restriction de f à I appartient à $\mathcal{C}^k(I)$, on peut considérer que f appartient à $\mathcal{C}^k(I)$.

Soit I un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$, appelé segment.

Si f est un élément quelconque de $\mathcal{C}^0(I)$, on appelle norme infinie de f le réel :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|$$

On rappelle que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ de $\mathcal{C}^0(I)$ vers $\mathbb{R}$ est une norme (appelée norme infinie ou norme de la convergence uniforme) et que, muni de cette norme, $\mathcal{C}^0(I)$ est une algèbre de Banach.

On admet le théorème de Weierstrass-Stone :

L'intervalle I de $\mathbb{R}$ étant fermé, borné et non vide, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$, pour tout réel strictement positif ε, il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P\|_\infty \leq \varepsilon$.

Enfin, si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et si u est un endomorphisme continu de E, on note $|||u|||$ la norme « subordonnée » de u, soit :

$$|||u||| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|u(x)\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Le principal objectif de ce problème est d'exposer le principe de certaines méthodes d'intégration approchée généralement dénommées « quadratures de Gauss ».

– I – Étude d'une suite de polynômes orthogonaux : les polynômes de Legendre

I.1. Quel que soit l'entier naturel n, on définit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$L_n : t \mapsto \frac{d^n}{dt^n}\left(t^2-1\right)^n$$

En particulier, L_0 est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ constante de valeur 1.

I.1.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, L_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant.

I.1.b. Expliciter L_1, L_2 et L_3.

I.1.c. Préciser, pour tout entier naturel n, la parité de L_n.

I.1.d. Soit n un entier naturel. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$ (on pourra utiliser la formule de Leibniz).

I.2. Le couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ étant quelconque, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

I.2.a. Montrer que la fonction $(f, g) \mapsto\mapsto \langle f, g\rangle$ de $\mathcal{C}^0([-1,1]) \times \mathcal{C}^0([-1,1])$ vers $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

Notons qu'il s'ensuit que l'application $f \mapsto \|f\|_2$ est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire et que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien (séparé).

Sauf mention contraire, on considère dans la suite de la partie I que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est muni de ce produit scalaire.

I.2.b. L'entier naturel n étant non nul, on considère la fonction impaire f_n de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel t appartenant à $[0,1]$,

$$f_n(t) = \begin{cases} nt \text{ si } t < \dfrac{1}{n} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

I.2.b.1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, f_n appartient à $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

I.2.b.2. Montrer que, pour tout couple (m, n) d'entiers vérifiant $1 \leq n \leq m$,

$$\|f_m - f_n\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{3n}}$$

I.2.b.3. Si on suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ vers une limite f, montrer que cette limite est impaire et que sa restriction à $]0,1]$ est constante de valeur 1.
L'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est-il un espace de Hilbert ?

I.3. Montrer que, pour tous entiers naturels n et m,

$$\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)^n \left(\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}\left(t^2-1\right)^m\right) dt$$

En déduire que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

I.4. L'entier naturel n étant quelconque, on pose

$$K_n = \frac{1}{\|L_n\|_2} L_n$$

et on note F_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n ; ce sous-espace étant de dimension finie, on note π_n le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ sur F_n.

I.4.a. À l'aide du théorème de Weierstrass-Stone, montrer que quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0([-1,1])$, la suite $(\pi_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.

I.4.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(K_j)_{0\leq j\leq n}$ est une base de F_n.

I.4.c. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout élément f de $\mathcal{C}^0([-1,1])$,

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle K_j \text{ et } \|\pi_n(f)\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle^2$$

I.4.d. Montrer que, quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0([-1,1])$, la série de terme général $\langle f, K_n\rangle^2$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n\rangle^2 = \|f\|_2^2$$

Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t) K_n(t)\, dt$?

– II – Une classe de suites orthogonales de polynômes

Soient a un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$, vérifiant $a < b$ dans le cas où a et b sont réels.

On dit dans ce problème qu'une fonction continue f de l'intervalle ouvert $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$ est intégrable sur $]a,b[$ (respectivement absolument intégrable sur $]a,b[$) si

$$\lim_{\substack{(\alpha,\beta)\to(a,b)\\(\alpha,\beta)\in]a,b[^2}} \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \text{ (respectivement } \lim_{\substack{(\alpha,\beta)\to(a,b)\\(\alpha,\beta)\in]a,b[^2}} \int_\alpha^\beta |f(t)|\, dt)$$

existe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ (respectivement } \int_a^b |f(t)|\, dt)$$

la valeur de cette limite et on l'appelle intégrale de f (respectivement de $|f|$) sur $]a,b[$.

Attention ! la notion d'intégrabilité ainsi définie est purement réservée à ce problème et ne recours pas du tout les notions usuelles d'intégrabilité, en particulier la notion d'intégrabilité au sens de Lebesgue.

On admet que si la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(]a,b[)$ est absolument intégrable sur $]a,b[$, alors elle est intégrable sur $]a,b[$ et

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Soit ω une fonction continue de l'intervalle ouvert $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, strictement positive.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f^2\omega$ est intégrable sur $]a,b[$.

II.1.

II.1.a. Montrer que pour tout élément (f,g) de E^2, la fonction $fg\omega$ est intégrable sur $]a,b[$.

Le couple (f,g) étant élément de E^2, on note

$$\langle f,g\rangle_\omega = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\omega(t)\,dt$$

On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que l'application $(f,g)\mapsto \langle f,g\rangle_\omega$ de E^2 vers $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E, dont on note $f\mapsto \|f\|_2$ la norme euclidienne associée.

*Dans la suite de la partie **II**, l'espace E est muni de ce produit scalaire.*

On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, que l'on identifie aux polynômes appartenant à $\mathbb{R}[X]$ qui leur sont naturellement associés.

L'entier naturel n étant quelconque, on note (comme dans la partie I) F_n le sous-espace vectoriel de F constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

II.1.b. Dans la cas où a et b sont tous deux réels, montrer que F est inclus dans E si, et seulement si, ω est intégrable sur $]a,b[$.
Dans le cas contraire, montrer que F est inclus dans E si, et seulement si, pour tout entier naturel n, la fonction $t\mapsto t^n\omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$.

*On suppose dans la suite de la partie **II** que F est inclus dans E.*

II.1.c. Montrer qu'il existe dans E une suite orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que pour tout entier naturel n, $\deg(P_n)=n$.

II.2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale d'éléments de F telle que pour tout n, $\deg(P_n)=n$.
L'entier naturel n étant non nul, on note, s'il en existe, $r_1, r_2, \cdots, r_p$

les racines (distinctes) de P_n qui sont d'ordre de multiplicité impair et appartiennent à $]a, b[$, et on note Z_n leur ensemble (éventuellement vide). On considère le polynôme

$$Q_n = \begin{cases} P_0 \text{ si } Z_n = \emptyset \\ (X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_p) \text{ si } Z_n \neq \emptyset \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul.

II.2.a. Montrer que $\langle P_n, Q_n \rangle_\omega \neq 0$.

II.2.b. Montrer que si $\deg(Q_n) < n$, alors $\langle P_n, Q_n \rangle_\omega = 0$.

II.2.c. En déduire que les n racines complexes de P_n sont simples et appartiennent à $]a, b[$.

II.3. Un nouvel exemple : les polynômes de Laguerre.
On considère dans cette question le cas particulier où $a = 0$, $b = +\infty$ et $\omega : t \mapsto e^{-t}$.

II.3.a. Montrer que F est inclus dans E et que, pour tout entier naturel n,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

On note $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'unique suite orthonormale d'éléments de F que l'on obtient à partir de la suite $(z \mapsto z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F en appliquant le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Les polynômes G_n portent le nom de polynômes de Laguerre.

Calculer G_0, G_1 et G_2. Quels sont les zéros de G_2 ?

– III – Interpolation polynomiale

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, q un entier naturel supérieur à 2, $(x_i)_{1 \leq i \leq q}$ une famille d'éléments deux à deux distincts de I.

III.1. *Interpolation de Lagrange.*
L'entier j appartenant à $[1, q]$, on définit la fonction polynomiale à coefficients réels

$$\ell_j : t \mapsto \prod_{\substack{1 \leq i \leq q \\ i \neq j}} \frac{t - x_i}{x_j - x_i}$$

III.1.a. Montrer que l'application :

$$(P_1, P_2) \mapsto \sum_{i=1}^{q} P_1(x_i) P_2(x_i)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ et que, pour ce produit scalaire, la famille $(\ell_j)_{1 \leq j \leq q}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

III.1.b. Quelles sont les coordonnées dans la base $(\ell_j)_{1\leq j\leq q}$ d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{q-1}[X]$?

III.1.c. Soit $(y_i)_{1\leq i\leq q}$ une famille de réels. Montrer qu'il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ et un seul tel que, pour tout entier i appartenant à $[1,q]$, $P(x_i) = y_i$.
Quels sont les polynômes Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout entier i appartenant à $[1,q]$, $Q(x_i) = y_i$?

Si f est une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$, l'unique polynôme P dans $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que, pour tout entier i appartenant à $[1,q]$, $P(x_i) = f(x_i)$, est appelé le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $x_1, x_2, \cdots, x_q$.

III.1.d. On suppose dans cette question que I est un segment.
Montrer que l'application Δ de $\mathcal{C}^0(I)$ vers $\mathbb{R}_{q-1}[X]$, qui associe à f son polynôme interpolateur de Lagrange aux points $x_1, x_2, \cdots, x_q$, est linéaire et surjective.
Montrer que, pour toute application f appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$ et tout réel t appartenant à I,

$$|\Lambda(f)(t)| \leq \left(\max_{1\leq j\leq q} |f(x_j)|\right) \sum_{j=1}^{q} |\ell_j(t)|$$

On définit l'application χ de I vers $\mathbb{R}$ par la relation

$$\chi(t) = \sum_{j=1}^{q} |\ell_j(t)|$$

On munit les espaces $\mathcal{C}^0(I)$ et $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ (identifié à un sous-espace de $\mathcal{C}^0(I)$) de la norme infinie. Montrer que l'application linéaire Δ est continue et que

$$|||\Lambda||| = \|\chi\|_\infty$$

III.2. *Interpolation de Hermite.*
Dans la suite de la partie **III**, on considère q entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ et l'on pose

$$m = q + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q$$

On considère une fonction f de I vers $\mathbb{R}$ admettant, pour tout i appartenant à $[1,q]$, une dérivée d'ordre α_i au point x_i.
Montrer qu'il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et un seul tel que, pour tout entier i appartenant à $[1,q]$ et tout k appartenant à $[0,\alpha_i]$, $P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i)$.
Ce polynôme est appelé le polynôme interpolateur de Hermite de f aux

points $x_1, x_2, \cdots, x_q$ *relativement aux entiers* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$.
On pourra commencer par établir l'injectivité de l'application de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^m$ définie par :

$$P \mapsto \left(P(x_1), P'(x_1), \cdots, P^{(\alpha_1)}(x_1), \cdots, P(x_q), P'(x_q), \cdots, P^{(\alpha_q)}(x_q)\right)$$

III.3. *Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Hermite.*
On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$ de I vers $\mathbb{R}$.
Le réel x appartenant à I, on note J_x le plus petit intervalle fermé contenant $x_1, x_2, \cdots, x_q$ et x.
On fixe un réel x appartenant à I. On suppose dans (**III.3.a,b,c**) que x est distinct de $x_1, x_2, \cdots, x_q$.
On note H le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points $x_1, x_2, \cdots, x_q$ relativement aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ et H_x le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points $x_1, x_2, \cdots, x_q, x$ relativement aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q, 0$.
On note p la fonction polynomiale de I vers $\mathbb{R}$

$$t \mapsto \prod_{i=1}^{q} (t - x_i)^{\alpha_i + 1}$$

III.3.a. Montrer qu'il existe un réel μ (dépendant de x) tel que $H_x = H + \mu p$. Expliciter μ en fonction de $f(x)$, $H(x)$ et $p(x)$.

III.3.b. On considère la fonction $\Phi = f - H_x$ de I vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^m$ sur I. Montrer, en procédant par récurrence, qu'il existe un réel ξ appartenant à J_x tel que $\Phi^{(m)}(\xi) = 0$.

III.3.c. En déduire qu'il existe un réel ξ appartenant à J_x tel que

$$f(x) - H(x) = \frac{p(x)}{m!} f^{(m)}(\xi)$$

III.3.d. Montrer que cette conclusion demeure même si x est l'un des réels $x_1, x_2, \cdots, x_q$.

– IV – Quadratures de Gauss

On considère l'espace préhilbertien séparé $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega)$ défini dans la partie **II** (dont on reprend les notations, ainsi que l'hypothèse que F est inclus dans E).

On considère une suite orthogonale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n) = n$.

On fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Soient $r_1, r_2, \cdots, r_n$ les racines de P_n (cf **II.2.**) et soit a_n le coefficient dominant de P_n.

L'entier j étant compris entre 1 et n, on définit le polynôme à coefficients réels

$$\ell_j = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{X - r_i}{r_j - r_i}$$

(cf **III.1.**).

Dans cette partie, on cherche à approcher, pour f appartenant à E, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\omega(t)\,dt$.

On met en évidence en **IV.1.** des réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$:

$$\int_a^b Q(t)\,\omega(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q(r_j)$$

et en **IV.2.** si f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $]a, b[$, on donne une expression du reste obtenu en remplaçant $\int_a^b f(t)\,\omega(t)\,dt$ par $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)$. On établit en **IV.3.** dans un cas particulier, la convergence de la méthode ainsi définie, puis on termine en **IV.4.** par un exemple.

IV.1. *Un théorème de Gauss.*

IV.1.a. Soit Q un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme R appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout t appartenant à $]a, b[$,

$$Q(t) = R(t) + \sum_{j=1}^{n} Q(r_j)\,\ell_j(t)$$

IV.1.b. Montrer qu'il existe un n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ de réels tel que pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\int_a^b Q(t)\,\omega(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q(r_j) \tag{2.1}$$

IV.1.c. Montrer qu'un tel n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ est unique et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont tous strictement positifs.

IV.1.d. La relation (2.1) est-elle également vraie pour tout polynôme appartenant à $\mathbb{R}_{2n}[X]$?

IV.2. *Un théorème de Markov.*

On considère une fonction f appartenant à E et de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $]a,b[$. On note H le polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ interpolant f au sens de Hermite aux points $r_1, r_2, \cdots, r_n$ relativement aux entiers $1, 1, \cdots, 1$.
Les réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont ceux qui ont été définis en **IV.1.c.**

IV.2.a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]a,b[$, il existe un réel ξ appartenant à $]a,b[$ tel que

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!a_n^2} P_n^2(x)$$

IV.2.b. Montrer que la fonction

$$k : x \mapsto (2n)!a_n^2 \frac{f(x) - H(x)}{P_n^2(x)}$$

est prolongeable par continuité sur $]a,b[$. C'est ce prolongement que l'on note k dans la suite.

IV.2.c. Montrer que la fonction $t \mapsto k(t) P_n^2(t) \omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$.

IV.2.d. On pose

$$\beta = \frac{1}{\|P_n\|_\omega^2} \int_a^b k(t) P_n^2(t) \omega(t)\, dt = \frac{\displaystyle\int_a^b k(t) P_n^2(t) \omega(t)\, dt}{\displaystyle\int_a^b P_n^2(t) \omega(t)\, dt}$$

Montrer que si la fonction k n'est pas constante, on a alors :

$$\inf_{x \in]a,b[} k(x) < \beta < \sup_{x \in]a,b[} k(x).$$

IV.2.e. En déduire qu'il existe un réel ζ dans $]a,b[$ tel que $\beta = k(\zeta)$.

IV.2.f. Établir qu'il existe un réel ζ appartenant à $]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t) \omega(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(r_k) + \frac{f^{(2n)}(\tau)}{(2n)!a_n^2} \|P_n\|_\omega^2$$

IV.3. *Convergence de la méthode dans le cas particulier d'un segment.*

Dans cette question, *l'entier n supérieur ou égal à 2 n'est plus fixé* et, afin d'éviter toute ambiguïté, on note $r_{n,1}, r_{n,2}, \cdots, r_{n,n}$ les racines de P_n ainsi que $\ell_{n,j} = \displaystyle\prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne j}} \frac{X - r_{n,i}}{r_{n,j} - rn_{,i}}$.

Puis on note $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \cdots, \lambda_{n,n}$ les réels définis en **IV.1.b,c.**
On suppose que a et b sont des réels et on note I le segment $[a, b]$.
On considère une fonction continue f de I vers $\mathbb{R}$.
On désire montrer que, dans ces conditions, le reste

$$E_n(f) = \left| \int_a^b f(t)\,\omega(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(r_k) \right|$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

IV.3.a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_{n,k} = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} = \int_a^b \omega(t)\,dt$$

IV.3.b. Soit ε un réel strictement positif. On sait, d'après le théorème de Weierstrass-Stone, qu'il existe un polynôme p appartenant à $\mathbb{R}[X]$ telle que $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$.
On note ν la partie entière du nombre $\dfrac{\deg(p)}{2}$.
Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$E_n(f - p) \leq 2\varepsilon \int_a^b \omega(t)\,dt$$

En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à $\max(1, \nu)$,

$$E_n(f) \leq 2\varepsilon \int_a^b \omega(t)\,dt$$

IV.3.c. Conclure.

IV.4. *Un exemple où l'on suppose que la méthode converge.*
On se place dans le cas particulier de la question **II.3.** dont on reprend les notations.
On note ψ l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation

$$\psi(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

IV.4.a. Montrer que pour tout entier naturel m et tout réel strictement positif x, la fonction $t \mapsto t^m \psi(t)\,e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Le réel x étant strictement positif, on note

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t)\,e^{-xt} dt$$

IV.4.b. *Dérivabilité et dérivée de* Ψ *sur* $]0,+\infty[$.
Soit x un réel strictement positif fixé.
Justifier, pour tout réel h vérifiant $0 < |h| \leq \dfrac{x}{2}$ et tout réel positif t, l'inégalité

$$\left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right| \leq \frac{h^2t^2}{2}e^{-\frac{xt}{2}}$$

En déduire que, pour tout réel h vérifiant $0 < |h| \leq \dfrac{x}{2}$ et tout réel strictement positif X,

$$\left|\int_0^X \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h}\psi(t) + te^{-xt}\psi(t)\right) dt\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^X t^2 |\psi(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt$$

En déduire que Ψ est dérivable au point x et que
$\Psi'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\psi(t) e^{-xt}dt.$

IV.4.c. Montrer que pour tout réel strictement positif x,

$$\Psi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

IV.4.d. Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, $\Psi(x)$ tend vers 0.

IV.4.e. Déduire des résultats précédents la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-t}dt \tag{2.2}$$

IV.4.f. Dans le cas $n = 2$, calculer des valeurs approchées à la précision permise par votre calculatrice $\lambda_1, \lambda_2, \psi(r_1)$ et $\psi(r_2)$.
En déduire une valeur approchée de l'intégrale (2.2).
À quelle précision approche-t-on ainsi la valeur de $\dfrac{\pi}{4}$ donnée par votre calculatrice.

2.2 Corrigé

– I – Les polynômes de Legendre

I.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi_{2n}(t) = \left(t^2-1\right)^n$ et on a $L_n = \varphi_{2n}^{(n)}$.

I.1.a. La fonction φ_{2n} est polynomiale de degré $2n$ avec 1 pour coefficient dominant, il en résulte que sa dérivée d'ordre n, L_n est polynomiale de degré n avec $\frac{(2n)!}{n!}$ pour coefficient dominant. Précisément, on a :

$$\varphi_{2n}(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k t^{2k}$$

et :

$$L_n(t) = \varphi_{2n}^{(n)}(t) = \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{(2k)!}{(2k-n)!} t^{2k-n}.$$

I.1.b. On a :

$$L_1(t) = 2t,\ L_2(t) = 12t^2 - 4,\ L_3(t) = 120t^3 - 72t.$$

I.1.c. Le polynôme φ_{2n} est pair, donc sa dérivée d'ordre n, L_n est de la parité de n.

I.1.d. En écrivant $\varphi_{2n}(t) = (t-1)^n (t+1)^n$ et en utilisant la formule de dérivation de Leibniz, on a :

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left((t-1)^n\right)^{(k)} \left((t+1)^n\right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} (t-1)^{n-k} (t+1)^k, \end{aligned}$$

ce qui donne $L_n(1) = n!2^n$ et avec la parité de L_n, on déduit que $L_n(-1) = (-1)^n n!2^n$.
On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(t) = (t-1)^n (t-1+2)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} (t-1)^{n+k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi_{2n}^{(k)}(1)}{k!} (t-1)^k \end{aligned}$$

(formule de Taylor-Lagrange pour les polynômes) et l'identification des coefficients de $(t-1)^n$ donne $L_n^{(k)}(1) = \varphi_{2n}^{(n+k)}(1) = (n+k)!C_n^k 2^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

I.2.

I.2.a. Du fait que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif et que l'intégration sur $[-1,1]$ est une forme linéaire positive, on déduit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$. Si f est continue sur $[-1,1]$ non identiquement nulle, alors f^2 est continue à valeurs positives ou nulles non identiquement nulle et $\int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt > 0$, on en déduit donc que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

I.2.b. Il est clair que la fonction f_n est continue sur $[-1,1] \setminus \left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$. Avec $\lim_{t\to\frac{1}{n}} f_n(t) = 1 = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ et l'imparité de f_n, on déduit que f_n est continue sur $[-1,1]$.

I.2.c. Pour $m \geq n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_m - f_n\|_2^2 &= 2\left(\int_0^{\frac{1}{m}} (m-n)^2 t^2 dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1-nt)^2\,dt\right) \\
&= \frac{2}{3n}\left(1 - \frac{n}{m}\right)^2
\end{aligned}$$

et $\|f_m - f_n\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{3n}}$.

I.2.d. De ce qui précède, on déduit que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\left(\mathcal{C}^0([-1,1]), \|\cdot\|_2\right)$. Si cet espace est de Hilbert alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pour la norme $\|\cdot\|_2$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1,1])$. En notant g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(t) = -f(-t)$, on a $g \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ et le changement de variable $x = -t$ donne :

$$\begin{aligned}
\|g - f_n\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} (f(-t) + f_n(t))^2\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} (f(x) - f_n(x))^2\,dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne $g = f$ du fait de l'unicité de la limite. La fonction f est donc impaire et en particulier $f(0) = 0$ (la fonction f est continue sur $[-1,1]$). En se limitant à $]0,1]$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\|f - 1\|_{2,]0,1]} \leq \|f - f_n\|_{2,]0,1]} + \|f_n - 1\|_{2,]0,1]},$$

avec :

$$\|f - f_n\|_{2,]0,1]} \leq \|f - f_n\|_2 = \lim_{m\to+\infty} \|f_m - f_n\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{3n}}$$

et :

$$\|f_n - 1\|_{2,]0,1]}^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nt)^2\, dt = \frac{1}{3n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on a $\|f-1\|_{2,]0,1]} = 0$ et $f = 1$ sur $]0,1]$ (f et δ sont continues sur cet intervalle) ce qui entraîne $f(0) = 1$ en contradiction avec $f(0) = 0$. On a donc ainsi montré que $\left(\mathcal{C}^0([-1,1]), \|\cdot\|_2\right)$ n'est pas un espace de Hilbert.

I.3. Par récurrence, on montre facilement que pour tout entier naturel non nul n et pour toutes fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a,b]$, avec $a < b$, on a :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\, g(t)\, dt = \left[\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f^{(n-k)}(t)\, g^{(k-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t)\, g^{(n)}(t)\, dt.$$

Dans le cas particulier où la fonction f (resp. g) s'annule à l'ordre n en a et b, on a :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\, g(t)\, dt = (-1)^n \int_a^b f(t)\, g^{(n)}(t)\, dt.$$

On en déduit alors que pour n, m entiers naturels, on a :

$$\langle L_n, L_m\rangle = \left\langle \varphi_{2n}^{(n)}, L_m\right\rangle = (-1)^n \left\langle \varphi_{2n}, L_m^{(n)}\right\rangle = (-1)^n \left\langle \varphi_{2n}, \varphi_{2m}^{(n+m)}\right\rangle$$

(-1 et 1 sont racines d'ordre n de φ_{2n}) ou encore :

$$\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 \left(t^2-1\right)^n \left(\left(t^2-1\right)^m\right)^{(n+m)} dt.$$

Pour $n > m$, on a $\varphi_{2m}^{(n+m)} = 0$ et $\langle L_n, L_m\rangle = 0$. Par symétrie, on déduit donc que $\langle L_n, L_m\rangle = 0$ pour $n \neq m$, c'est-à-dire que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans $\left(\mathcal{C}^0([-1,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$.
Pour $n = m$, on a :

$$\|L_n\|_2^2 = (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{n!}{(2n)!} \left((t-1)^{2n}\right)^{(n)} (t+1)^n\, (2n)!dt$$

et la formule d'intégration par partie itérée donne :

$$\|L_n\|_2^2 = (-1)^n (n!)^2 \int_{-1}^1 (t-1)^{2n}\, dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

I.4. On rappelle que la projection orthogonale $\pi_n(f)$ de f sur F_n est l'unique élément de F_n tel que $f - \pi_n(f) \in F_n^{\perp}$, c'est aussi la meilleure approximation de f dans F_n, soit :

$$\|f - \pi_n(f)\|_2 = \inf_{P \in F_n} \|f - P\|_2 .$$

I.4.a. Le théorème de Stone-Weierstrass nous dit que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0([-1,1])$ il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$ avec $P_n \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en utilisant par exemple les polynômes de Bernstein). Avec :

$$\|f - \pi_n(f)\|_2 \leq \|f - P_n\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|f - P_n\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - \pi_n(f)\|_2 = 0$, c'est-à-dire que la suite $(\pi_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\left(\mathcal{C}^0([-1,1]), \|\cdot\|_2\right)$.

I.4.b. La famille $(K_j)_{0\leq j\leq n}$ étant étagée en degré dans F_n ($\deg(K_j) = j$) c'est une base de F_n.
On peut aussi dire que ce système est orthonormé et formé de $n+1 = \dim(F_n)$ éléments, c'est donc une base orthonormée de F_n.

I.4.c. Le polynôme $\pi_n(f)$ étant dans F_n et $(K_j)_{0\leq j\leq n}$ étant une base orthonormée de F_n, on a $\pi_n(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} \langle \pi_n(f), K_j\rangle K_j$. D'autre part, la condition $f - \pi_n(f) \in F_n^{\perp}$ est équivalente à $\langle f - \pi_n(f), K_j\rangle = 0$ pour tout j compris entre 0 et n, soit à $\langle f, K_j\rangle = \langle \pi_n(f), K_j\rangle$ et :

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle K_j,$$

il en résulte que :

$$\|\pi_n(f)\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle^2 .$$

I.4.d. Avec $f = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n(f)$ pour $\|\cdot\|_2$, on déduit que :

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \|\pi_n(f)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n\rangle^2 .$$

Le terme général d'une série convergente tendant vers 0, il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f(t)\, K_n(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \langle f, K_n\rangle = 0.$$

– II – Une classe de suites orthogonales de polynômes

II.1. On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de F, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ e_n(t) = t^n.$$

II.1.a. En utilisant l'inégalité :

$$|fg| \leq \frac{1}{2}\left(f^2 + g^2\right),$$

on déduit que pour toutes fonctions f, g dans E, la fonction $fg\omega$ est absolument intégrable, que E est un espace vectoriel et que l'application

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_\omega = \int_a^b f(x)\,g(x)\,\omega(x)\,dx$$

définit un produit scalaire sur E.

II.1.b. Si F est inclus dans E, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction e_n est dans E et la fonction $t \mapsto 1 \cdot t^n\omega$ est intégrable sur $]a,b[$. Réciproquement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto t^n\omega$ est intégrable sur $]a,b[$, il en est alors de même des fonctions $t \mapsto t^{2n}\omega$, c'est-à-dire que $e_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et F est contenu dans l'espace vectoriel E. Dans le cas où l'intervalle $]a,b[$ est borné, avec $|t^n\omega| \leq (\max(|a|,|b|))^n\,\omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que si ω est intégrable sur $]a,b[$ alors $F \subset E$.

II.1.c. Le théorème de Gram-Schmidt nous dit qu'il existe une unique famille orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout k compris entre 0 et n on ait :

$$\begin{cases} \operatorname{Vect}\{P_0,\cdots,P_n\} = \operatorname{Vect}\{e_0,\cdots,e_n\} = F_n, \\ \langle P_k, e_k\rangle > 0. \end{cases}$$

Nécessairement les fonctions P_n sont polynomiales avec $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n étant strictement positif (en effet, on a $P_n = \alpha_n x^n + Q$ avec Q dans F_{n-1} et l'égalité $1 = \|P_n\|_\omega^2 = \langle P_n, P_n\rangle_\omega = \alpha_n \langle P_n, x^n\rangle_\omega$ entraîne $\alpha_n > 0$).

II.2.

II.2.a. La fonction ω étant à valeurs strictement positives et la fonction P_nQ_n étant de signe constant et non identiquement nulle sur $]a,b[$, on a $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega \neq 0$.

II.2.b. Si $\deg(Q_n) < n$, alors $Q_n \in F_{n-1}$ et $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega = 0$.

II.2.c. Si $\deg(Q_n) < n$, les résultats de **II.2.a.** et **II.2.b.** sont contradictoires, on a donc nécessairement $\deg(Q_n) = n$, c'est-à-dire que toutes les racines de P_n sont dans $]a,b[$ et simples.

II.3.

II.3.a. Pour tout réel $R > 0$ on a $\displaystyle\int_0^R e^{-t}dt = 1 - e^{-R}$ et pour tout $n \geq 1$, la formule d'intégration par parties itérée donne :

$$\begin{aligned}\int_0^R t^n e^{-t}dt &= (-1)^n \int_0^R t^n \left(e^{-t}\right)^{(n)} dt \\ &= (-1)^n \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(e^{-t}\right)^{(n-k)} \left(t^n\right)^{(k-1)}\right]_0^R + n! \int_0^R e^{-t}dt,\end{aligned}$$

soit :

$$\int_0^R t^n e^{-t}dt = -e^{-R} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k+1)!} R^{n-k+1} + n!\left(1 - e^{-R}\right).$$

En faisant tendre R vers l'infini on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!,$$

ce qui entraîne $F \subset E$.

II.3.b. Le procédé de Gram-Schmidt nous donne :

$$G_0(t) = 1,\ G_1(t) = t - 1,\ G_2(t) = \frac{t^2 - 4t + 2}{2}.$$

Les zéros de G_2 sont $r_1 = 2 - \sqrt{2}$ et $r_2 = 2 + \sqrt{2}$.

– III – Interpolation polynomiale

III.1.

III.1.a. Un polynôme réel non nul de degré inférieur ou égal à $q - 1$ (entier naturel non nul) ayant au plus $q - 1$ racines distinctes, on déduit que pour toute suite $(x_i)_{1 \leq i \leq q}$ de réels deux à deux distincts, l'application :

$$(P, Q) \mapsto \sum_{i=1}^{q} P(x_i)\, Q(x_i)$$

définit un produit scalaire sur F_{q-1}. Les polynômes de Lagrange ℓ_j vérifiant :

$$\ell_j(x_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases},$$

on déduit que le système $(\ell_j)_{1\leq j\leq q}$ est orthonormé dans F_{q-1}, il est donc libre, et étant constitué de q éléments c'est une base.

III.1.b. Tout polynôme $P \in F_{q-1}$ s'écrit dans la base $(\ell_j)_{1\leq j\leq q}$:

$$P = \sum_{i=1}^{q} (P, \ell_i)\, \ell_i,$$

avec $(P, \ell_i) = P(x_i)$ pour i compris entre 1 et q.

III.1.c. Si $(y_i)_{1\leq i\leq q}$ est une famille donnée de réels, alors le polynôme de F_{q-1}, $P = \sum\limits_{i=1}^{q} y_i \ell_i$ est tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i compris entre 1 et q. Ce polynôme est unique du fait que deux polynômes de F_{q-1} qui coïncident en q points distincts sont égaux.
Si $Q \in F$ est tel que $Q(x_i) = y_i$, alors le polynôme $Q - P$ s'annule en x_i pour i compris entre 1 et q, ce qui équivaut à dire que :

$$Q(t) - P(t) = R(t) \prod_{i=1}^{q} (t - x_i),$$

où $R \in F$, encore équivalent à dire que Q est égal à P modulo $\prod\limits_{i=1}^{q} (t - x_i)$.

III.1.d. Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$, on a :

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{q} f(x_i)\, \ell_i.$$

On en déduit que Λ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$ avec :

$$\begin{aligned} |\Lambda(f)(t)| &\leq \sum_{i=1}^{q} |f(x_i)|\, |\ell_i(t)| \\ &\leq \left(\max_{1\leq i\leq q} |f(x_i)| \right) \sum_{i=1}^{q} |\ell_i(t)| \leq \|f\|_\infty \|\chi\|_\infty, \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$, où $\chi = \sum\limits_{i=1}^{q} |\ell_i|$. En remarquant que Λ laisse invariant tous les éléments de $\mathbb{R}_{q-1}[x]$ (unicité du polynôme d'interpolation de

Lagrange), on déduit que Λ est surjective.
L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \ \|\Lambda(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\chi\|_\infty,$$

ce qui se traduit par la continuité de Λ avec $|||\Lambda||| \leq \|\chi\|_\infty$.
Si $\alpha \in I$ est tel que $\chi(\alpha) = \|\chi\|_\infty$ (l'intervalle I est compact), en désignant par f la fonction continue sur I, affine par morceaux et telle que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, q\}, \ f(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell_i(\alpha) = 0, \\ \dfrac{\ell_i(\alpha)}{|\ell_i(\alpha)|} \text{ si } \ell_i(\alpha) \neq 0, \end{cases}$$

on a $\|f\|_\infty = 1$ (si $\ell_i(\alpha) = 0$, alors α est égal à l'un des x_j et $\ell_j(\alpha) = 1$) et $\Lambda(f)(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{q} |\ell_i(\alpha)| = \|\chi\|_\infty$, ce qui entraîne :

$$\|\chi\|_\infty = \Lambda(f)(\alpha) \leq \|\Lambda(f)\|_\infty \leq |||\Lambda||| \, \|f\|_\infty = |||\Lambda|||.$$

On a donc $|||\Lambda||| = \|\chi\|_\infty$.

III.2. L'application :

$$\varphi : P \mapsto \left(P(x_1), \cdots, P^{(\alpha_1)}(x_1), \cdots, P(x_q), \cdots, P^{(\alpha_q)}(x_q)\right)$$

est linéaire de F_{m-1} dans $\mathbb{R}^m$ et un élément du noyau est caractérisé par :

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \\ P^{(k)}(x_i) = 0 \ (1 \leq i \leq q, \ 0 \leq k \leq \alpha_i). \end{cases}$$

Si P est solution de ce problème, alors la condition $P^{(k)}(x_i) = 0$ pour tout entier k compris entre 0 et α_i équivaut à dire que P est divisible par $(x - x_i)^{\alpha_i + 1}$, on a donc :

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \\ P(x) = Q(x) \prod\limits_{i=1}^{q} (x - x_i)^{\alpha_i + 1} = Q(x)\, p(x) \end{cases}$$

et avec les degrés (p est de degré m), on déduit que nécessairement P est le polynôme nul. L'application φ est donc injective, ce qui équivaut à la bijectivité puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension. On déduit donc que pour tout

$$y = \left(y_{1,0}, \cdots, y_{1,\alpha_1}, \cdots, y_{q,0}, \cdots, y_{q,\alpha_q}\right) \in \mathbb{R}^m$$

il existe un unique polynôme P tel que :

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}_{m-1}[x], \\ P^{(k)}(x_i) = y_i \ \ (1 \leq i \leq q, \ 0 \leq k \leq \alpha_i). \end{cases}$$

III.3.

III.3.a. On a $H^{(k)}(x_i) = H_x^{(k)}(x_i)$ pour $1 \leq i \leq q$ et $0 \leq k \leq \alpha_i$, c'est-à-dire que x_i est racine d'ordre $\alpha_i + 1$ du polynôme $H_x - H$ pour $1 \leq i \leq q$ et donc $H_x - H = Qp$. Comme $H_x - H$ et p sont dans $\mathbb{R}_m[X]$, Q est nécessairement un polynôme constant, on le note μ et on a $H_x = H + \mu p$. En évaluant ces polynômes en $t = x$, on a $H_x(x) = f(x) = H(x) + \mu p(x)$ et pour x distinct des x_j $(1 \leq j \leq q)$ on a $p(x) \neq 0$, ce qui donne :

$$\mu = \frac{f(x) - H(x)}{p(x)}.$$

III.3.b. La fonction $\Phi = f - H_x$ est de classe $\mathcal{C}^m$ sur J_x (le plus petit intervalle fermé contenant x et les x_i) et s'annule en $m+1$ points (les x_i à l'ordre $\alpha_i + 1$ et x).

Il s'agit donc de montrer le résultat suivant : si m est un entier naturel, Φ une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^m$ sur un intervalle réel J qui s'annule en $m+1$ points de J distincts ou confondus, alors il existe un point ξ dans J tel que $\Phi^{(m)}(\xi) = 0$.

La démonstration se fait par récurrence sur m. Si $m = 0$ le résultat est évident. On suppose donc que m est non nul. Si a est une racine de multiplicité p supérieure ou égal à 2 de Φ alors c'est une racine de multiplicité $p-1$ de Φ' et si a, b sont deux racines distinctes de Φ, alors le théorème de Rolle nous dit qu'entre ces deux racines il existe une racine de Φ'. On déduit donc que la fonction Φ' admet m racines distinctes ou confondues dans J. Par récurrence, on déduit que la dérivée d'ordre m, $\Phi^{(m)}$ admet une racine dans J.

III.3.c. On a :

$$H_x = H + \frac{f(x) - H(x)}{p(x)} p.$$

La fonction $\Phi = f - H_x$ est de classe $\mathcal{C}^m$ sur l'intervalle J_x, nulle en au moins $m+1$ points distincts ou confondus (x et les x_i avec les multiplicités α_i au moins), le théorème de Rolle itéré (question précédente) nous dit alors qu'il existe un point $\xi \in J_x$ tel que $\Phi^{(m)}(\xi) = 0$, ce qui compte tenu de :

$$H_x^{(m)} = \frac{f(x) - H(x)}{p(x)} m!$$

$(H \in F_{m-1})$ s'écrit :

$$f^{(m)}(\xi) - \frac{f(x) - H(x)}{p(x)} m! = 0$$

ou encore :

$$f(x) - H(x) = \frac{1}{m!} p(x) f^{(m)}(\xi).$$

III.3.d. Si x est l'un des points x_i, alors $f(x) - H(x) = p(x) = 0$ et tout point $\xi \in J_x$ convient.

– IV – Quadratures de Gauss

IV.1.

IV.1.a. Le théorème de division euclidienne nous assure l'existence et l'unicité, pour tout polynôme Q, de deux polynômes R et S tels que $Q = RP_n + S$ avec $S \in F_{n-1}$. En utilisant la base de Lagrange, le polynôme S s'écrit $S = \sum_{i=1}^{n} S(r_i) \ell_i$ et avec $P_n(r_i) = 0$ pour tout i compris entre 0 et n, on a $Q(r_i) = S(r_i)$ et $S = \sum_{i=1}^{n} Q(r_i) \ell_i$. Si de plus Q est dans F_{2n-1} alors R est nécessairement dans F_{n-1}.

IV.1.b. On a pour $Q \in F_{2n-1}$, avec les notations qui précèdent :

$$\begin{aligned}
\int_a^b Q(t)\,\omega(t)\,dt &= \langle P_n \mid R \rangle + \int_a^b S(t)\,\omega(t)\,dt \\
&= \int_a^b S(t)\,\omega(t)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} Q(r_i) \int_a^b \ell_i(t)\,\omega(t)\,dt,
\end{aligned}$$

puisque $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$, c'est-à-dire :

$$\int_a^b Q(t)\,\omega(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(r_i),$$

avec $\lambda_i = \displaystyle\int_a^b \ell_i(t)\,\omega(t)\,dt$ pour tout i compris entre 1 et n.

IV.1.c. Si les coefficients λ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont tels que (1) est vérifié pour tout $Q \in F_{2n-1}$, en prenant $Q = \ell_i$, on obtient $\lambda_i = \displaystyle\int_a^b \ell_i(t)\,\omega(t)\,dt$, ce qui prouve l'unicité. En prenant $Q = \ell_i^2 \in F_{2n-1}$ (ℓ_i est de degré $n-1$), on a également $\lambda_i = \displaystyle\int_a^b \ell_i^2(t)\,\omega(t)\,dt$ et $\lambda_i > 0$ pour tout i compris entre 0 et n.

IV.1.d. On a :

$$0 < \|P_n\|_\omega^2 = \int_a^b P_n^2(t)\,\omega(t)\,dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P_n(r_i) = 0,$$

avec $P_n^2 \in F_{2n}$, et la relation (1) n'est pas vraie sur F_{2n}.

IV.2.

IV.2.a. Le résultat de la question **III.3.c.** avec $q = n$, $\alpha = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{N}^n$, $m = n + \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 2n$ et $f \in \mathcal{C}^{2n}(]a,b[) \cap E$ nous dit que pour tout $x \in]a,b[$ il existe un réel $\xi \in]a,b[$ (dépendant de x) tel que :

$$f(x) = H(x) + \frac{1}{(2n)!} p(x)\, f^{(2n)}(\xi),$$

avec $p(x) = \prod\limits_{i=1}^n (x - r_i)^2 = \dfrac{1}{a_n^2} P_n^2(x)$, soit :

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!\,a_n^2} P_n^2(x).$$

IV.2.b. La fonction k est bien définie et continue sur $]a,b[\setminus \{r_1, \cdots, r_n\}$ et tenant compte du fait que r_i est racine de multiplicité égale à 2 de P_n^2 et de multiplicité supérieure ou égale à 2 de $f - H$, on déduit que k se prolonge par continuité sur k. Précisément, avec la formule de Taylor-Lagrange, on a :

$$f(x) - H(x) = \frac{(x - r_i)^2}{2} (f - H)''(r_i + \theta_x (x - r_i))$$

avec $0 < \theta_x < 1$, donc :

$$\lim_{x \to r_i} \frac{f(x) - H(x)}{(x - r_i)^2} = \frac{f''(r_i) - H''(r_i)}{2}$$

et avec $\lim\limits_{x \to r_i} \dfrac{P_n(x)}{x - r_i} = P_n'(r_i)$, il vient :

$$\lim_{x \to r_i} \frac{f(x) - H(x)}{P_n^2(x)} = \frac{f''(r_i) - H''(r_i)}{2\,(P_n'(r_i))^2}.$$

IV.2.c. On a $kP_n^2 = (2n)!a_n^2 (f - H)$ avec f et H dans E, ce qui entraîne l'intégrabilité de $(f - H)\,\omega = 1 \cdot (f - H)\omega$ et donc celle de $kP_n^2\omega$ (on a supposé que $F \subset E$).

IV.2.d. On suppose que la fonction k est bornée sur $]a, b[$ et on pose :

$$m = \inf_{x\in]a,b[} k\,(x)\,,\ M = \sup_{x\in]a,b[} k\,(x)\,.$$

On a alors, avec la positivité de ω :

$$\forall t \in\,]a, b[\,,\ mP_n^2\,(t)\,\omega\,(t) \leq k\,(t)\,P_n^2\,(t)\,\omega\,(t) \leq MP_n^2\,(t)\,\omega\,(t)$$

et en intégrant sur $]a, b[$:

$$m\,\|P_n\|_\omega^2 \leq \int_a^b k\,(t)\,P_n^2\,(t)\,\omega\,(t)\,dt \leq M\,\|P_n\|_\omega^2\,,$$

soit $m \leq \beta \leq M$.
L'égalité $\beta = M$ équivaut à :

$$\int_a^b (M - k\,(t))\,P_n^2\,(t)\,\omega\,(t)\,dt = 0$$

encore équivalent à $(M - k)\,P_n^2\omega = 0$ du fait de la continuité et de la positivité de la fonction intégrée, ce qui donne $k\,(t) = M$ pour $t \in\,]a, b[$ et $t \neq r_i$ $(1 \leq i \leq n)$, soit $k = M$ du fait de la continuité de la fonction k. De même $m = \beta$ équivaut à $k = m$. Donc en supposant k bornée sur $]a, b[$ et non constante on a $m < \beta < M$.

IV.2.e. Si k bornée sur $]a, b[$ et non constante, on déduit alors de l'encadrement précédent et du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un $\zeta \in\,]a, b[$ tel que $\beta = k\,(\zeta) = f^{(2n)}\,(\tau)$ (τ dépend de ζ). Si k est constante alors n'importe quel $\zeta \in\,]a, b[$ convient.

IV.2.f. Tenant compte de $f\,(x) = H\,(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!a_n^2} P_n^2\,(x)$ avec $f^{(2n)}\,(\xi) = k\,(x)\,$, de :

$$\int_a^b H\,(t)\,\omega\,(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i H\,(r_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f\,(r_i)$$

($H \in \mathbb{R}_{2n-1}\,[X]$ et $H\,(r_i) = f\,(r_i)$ pour $1 \leq i \leq n$) et de :

$$\int_a^b k\,(t)\,P_n^2\,(t)\,\omega\,(t)\,dt = \beta\,\|P_n\|_\omega^2 = f^{(2n)}\,(\tau)\,\|P_n\|_\omega^2$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\omega(t)\,dt &= \int_a^b H(t)\,\omega(t)\,dt + \frac{1}{(2n)!a_n^2}\int_a^b k(t)\,P_n^2(t)\,\omega(t)\,dt \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(r_i) + \frac{f^{(2n)}(\tau)}{(2n)!a_n^2}\,\|P_n\|_\omega^2\end{aligned}$$

IV.3.

IV.3.a. Les égalités $Q = \sum_{i=1}^n Q(r_{n,i})\,\ell_{n,i}$ et $\int_a^b Q(t)\,\omega(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} Q(r_{n,i})$ pour $Q \in F_n$ donnent $\sum_{i=1}^n \ell_{n,i} = 1$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} = \int_a^b \omega(t)\,dt$ en prenant $Q = 1$.

IV.3.b. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$, on a :

$$E_n(f) \leq \|f\|_\infty \left(\int_a^b \omega(t)\,dt + \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i}\right)$$

(ω et les $\lambda_{n,i}$ sont positifs), soit $E_n(f) \leq 2\|f\|_\infty \int_a^b \omega(t)\,dt$. Si $p \in F$ est telle que $\|f-p\|_\infty \leq \varepsilon$, on en déduit alors que :

$$E_n(f-p) \leq 2\varepsilon \int_a^b \omega(t)\,dt.$$

En utilisant l'inégalité :

$$E_n(f) \leq E_n(f-p) + E_n(p)$$

et l'égalité $E_n(p) = 0$ pour $\deg(p) \leq 2n-1$ (soit $n \geq \dfrac{\deg(p)+1}{2}$ réalisé si $n \geq \left[\dfrac{\deg(p)}{2}\right] + 1 = \nu$), on déduit que $E_n(f) \leq 2\varepsilon \int_a^b \omega(t)\,dt$ pour $n \geq \max(1,\nu)$.

IV.3.c. En conclusion, on a :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \lim_{n\to+\infty} E_n(f) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} f(r_{n,i}) = \int_a^b f(t)\,\omega(t)\,dt.$$

IV.4.

IV.4.a. Pour $x > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left|t^{m+2}\psi(t)\, e^{-xt}\right| \leq t^{m+1}e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$$

et donc $\left|t^m\psi(t)\, e^{-xt}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour t assez grand. Il en résulte que la fonction Ψ est bien définie (la fonction ψ est prolongée par continuité en 0).

IV.4.b. Avec la formule de Taylor-Lagrange, on peut écrire pour tout réel u :

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2}e^{-\theta u}$$

avec $0 < \theta < 1$. On en déduit que $e^{-u} - 1 + u \geq 0$ et pour $|u| \leq \alpha$, on a :

$$0 \leq e^{-u} - 1 + u \leq \frac{u^2}{2}e^{\alpha}.$$

Pour $\alpha = \dfrac{xt}{2}$ avec $x > 0$ et $t \geq 0$ et $u = ht$ avec $|h| \leq \dfrac{x}{2}$, on obtient :

$$0 \leq e^{-ht} - 1 + ht \leq \frac{h^2t^2}{2}e^{\frac{xt}{2}},$$

soit, en multipliant par e^{-xt} :

$$0 \leq e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \leq \frac{h^2t^2}{2}e^{-\frac{xt}{2}}.$$

Pour $0 < |h| \leq \dfrac{x}{2}$ et $X > 0$, on a alors :

$$\left|\int_0^X \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt}\right)\psi(t)\, dt\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^X t^2\,|\psi(t)|\, e^{-\frac{xt}{2}}\, dt.$$

Avec $t^2\,|\psi(t)|\, e^{-\frac{xt}{2}} \leq te^{-\frac{xt}{2}}$ et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\frac{xt}{2}}\, dt$, on déduit que pour $0 < |h| \leq \dfrac{x}{2}$, on a :

$$\left|\int_0^X \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt}\right)\psi(t)\, dt\right| \leq |h|\,\alpha(x),$$

avec $\alpha(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 |\psi(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt$, ce qui s'écrit en tenant compte de la convergence de l'intégrale $\theta(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\, te^{-xt} dt$ (même démonstration que pour $\Psi(x)$) :

$$\left| \frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} - \theta(x) \right| \leq |h|\, \alpha(x).$$

En faisant tendre h vers 0, on déduit que la fonction Ψ est dérivable en $x > 0$ avec :

$$\forall x > 0,\ \Psi'(x) = \theta(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt} dt.$$

IV.4.c. Pour $x > 0$, on a :

$$\Psi'(x) = -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt\right) = \Im\left(\frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

IV.4.d. Avec $|\sin(t)| \leq t$ pour tout $t \geq 0$, on déduit que pour tout $x > 0$, on a :

$$|\Psi(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\psi(t)|\, e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x) = 0$.

IV.4.e. De **IV.4.c.** on déduit que :

$$\forall x > 0,\ \Psi(x) = K - \arctan(x)$$

et en faisant tendre x vers l'infini on a $K = \dfrac{\pi}{2}$. Pour $x = 1$, on a :

$$\Psi(1) = \int_0^{+\infty} \psi(t)\, e^{-t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

IV.4.f. On a $r_1 = 2 - \sqrt{2}$, $r_2 = 2 + \sqrt{2}$ (racines du polynôme de Laguerre de degré 2) et :

$$\lambda_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t - r_2}{r_1 - r_2} e^{-t} dt = \frac{2+\sqrt{2}}{4},$$
$$\lambda_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t - r_1}{r_2 - r_1} e^{-t} dt = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} \psi(t)\, e^{-t} dt \backsimeq \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \sin\left(2-\sqrt{2}\right) + \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \sin\left(2+\sqrt{2}\right) \backsimeq 0.794\,02$$

donne une approximation de $\frac{\pi}{4} \backsimeq 0.785\,39$.

2.3 Compléments

Ces remarques sont extraites de [29].

2.3.1 Formules de Rodrigues et polynômes orthogonaux classiques

Dans ce paragraphe nous allons décrire deux méthodes qui permettent de construire des polynômes orthogonaux.

On désigne toujours par ω une fonction poids sur un intervalle $I =]a, b[$, c'est-à-dire une fonction dans $\mathcal{C}^0(]a, b[)$ à valeurs réelles strictement positives et telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_a^b \left|t^k\right| \omega(t)\, dt < +\infty.$$

Théorème 2.1 *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction φ_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I,

(ii) pour tout $n \geq 1$ et tout k compris entre 0 et $n-1$ on a :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \varphi_n^{(k)}(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \varphi_n^{(k)}(x) = 0,$$

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $Q_n = \frac{1}{\omega}\varphi_n^{(n)}$ est polynomiale de degré n.

Dans ces conditions, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux relativement à la fonction poids ω sur l'intervalle I.

Proof. En utilisant la formule d'intégration par partie itérée on a, pour $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, $n \geq 1$ et $P \in F$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta Q_n(x)\, P(x)\, \omega(x)\, dx &= \int_\alpha^\beta \varphi_n^{(n)}(x)\, P(x)\, dx \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \varphi_n^{(n-k)} P^{(k-1)}\right]_\alpha^\beta + (-1)^n \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\, P^{(n)}(x)\, dx\end{aligned}$$

et en faisant tendre α vers a et β vers b, on obtient compte tenu de la condition (ii) :

$$\langle Q_n, P\rangle_\omega = (-1)^n \int_a^b \varphi_n(x) P^{(n)}(x)\, dx.$$

Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a $P^{(n)} = 0$ et $\langle Q_n, P\rangle_\omega = 0$. Chaque polynôme Q_k étant de degré égal à k, on en déduit que le système $\{Q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base orthogonale de F. ■

La relation $Q_n = \dfrac{1}{\omega}\varphi_n^{(n)}$ est appelée formule de Rodrigues.

Remarque 2.2 *Si λ_n est le coefficient dominant du polynôme Q_n, on a :*

$$\|Q_n\|_\omega^2 = \langle Q_n \mid Q_n\rangle_\omega = (-1)^n \lambda_n n! \int_a^b \varphi_n(x)\, dx.$$

Ce procédé nous permet de construire les familles classiques de polynômes orthogonaux, à savoir les polynômes de Legendre, Tchebychev de première et deuxième espèce, de Laguerre et d'Hermite.

Example 2.3 (Polynômes de Laguerre) *On se place sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ avec la fonction poids $\omega : t \mapsto t^\alpha e^{-t}$, où α est un réel donné strictement plus grand que -1 et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in I,\ \varphi_n(x) = x^{n+\alpha} e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, la fonction φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Pour n non nul et k entier compris entre 1 et $n-1$, la formule de dérivation de Leibniz nous donne pour tout $x \in I$:

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} a_j x^{n+\alpha-j} e^{-x},$$

les coefficients a_j étant donnés par :

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_j = C_k^j \prod_{i=0}^{j-1} (n+\alpha-i) \ \ (1 \leq j \leq k), \end{cases}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\varphi_n^{(k)}(x) = x^{n+\alpha-k} e^{-x} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} a_j x^{k-j},$$

formule encore valable pour $k = 0$*. Pour* $\alpha > -1$, $0 \leq k \leq n-1$*, l'exposant* $n + \alpha - k$ *est strictement positif de sorte que :*

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi_n^{(k)}(x) = 0.$$

Pour $k = n$*, on a pour tout* $x \in I$ *:*

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \omega(x) \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} a_j x^{n-j},$$

c'est-à-dire que $Q_n = \frac{1}{\omega} \varphi_n^{(n)}$ *est une fonction polynomiale de degré égal à* n *(le coefficient de* x^n *est* $\lambda_n = (-1)^n$*).*
On déduit alors du théorème précédent que la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie sur* $I =]0, +\infty[$ *par :*

$$\forall x \in I,\ Q_n(x) = x^{-\alpha} e^{x} \left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)^{(n)}$$

est une suite de polynômes orthogonaux relativement au poids $\omega : x \mapsto x^{\alpha} e^{-x}$ *sur l'intervalle* I*.*
Ces polynômes sont appelés polynômes de Laguerre sur $]0, +\infty[$*.*
La norme de Q_n*, pour* $n \geq 1$*, est donnée par :*

$$\|Q_n\|_{\omega}^2 = (-1)^n \lambda_n n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n! \Gamma(n + \alpha + 1).$$

Cette formule étant encore valable pour $n = 0$*.*

Example 2.4 (Polynômes d'Hermite) *On se place sur l'intervalle* $I = \mathbb{R}$ *avec la fonction poids* $\omega : t \mapsto e^{-t^2}$ *et* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in I,\ \varphi_n(x) = \omega(x) = e^{-x^2}.$$

La fonction ω *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* I*, avec pour tout entier naturel* n *et pour tout* $x \in I$ *:*

$$\omega^{(n)}(x) = Q_n(x) e^{-x^2},$$

où $Q_n = \frac{1}{\omega} \varphi_n^{(n)}$ *est une fonction polynomiale de degré égal à* n*. En effet le résultat est vrai pour* $n = 0$ *avec* $Q_0(x) = 1$ *et* $n = 1$ *avec* $Q_1(x) = -2x$ *et en le supposant acquis pour* $n - 1 \geq 1$*, on a :*

$$\omega^{(n)}(x) = \left(Q_{n-1}'(x) - 2x Q_{n-1}(x)\right) e^{-x^2} = Q_n(x) e^{-x^2}$$

avec :

$$Q_n(x) = Q'_{n-1}(x) - 2xQ_{n-1}(x)$$

de degré égal à n. De cette relation de récurrence on déduit également que le coefficient dominant du polynôme Q_n est $\lambda_n = (-1)^n 2^n$. Pour tout $n \geq 0$ on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \omega^{(n)}(x) = \lim_{x \to +\infty} \omega^{(n)}(x) = 0.$$

On déduit alors que la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I,\ Q_n(x) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$$

est une suite de polynômes orthogonaux relativement au poids $\omega : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
Ces polynômes sont appelés polynômes d'Hermite sur $\mathbb{R}$.
La norme de Q_n, pour $n \geq 0$, est donnée par :

$$\|Q_n\|_\omega^2 = (-1)^n \lambda_n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Nous allons maintenant décrire une deuxième méthode où les polynômes orthogonaux apparaissent comme des vecteurs propres d'un opérateur différentiel. Pour ce faire on se donne deux polynômes :

$$\begin{cases} A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \\ B(x) = b_0 + b_1 x \end{cases}$$

et on leur associe l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ défini sur F par :

$$\forall P \in F,\ \mathcal{L}(P) = AP'' + BP'.$$

Il est clair que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de F qui laisse stable chaque sous-espace F_n pour $n \in \mathbb{N}$.

On désigne, pour tout entier naturel n, par $\mathcal{L}_n$ la restriction de $\mathcal{L}$ à F_n.

En désignant par $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de F_n, on a $\mathcal{L}_n(e_k) \in F_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n. Il en résulte que la matrice de $\mathcal{L}_n$ dans cette base est triangulaire supérieure, chaque coefficient diagonal λ_k étant donné par le coefficient dominant de $\mathcal{L}_n(e_k)$, soit :

$$\lambda_k = k((k-1)a_2 + b_1)\ (0 \leq k \leq n).$$

Ces coefficients λ_k sont les valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{L}_n$.

Lemme 2.1 *Si, avec les notations qui précèdent, on a* $ja_2 + b_1 \neq 0$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}$, *alors pour tout entier naturel* n *l'endomorphisme* $\mathcal{L}_n$ *a* $n+1$ *valeurs propres distinctes données par :*

$$\lambda_k = k\left((k-1)\,a_2 + b_1\right)\ (0 \leq k \leq n)\,.$$

Cet endomorphisme est diagonalisable et pour tout entier k *compris entre* 0 *et* n, *l'espace propre associé à la valeur propre* λ_k *est de dimension* 1 *engendré par un polynôme* P_k *de degré égal à* k.

Proof. L'égalité $\lambda_p = \lambda_q$ est équivalente à :

$$\left(p^2 - p - q^2 + q\right) a_2 + (p-q)\, b_1 = 0,$$

soit :

$$(p-q)\left((p+q-1)\,a_2 + b_1\right) = 0.$$

Si on suppose que $ja_2 + b_1$ est non nul pour tout entier j, alors l'égalité précédente équivaut à $p = q$.

L'endomorphisme $\mathcal{L}_n$ a donc $n+1$ valeurs propres distinctes et en conséquence il est diagonalisable, chaque espace propre étant de dimension 1.

Si, pour k compris entre 0 et n, P_k est un vecteur propre non nul de $\mathcal{L}_n$ associé à la valeur propre λ_k, c'est aussi un vecteur propre de $\mathcal{L}_k$ associé à λ_k ($\mathcal{L}_k$ est la restriction à $\mathbb{R}_k[x]$ de $\mathcal{L}_n$ et les espaces propres sont de dimension 1) et donc $P_k \in \mathbb{R}_k[x]$. Puis en tenant compte du fait que $\{P_0, \cdots, P_k\}$ est une base de $\mathbb{R}_k[x]$, on déduit que P_k est nécessairement de degré k. ■

Dans ce qui suit on fait les hypothèses suivantes :

(i) $na_2 + b_1$ est non nul pour tout entier naturel n ;

(ii) la fonction poids ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et solution de l'équation différentielle :

$$A\omega' + A'\omega = B\omega$$

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} x^n A(x)\,\omega(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} x^n A(x)\,\omega(x) = 0.$$

Nous allons alors montrer que dans ces conditions, la base $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ formée des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}$ est une base de F orthogonale pour le produit scalaire défini par la fonction poids ω.

Lemme 2.2 *L'opérateur* $\mathcal{L}$ *est autoadjoint pour le produit scalaire défini par la fonction poids* ω, *c'est-à-dire que :*

$$\forall (P,Q) \in F \times F,\ \langle \mathcal{L}(P), Q\rangle_\omega = \langle P, \mathcal{L}(Q)\rangle_\omega\,.$$

Proof. Avec la condition (ii), on déduit que pour tout polynôme P on a :

$$\omega\mathcal{L}(P) = \omega\left(AP'' + BP'\right) = \omega AP'' + \left(A\omega' + A'\omega\right)P' = \left(\omega AP'\right)'$$

et pour tout polynôme Q, une intégration par parties donne en tenant compte de la condition (iii) :

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{L}(P), Q\rangle_\omega &= \int_a^b \left(\omega AP'\right)'(x)\,Q(x)\,dx \\ &= -\int_a^b A(x)\,P'(x)\,Q'(x)\,\omega(x)\,dx.\end{aligned}$$

L'expression obtenue étant une fonction symétrique de (P, Q), on déduit que :

$$\langle\mathcal{L}(P), Q\rangle_\omega = \langle\mathcal{L}(Q), P\rangle_\omega = \langle P, \mathcal{L}(Q)\rangle_\omega.$$

■

On en déduit alors le résultat annoncé.

Théorème 2.5 *Avec les notations qui précèdent, le système $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ formée des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}$ est une base orthogonale de F pour le produit scalaire défini par la fonction poids ω.*

Proof. Si n, m sont deux entiers naturels distincts, on a :

$$\lambda_n\langle P_n, P_m\rangle_\omega = \langle\mathcal{L}(P_n), P_m\rangle_\omega = \langle P_n, \mathcal{L}(P_m)\rangle_\omega = \lambda_m\langle P_n, P_m\rangle_\omega$$

et nécessairement $\langle P_n, P_m\rangle_\omega = 0$. ■

Nous allons maintenant retrouver une définition des polynômes orthogonaux P_n par une formule de Rodrigues. Pour ce faire, on introduit la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n = \omega A^n$$

en gardant toujours les hypothèses (i) à (iii).

Théorème 2.6 *Pour tout entier naturel n, la fonction φ_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et il existe une constante α_n non nulle telle que :*

$$P_n = \alpha_n \frac{1}{\omega}\varphi_n^{(n)}.$$

Proof. Pour $n = 0$, P_0 est un polynôme constant non nul ainsi que $\frac{1}{\omega}\varphi_0 = 1$.

On suppose donc que n est un entier naturel non nul. On montre tout d'abord par récurrence sur p compris entre 0 et n que φ_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I avec :

$$\varphi_n^{(p)} = \omega A^{n-p} Q_{n,p}$$

où $Q_{n,p}$ est un polynôme non nul de degré p.

Le résultat est vrai pour $p = 0$ avec $Q_{n,0} = 1$. La fonction ω étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I il en est de même de φ_n avec :

$$\varphi_n' = A^{n-1}\left(\omega' A + n\omega A'\right) = A^{n-1}\left(\omega B - \omega A' + n\omega A'\right) = \omega A^{n-1} Q_{n,1}$$

avec $Q_{n,1} = B + (n-1) A'$ de degré 1 (son coefficient dominant est égal à $b_1 + 2(n-1) a_2 \neq 0$).

En supposant le résultat acquis au rang $p \leq n-1$, on a :

$$\varphi_n^{(p+1)} = \left(\omega A^{n-p} Q_{n,p}\right)' = \omega A^{n-p-1} Q_{n,p+1}$$

avec :

$$Q_{n,p+1} = \left(B + (n-p-1) A'\right) Q_{n,p} + A Q_{n,p}' \in F_{p+1}.$$

En notant c_p le coefficient dominant de $Q_{n,p}$, celui de $Q_{n,p+1}$ est donné par :

$$c_{p+1} = \left(b_1 + (2n-p-2) a_2\right) c_p \neq 0$$

(pour $0 \leq p \leq n-1$, on a $2n-p-2 \geq 0$), c'est-à-dire que $Q_{n,p+1}$ est de degré $p+1$.

En définitive pour $n \geq 1$, φ_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $\varphi_n^{(n)} = \omega Q_{n,n}$, où $Q_{n,n}$ est un polynôme de degré n. De plus pour p compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \varphi_n^{(p)}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \left(Q_{n,p}(x) A^{n-p-1}(x)\right) A(x)\,\omega(x) = 0, \\ \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \varphi_n^{(p)}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \left(Q_{n,p}(x) A^{n-p-1}(x)\right) A(x)\,\omega(x) = 0 \end{cases}$$

(hypothèse (iii)). On déduit alors du théorème précédent que le système $\left\{\frac{1}{\omega}\varphi_n^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est une base orthogonale de F, chaque fonction $\frac{1}{\omega}\varphi_n^{(n)}$ étant polynomiale de degré n. Avec l'unicité aux constantes multiplicatives près d'une telle base, on déduit que les polynômes P_n et $\frac{1}{\omega}\varphi_n^{(n)}$ sont proportionnels. ■

On peut retrouver les polynômes orthogonaux classiques avec les résultats qui précèdent.

Example 2.7 (Polynômes de Laguerre) *On considère les polynômes A et B définis par :*

$$\begin{cases} A(x) = x, \\ B(x) = -x + \alpha + 1 \end{cases}$$

où α est un réel donné strictement plus grand que -1. L'opérateur différentiel associé est alors défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \ \mathcal{L}(P) = xP'' + (\alpha + 1 - x) P'$$

et ses valeurs propres sont données par :

$$\lambda_n = -n \ (n \in \mathbb{N}).$$

La fonction poids correspondante est solution de l'équation différentielle :

$$x\omega' = (\alpha - x)\,\omega.$$

Si on se place sur $I =]0, +\infty[$, on obtient $\omega(x) = Cx^\alpha e^{-x}$, où C est une constante réelle non nulle. Pour $\alpha > -1$, ω est une fonction poids sur I et l'hypothèse (iii) est vérifiée. En prenant $C = 1$, on retrouve les polynômes de Laguerre définis sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in I, \ P_n(x) = x^{-\alpha} e^x \left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)^{(n)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme P_n est solution polynomiale de l'équation différentielle :

$$xP_n'' + (\alpha + 1 - x) P_n' + nP_n = 0.$$

Example 2.8 (Polynômes d'Hermite) *On considère les polynômes A et B définis par :*

$$\begin{cases} A(x) = 1, \\ B(x) = -2x. \end{cases}$$

L'opérateur différentiel associé est alors défini par :

$$\forall P \in F, \ \mathcal{L}(P) = P'' - 2xP'$$

et ses valeurs propres sont données par :

$$\lambda_n = -2n \ (n \in \mathbb{N}).$$

La fonction poids correspondante est solution de l'équation différentielle :

$$\omega' = -2x\omega.$$

Si on se place sur $I = \mathbb{R}$, on obtient $\omega(x) = Ce^{-x^2}$, où C est une constante réelle non nulle. ω est bien une fonction poids sur I et l'hypothèse (iii) est vérifiée. En prenant $C = 1$, on retrouve les polynômes d'Hermite définis sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I,\ P_n(x) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme P_n est solution polynomiale de l'équation différentielle :

$$P_n'' - 2xP_n' + 2nP_n = 0.$$

Example 2.9 (Polynômes de Jacobi) *On considère les polynômes A et B définis par :*

$$\begin{cases} A(x) = x^2 - 1, \\ B(x) = (\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta \end{cases}$$

où α et β sont des réels donnés strictement plus grands que -1. L'opérateur différentiel associé est alors défini par :

$$\forall P \in F,\ \mathcal{L}(P) = \left(x^2 - 1\right)P'' + ((\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta)P'$$

et ses valeurs propres sont données par :

$$\lambda_n = n(\alpha + \beta + 1 + n)\ (n \in \mathbb{N}).$$

La fonction poids correspondante est solution de l'équation différentielle :

$$\left(x^2 - 1\right)\omega' = (\alpha(1 + x) - \beta(1 - x))\omega.$$

Si on se place sur $I =]-1, 1[$, on obtient $\omega(x) = C(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}$, où C est une constante réelle non nulle. Pour $\alpha > -1$ et $\beta > -1$, ω est bien une fonction poids sur I et la condition (iii) est vérifiée. Pour $C = 1$, les polynômes orthogonaux obtenus sont les polynômes de Jacobi. Ces polynômes sont définis par :

$$\forall x \in I,\ P_n(x) = (1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta}\left((1 - x)^{n+\alpha}(1 + x)^{n+\beta}\right)^{(n)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme P_n est solution polynomiale de l'équation différentielle :

$$\left(x^2 - 1\right)P_n'' + ((\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta)P_n' - n(\alpha + \beta + 1 + n)P_n = 0.$$

2.3.2 Systèmes de Tchebychev. Constantes de Lebesgue

Définition 2.1 *Soient p un entier naturel non nul et I un intervalle réel non réduit à un point. On dit qu'une famille de fonctions $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_p\}$ dans $\mathcal{C}(I)$ est un système de Tchebychev (ou système de Haar ou encore système unisolvent) si toute fonction non identiquement nulle θ appartenant à* $\operatorname{Vect}(\mathcal{T})$ *a au plus p racines dans l'intervalle I.*

Le résultat qui suit nous donne deux autres caractérisations des systèmes de Tchebychev.

On se donne un entier naturel non nul p, un intervalle réel I non réduit à un point, une famille de fonctions $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_p\}$ dans $\mathcal{C}(I)$ et pour tout $(p+1)$-uplet $(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ de points de I, on note :

$$D_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, \cdots, x_p) = \det \begin{pmatrix} \theta_0(x_0) & \theta_0(x_1) & \cdots & \theta_0(x_p) \\ \theta_1(x_0) & \theta_1(x_1) & \cdots & \theta_1(x_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_p(x_0) & \theta_p(x_1) & \cdots & \theta_p(x_p) \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que $D_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, \cdots, x_p) = 0$ si il existe deux indices $i \neq j$ compris entre 0 et p tels que $x_i = x_j$.

Théorème 2.10 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *$\mathcal{T}$ est un système de Tchebychev dans I ;*

(*ii*) *pour tout $(p+1)$-uplet $(x_0, \cdots, x_p)$ de points de I deux à deux distincts le déterminant $D_{\mathcal{T}}(x_0, \cdots, x_p)$ est non nul ;*

(*iii*) *pour tout $(p+1)$-uplet $(x_0, \cdots, x_p)$ de points de I deux à deux distincts et pour tout $(p+1)$-uplet $(y_0, \cdots, y_p)$ de réels il existe une unique fonction θ dans* $\operatorname{Vect}(\mathcal{T})$ *telle que :*

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, p\}, \ \theta(x_k) = y_k.$$

Proof. Soit $(x_0, \cdots, x_p)$ un $(p+1)$-uplet de points de I deux à deux distincts. Le déterminant $D_{\mathcal{T}}(x_0, \cdots, x_p)$ est nul si et seulement si la matrice $((\theta_i(x_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$ est non inversible ce qui équivaut à dire que sa transposée est non inversible et donc que le système linéaire de $p+1$ équations aux $p+1$ inconnues $a_0, \cdots, a_p$:

$$\sum_{j=0}^{p} a_j \theta_j(x_i) = 0 \ \ (0 \leq i \leq p)$$

a une solution non nulle dans $\mathbb{R}^{p+1}$, encore équivalent à dire qu'il existe une fonction non identiquement nulle $\theta = \sum\limits_{j=0}^{p} a_j \theta_j$ dans $\operatorname{Vect}(\mathcal{T})$ ayant $p+1$ racines distinctes dans I.

On a donc ainsi montré que le système $\mathcal{T}$ n'est pas de Tchebychev si et seulement si il existe un $(p+1)$-uplet $(x_0, \cdots, x_p)$ de points de I deux à deux distincts tel que le déterminant $D_{\mathcal{T}}(x_0, \cdots, x_p)$ soit nul, c'est-à-dire l'équivalence de (i) et (ii).

Dire que le déterminant $D_{\mathcal{T}}(x_0, \cdots, x_p)$ est non nul équivaut à dire que la transposée de la matrice $((\theta_i(x_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible et donc que pour tout $(p+1)$-uplet $(y_0, \cdots, y_p)$ de réels le système :

$$\sum_{j=0}^{p} a_j \theta_j(x_i) = y_i \ \ (0 \leq i \leq p)$$

a une unique solution, ce qui revient à dire qu'il existe une unique fonction θ dans $\operatorname{Vect}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, p\}, \ \theta(x_k) = y_k.$$

On a donc ainsi montré l'équivalence de (ii) et (iii). ■

On se donne un intervalle réel I non réduit à un point, $n+1$ réels deux à deux distincts $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dans I, une famille $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_n\}$ de fonctions définies sur I à valeurs réelles et on désigne par E le sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ engendré par $\mathcal{T}$.

Pour $(y_0, \cdots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, le problème d'interpolation :

$$\begin{cases} \theta \in \mathcal{T}, \\ \theta(x_i) = y_i \ \ (0 \leq i \leq n), \end{cases}$$

a une solution si et seulement si le système linéaire :

$$\sum_{j=0}^{n} \theta_j(x_i) a_j = y_i \ \ (0 \leq i \leq n)$$

a une solution $a = (a_0, \cdots, a_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Ce système a une solution pour tout y dans $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si la matrice de Gram $G = ((\theta_i(x_j)))_{0 \leq i,j \leq n}$ est inversible et cette matrice est inversible pour tout $n+1$-uplet $x_0, \cdots, x_n$ de réels deux à deux distincts dans I si et seulement si le système $\mathcal{T}$ est un système de Tchebychev sur I.

On suppose donc que $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_n\}$ est un système de Tchebychev sur I et on se donne $n+1$ réels $x_0, \cdots, x_n$ deux à deux distincts dans I. On note

$D_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ le déterminant de la matrice de Gram correspondante et pour tout entier i compris entre 0 et n, on définit la fonction L_i par :

$$\forall t \in I,\ L_i(t) = \frac{D_{\mathcal{T}}(x_0, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{D_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, \cdots, x_n)}.$$

En développant ce déterminant par rapport à la colonne numéro i, on vérifie que la fonction L_i est dans E et qu'elle vérifie les conditions d'interpolation :

$$\forall j \in \{0, \cdots, n\},\ L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i, \\ 0 \text{ si } j \neq i. \end{cases}$$

La solution dans E du problème d'interpolation précédent est alors donnée par :

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{D_{\mathcal{T}}(x_0, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)}{D_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, \cdots, x_n)}.$$

Example 2.11 *En prenant $\mathcal{T} = \{e_0, \cdots, e_n\}$ avec $e_j(t) = t^j$, on a $E = \mathbb{R}_n[x]$ et on retrouve les polynômes d'interpolation de Lagrange.*

Example 2.12 *En prenant $\mathcal{T} = \{c_0, \cdots, c_n, s_1, \cdots, s_n\}$ avec $c_k(t) = \cos(kt)$, $s_k(t) = \sin(kt)$, on a $E = \mathcal{P}_n$ (espace des polynômes trigonométriques de degré au plus n). Le système $\mathcal{T}$ est de Tchebychev sur l'intervalle $I = [0, 2\pi[$, donc pour toute suite $(x_i)_{0 \le i \le 2n}$ de points deux à deux distincts dans I et pour tout vecteur y dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, il existe un unique polynôme trigonométrique P solution du problème d'interpolation :*

$$\begin{cases} P \in \mathcal{P}_n, \\ P(x_i) = y_i \ (0 \le i \le 2n). \end{cases}$$

Ce polynôme peut s'écrire :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)}.$$

On se donne un intervalle réel fermé borné $I = [a, b]$ avec $a < b$ et pour tout entier naturel non nul n, une suite $(x_{n,i})_{0 \le i \le n}$ de réels deux à deux distincts dans I.

Pour tout fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, on note $L_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par :

$$\begin{cases} L_n(f) \in \mathbb{R}_n[x], \\ L_n(f)(x_{n,i}) = f(x_{n,i}) \ (0 \le i \le n). \end{cases}$$

On a :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_{n,i}) L_{n,i},$$

avec :

$$L_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_{n,j}}{x_{n,i} - x_{n,j}} \quad (0 \leq i \leq n).$$

On en déduit alors que L_n est un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{C}(I)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$ avec :

$$\|L_n\| = \sup_{x \in I} \sum_{i=0}^{n} |L_{n,i}(x)|.$$

La suite $(\lambda_n)_{n \geq 1} = (\|L_n\|)_{n \geq 1}$ est la suite des constantes de Lebesgue associées à la suite double $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n < +\infty}$.

Le lien entre la convergence uniforme des polynômes d'interpolation de Lagrange et la suite des constantes de Lebesgue est précisé par le résultat suivant, où $E_n(f)$ est le degré d'approximation uniforme de la fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ par des éléments de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par :

$$E_n(f) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - Q\|_\infty.$$

Théorème 2.13 *Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(I)$, on a :*

$$\forall n \geq 1, \ E_n(f) \leq \|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \lambda_n) E_n(f).$$

Proof. Avec $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[x]$, on déduit que $E_n(f) \leq \|f - L_n(f)\|_\infty$.

Pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|P - L_n(f)\|_\infty,$$

avec :

$$\|P - L_n(f)\|_\infty = \|L_n(P - f)\|_\infty \leq \lambda_n \|P - f\|_\infty.$$

On a donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \ \|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \lambda_n) \|P - f\|_\infty$$

et en prenant pour polynôme P le polynôme vérifiant $\|P - f\|_\infty = E_n(f)$, on obtient $\|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \lambda_n) E_n(f)$. ■

Avec le théorème de Weierstrass, on déduit que $\lim_{n \to +\infty} E_n(f) = 0$ et on a la condition suffisante de convergence qui suit.

Corollaire 2.13.1 (Lebesgue) *Si f est une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n E_n(f) = 0$, alors la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes d'interpolation de Lagrange de f converge uniformément vers f sur I.*

Dans le cas où les points $x_{n,i}$ sont équidistants dans l'intervalle $I = [a, b]$, soit :

$$x_{n,i} = a + i\frac{b-a}{n} \quad (0 \leq i \leq n),$$

en utilisant la paramétrisation $x = a + t(b-a)$ de I avec t compris entre 0 et n, on peut écrire les fonctions de base $L_{n,i}$ de la façon suivante :

$$L_{n,i}(x) = \lambda_{n,i}(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j} = \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (t-j) \quad (0 \leq i \leq n)$$

et les constantes de Lebesgue sont données par :

$$\lambda_n = \sup_{t\in[0,n]} \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{n,i}(t)|.$$

Théorème 2.14 *Pour des points d'interpolation équidistants dans I, on a :*

$$\forall n \geq 1,\ \frac{2^n}{4n^2} \leq \lambda_n \leq 2^n.$$

Proof. On a :

$$\lambda_n \geq \sum_{i=0}^{n} \left|\lambda_{n,i}\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

avec, pour tout entier i compris entre 0 et n :

$$\begin{aligned}\left|\lambda_{n,i}\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \frac{1}{i!\,(n-i)!}\frac{1}{\left|i-\frac{1}{2}\right|}\prod_{j=0}^{n}\left|j-\frac{1}{2}\right| \\ &= \frac{1}{i!\,(n-i)!}\frac{1}{\left|i-\frac{1}{2}\right|}\frac{1}{4}\prod_{j=2}^{n}\left(j-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

En tenant compte de $\left|i-\frac{1}{2}\right| \leq n$ et $\prod_{j=2}^{n}\left(j-\frac{1}{2}\right) = \prod_{j=1}^{n-1}\left(j+\frac{1}{2}\right) \geq (n-1)!$ on déduit que :

$$\left|\lambda_{n,i}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{i!\,(n-i)!}\frac{(n-1)!}{4n} = C_n^i \frac{1}{4n^2}$$

et :

$$\lambda_n \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{i=0}^{n} C_n^i = \frac{2^n}{4n^2}.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et pour tout réel t compris entre k et $k+1$ on a, pour tout entier i compris entre 0 et n :

$$\begin{aligned} |\lambda_{n,i}(t)| &\leq \frac{1}{i!\,(n-i)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i,}}^{k} (k+1-j) \prod_{\substack{j=k+1 \\ j\neq i,}}^{n} (j-k) \\ &\leq \frac{(k+1)!\,(n-k)!}{i!\,(n-i)!} \leq \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = C_n^i. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\lambda_n \leq \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$$

■

Si les points d'interpolation sont équidistants, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ et en utilisant le théorème de Banach-Steinhauss, on déduit le résultat suivant.

Théorème 2.15 *Pour des points d'interpolation équidistants dans I, il existe une fonction f dans $\mathcal{C}(I)$ pour laquelle la suite $(L_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.*

On rappelle que le polynôme de Tchebychev T_{n+1} est défini sur $I = [-1, 1]$ par :

$$\forall x \in [-1, 1]\,,\; T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x))$$

et qu'il a $n+1$ racines distinctes dans I données par :

$$x_{n,i} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \;(0 \leq i \leq n)\,.$$

On note $x_{n,i} = \cos(\theta_{n,i})$, avec $\theta_{n,i} = \dfrac{2i+1}{2n+2}\pi$ pour tout entier i compris entre 0 et n.

Théorème 2.16 *Si les points d'interpolation sont les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1}, il existe alors une constante réelle α telle que :*

$$\forall n \geq 2,\; \frac{2}{\pi}\ln(n) \leq \lambda_n \leq \alpha \ln(n)\,.$$

Proof. Les fonctions de base $L_{n,i}$, pour i compris entre 0 et n, peuvent s'écrire :

$$L_{n,i}(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{(x - x_{n,i}) T'_{n+1}(x_{n,i})}.$$

En écrivant $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta)$, avec $\theta = \arccos(x) \in [0,\pi]$ et en dérivant par rapport à la variable θ, on a :

$$\sin(\theta) T'_{n+1}(\cos(\theta)) = (n+1)\sin((n+1)\theta).$$

En tenant compte de $\sin((n+1)\theta_{n,i}) = (-1)^i$, on en déduit que :

$$T'_{n+1}(x_{n,i}) = T'_{n+1}(\cos(\theta_{n,i})) = \frac{(-1)^i (n+1)}{\sin(\theta_{n,i})}.$$

On peut donc écrire les fonctions de base $L_{n,i}$ sous la forme :

$$L_{n,i}(x) = \lambda_{n,i}(\theta) = \frac{(-1)^i \sin(\theta_{n,i})}{n+1} \frac{\cos((n+1)\theta)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_{n,i})}$$

et on a :

$$\lambda_n = \sup_{\theta \in [0,\pi]} \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{n,i}(\theta)|.$$

En particulier, on a :

$$\lambda_n \geq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{n,i}(0)| = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{\sin(\theta_{n,i})}{1 - \cos(\theta_{n,i})} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta_{n,i}}{2}\right).$$

En utilisant la décroissance de la fonction cotg sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que :

$$\lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\theta_{n,0}}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}(\theta)\, d\theta = -\frac{2}{\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\theta_{n,0}}{2}\right)\right)$$

et avec :

$$\sin\left(\frac{\theta_{n,0}}{2}\right) \leq \frac{\theta_{n,0}}{2} = \frac{\pi}{4(n+1)},$$

on aboutit à :

$$\lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{4(n+1)}{\pi}\right) \geq \frac{2}{\pi} \ln(n).$$

D'autre part, en écrivant, pour θ réel compris entre 0 et π et i entier compris entre 0 et n, que :

$$|\cos(\theta) - \cos(\theta_{n,i})| = 2\sin\left(\frac{\theta + \theta_{n,i}}{2}\right) \left|\sin\left(\frac{\theta - \theta_{n,i}}{2}\right)\right|,$$

en utilisant l'inégalité :

$$\left|\sin\left(\frac{\theta-\theta_{n,i}}{2}\right)\right| \geq \frac{2}{\pi}\left|\frac{\theta-\theta_{n,i}}{2}\right|$$

(on a $\left|\frac{\theta-\theta_{n,i}}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2}$) et la concavité de la fonction sin sur $[0,\pi]$ qui permet d'écrire :

$$\sin\left(\frac{\theta+\theta_{n,i}}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sin(\theta)+\sin(\theta_{n,i})\right) \geq \frac{1}{2}\sin(\theta_{n,i}),$$

on obtient la majoration :

$$|\lambda_{n,i}(\theta)| \leq \frac{\pi}{n+1}\frac{|\cos((n+1)\theta)|}{|\theta-\theta_{n,i}|}$$

(on a $\lambda_{n,i}(\theta_{n,i}) = 1$ et avec $\cos((n+1)\theta_{n,i}) = 0$, on déduit que le membre de droite de cette inégalité se prolonge par continuité en $\theta_{n,i}$).

Si $\theta \in [0,\pi]$, il existe un entier k compris entre 0 et n tel que :

$$|\theta-\theta_{n,k}| = \min_{0\leq i\leq n}|\theta-\theta_{n,i}|.$$

On a alors $|\theta_{n,k}-\theta| \leq \frac{\pi}{2(n+1)}$ et pour tout entier i compris entre 0 et n, distinct de k, $k-1$ et $k+1$:

$$|\theta-\theta_{n,i}| \geq |\theta_{n,i}-\theta_{n,k}| - |\theta_{n,k}-\theta| \geq (|i-k|-1)\frac{\pi}{n+1}.$$

Pour i compris entre $k-1$ et $k+1$, on utilise l'inégalité des accroissements finis pour écrire :

$$|\cos((n+1)\theta)| = |\cos((n+1)\theta) - \cos((n+1)\theta_{n,i})| \leq (n+1)|\theta-\theta_{n,i}|.$$

Ces inégalités nous donnent la majoration :

$$\sum_{i=0}^{n}|\lambda_{n,i}(\theta)| \leq \sum_{\substack{i=0\\|i-k|>1}}^{n}\frac{1}{|i-k|-1} + 3\pi \leq 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + 3\pi.$$

En notant $\gamma_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln(n)$, on aboutit à l'inégalité :

$$\lambda_n \leq 2\gamma_n + 3\pi + 2\ln(n)$$

et avec $\lim_{n\to+\infty}\gamma_n = \gamma$ (la constante d'Euler), on déduit qu'il existe un réel α tel que $\lambda_n \leq \alpha\ln(n)$ pour tout $n \geq 2$. ■

En utilisant le théorème de Jackson, on déduit le résultat suivant, analogue à celui obtenu dans le cadre des séries de Fourier.

Théorème 2.17 (Dini-Lipschitz) *Si, pour tout entier $n \geq 1$, les points d'interpolation sont les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1} sur $I = [-1, 1]$ et si $f \in \mathcal{C}(I)$ vérifie une condition de Dini-Lipschitz, alors la suite $(L_n(f))_{n\geq 1}$ des polynômes d'interpolation de Lagrange de f correspondants converge uniformément vers f sur I.*

Proof. Avec le théorème de Jackson, on a :

$$E_n(f)\lambda_n \leq 2\omega_f\left(\frac{2\pi^2}{n+2}\right)\alpha\ln(n) \leq 2\alpha\left(1+2\pi^2\right)\omega_f\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

où ω_f est le module de continuité de f, ce qui entraîne la convergence uniforme sur I de la suite $(L_n(f))_{n\geq 1}$ vers f. ■

Le résultat précédent s'applique pour une fonction de classe de Hölder, lipschitzienne ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Pour des points d'interpolation quelconques on a le résultat suivant.

Théorème 2.18 (Faber) *Si $(x_{n,i})_{0\leq i\leq n<+\infty}$ est une suite de points de l'intervalle compact I telle que pour tout $n \geq 1$ les points $x_{n,i}$ pour $0 \leq i \leq n$ sont deux à deux distincts dans I, alors en notant pour tout entier naturel non nul n, L_n l'opérateur de Lagrange sur $\mathcal{C}(I)$ associé aux points $(x_{n,i})_{0\leq i\leq n}$, on a :*

$$\forall n \geq 1,\ \lambda_n = \|L_n\| \geq \frac{\ln(n)}{2(\pi+2)}$$

et il existe une fonction f dans $\mathcal{C}(I)$ pour laquelle la suite $(L_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

Remarque 2.19 *De manière un peu plus précise, on peut montrer qu'il existe une constante α telle que pour tout choix des points d'interpolation $x_{n,i}$ dans l'intervalle I, on a :*

$$\lambda_n \geq \frac{2}{\pi}\ln(n) - \alpha.$$

En choisissant pour points d'interpolations les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1}, on a $\lambda_n \backsim \frac{2}{\pi}\ln(n)$, c'est-à-dire que ce choix est l'un des meilleurs.

2.3.3 Formules de quadrature

On suppose, pour ce paragraphe, que $I = [a, b]$ est un intervalle fermé et borné.

Pour tout entier naturel n, on se donne une suite $(x_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ de points deux à deux distincts dans l'intervalle I et une suite de réels non tous nuls

$(\lambda_{n,k})_{0\leq k\leq n}$. A ces suites on associe la fonctionnelle linéaire φ_n définie sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

La fonctionnelle φ_n est continue avec :

$$\|\varphi_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda_{n,k}|.$$

Les formules de Newton-Cotes sont décrites par les fonctionnelles φ_n définies par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

avec :

$$\lambda_{n,k} = \frac{b-a}{n}\mu_{n,k}\ \ (0 \leq k \leq n),$$

en posant :

$$\sigma_{n,k}(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j},\ \mu_{n,k} = \int_0^n \sigma_{n,k}(t)\,dt\ \ (0 \leq k \leq n).$$

Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n on a :

$$\int_a^b P(x)\,dx = \varphi_n(P).$$

En prenant pour polynôme P le polynôme constant égal à 1, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = b-a.$$

Pour $n = 1$ on a $\mu_{1,0} = \mu_{1,1} = \dfrac{1}{2}$ et la formule de quadrature correspondante est la formule du trapèze.

Pour $n = 2$ on a $\mu_{2,0} = \mu_{2,2} = \dfrac{1}{3}$, $\mu_{2,1} = \dfrac{4}{3}$ et la formule de quadrature correspondante est la formule de Simpson.

Pour $n = 3$ on a $\mu_{3,0} = \mu_{3,3} = \dfrac{3}{8}$, $\mu_{3,1} = \dfrac{9}{8}$.

Pour $n = 4$ on a $\mu_{4,0} = \mu_{4,4} = \dfrac{14}{45}$, $\mu_{4,1} = \mu_{4,3} = \dfrac{64}{45}$, $\mu_{4,2} = \dfrac{8}{15}$ et la formule de quadrature correspondante est la formule de Boole-Villarceau.

Pour $n \geq 8$, certains des coefficients $\lambda_{n,k}$ sont négatifs, ce qui a pour effet de rendre la méthode de quadrature correspondante sensible aux erreurs d'arrondis.

En pratique on utilise plutôt les formules de Newton-Cotes composites qui consistent à se fixer un entier naturel non nul p (égal à 1, 2, 4 ou 6) et pour tout entier naturel non nul n on utilise une formule de Newton-Cotes d'ordre p sur chacun des intervalles $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ pour k compris entre 0 et $n-1$. Ces formules sont décrites par les fonctionnelles φ_n définies par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{np} \sum_{j=0}^{p} \mu_{p,j} f\left(x_{n,k} + j\frac{b-a}{np}\right).$$

En écrivant :

$$\varphi_n(f) = \sum_{j=0}^{p} \frac{\mu_{p,j}}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(x_{n,k} + j\frac{b-a}{np}\right) = \sum_{j=0}^{p} \frac{\mu_{p,j}}{p} S_{n,p,j}(f)$$

et en remarquant que pour tout entier j compris entre 0 et p, $S_{n,p,j}(f)$ est une somme de Riemann, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_{n,p,j}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

et avec $\sum\limits_{j=0}^{p} \dfrac{\mu_{p,j}}{p} = 1$, on déduit que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque 2.20 *Avec les méthodes de Newton-Cotes élémentaires, on n'a pas nécessairement* $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ *pour toute fonction f continue sur I (phénomène de Runge).*

Si ω est une fonction poids sur l'intervalle I, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux associée avec P_n de degré n pour tout entier naturel n, en notant $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ la suite des racines du polynôme P_n, les formules de quadrature de Gauss sont décrites par les fonctionnelles linéaires φ_n définies sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}),$$

où la suite $(\lambda_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ des coefficients de Christoffel est définie par :

$$\lambda_{n,k} = \int_a^b L_{n,k}(t)\,\omega(t)\,dt = \int_a^b (L_{n,k}(t))^2\,\omega(t)\,dt \ \ (0 \leq k \leq n),$$

où on a posé :

$$L_{n,k}(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t - x_{n,j}}{x_{n,k} - x_{n,j}} \ \ (0 \leq k \leq n).$$

Tous les coefficients $\lambda_{n,k}$ étant strictement positifs, on déduit que la fonctionnelle φ_n est positive.

Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n-1$ on a :

$$\int_a^b P(x)\,\omega(x)\,dx = \varphi_n(P).$$

En prenant pour polynôme P le polynôme constant égal à 1, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} = \int_a^b \pi(x)\,dx.$$

En utilisant la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathcal{C}(I)$ et le théorème de Banach-Steinhauss, on a le résultat suivant.

Théorème 2.21 (Polya) *Soient, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et φ des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{C}(I)$. On a :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f)$$

si et seulement si :

$$\forall f \in \{e_j \mid j \in \mathbb{N}\},\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f)$$

et la suite $(\|\varphi_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Dans le cas où les fonctionnelles φ_n décrivent des formules de quadrature on a le résultat suivant.

Théorème 2.22 *Soient, pour tout entier naturel n, $(x_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ une suite de points de I deux à deux distincts, $(\lambda_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ une suite de réels non tous nuls, φ_n la fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{C}(I)$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

et φ une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{C}(I)$. On a alors :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f)$$

si et seulement si :

$$\forall f \in \{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}, \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f)$$

et la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |\lambda_{n,k}|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *est bornée.*

Dans le cas où les coefficients $\lambda_{n,k}$ sont tous positifs, on a le résultat suivant.

Théorème 2.23 (Stekloff) *Soient, pour tout entier naturel n, $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ une suite de points de I deux à deux distincts, $(\lambda_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ une suite de réels strictement positifs, φ_n la fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{C}(I)$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

et φ une fonctionnelle linéaire positive sur $\mathcal{C}(I)$. On a alors :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f)$$

si et seulement si :

$$\forall f \in \{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}, \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(f) = \varphi(f).$$

Il en résulte que les méthodes de quadrature de Gauss correspondantes sont convergentes. Soit le résultat suivant.

Théorème 2.24 (Stieltjes) *Avec les notations qui précèdent, on a :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}) = \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx.$$

Chapitre 3

CAPES externe 2001, épreuve 1

3.1 Énoncé

Notations et objet du problème

On désigne par :
$\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels ;*
$\mathbb{N}^*$ *l'ensemble des entiers naturels non nuls ;*
$\mathbb{Q}$ *le corps des nombres rationnels ;*
$\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels ;*
$\mathbb{R}^+$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *constitué des nombres réels positifs ou nuls ;*
$\mathbb{R}^{+*}$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *constitué des nombres réels strictement positifs.*
$\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ *l'espace vectoriel des fonctions continues de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, *on note* $[x]$ *la partie entière de* x. *On rappelle que c'est l'unique entier relatif défini par :*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Dans la partie ***I****, on étudie l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) f(y)$ *sur* $\mathbb{R}^+$.

Cette équation fonctionnelle est utilisée pour donner une caractérisation des variables aléatoires dites sans mémoire dans la partie **III**.

Dans la partie **II***, on étudie quelques propriétés du produit de convolution des fonctions continues sur* $\mathbb{R}^+$. *Le produit de convolution intervient dans l'étude de variables aléatoires dans la partie* **III**.

Les trois dernières parties sont consacrées à la modélisation probabiliste d'un problème de réception de messages par un réseau informatique. Dans les *parties* **IV** *et* **V***, on étudie le comportement asymptotique d'une suite de maximum de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson.*

Les parties **II.1***. et* **II.2.** *sont indépendantes des parties* **III***,* **IV** *et* **V***.*

– I – L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}^+$

Pour cette partie, on désigne par f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) f(y). \tag{3.1}$$

I.1. Vérifier que la fonction f est à valeurs positives ou nulles.

I.2. Montrer que si $f(0) = 0$, alors la fonction f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit on suppose que f est non identiquement nulle.

I.3. Déterminer la valeur de $f(0)$.

I.4. Soient x un réel positif ou nul et n un entier naturel non nul. Exprimer $f(nx)$ et $f\left(\frac{1}{n}x\right)$ en fonction de $f(x)$ et de n.

I.5. Soient x un réel positif ou nul, $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel où p et q sont deux entiers strictement positifs. En calculant $f(q(rx))$ de deux manières, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et de r.

I.6. *Pour cette question, on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que $f(\alpha) = 0$.*

I.6.1. Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergente vers 0, telle que $f(x_n) = 0$ pour tout entier naturel n.

I.6.2. Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs réelles strictement positives.

I.7. On suppose que la fonction f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif ou nul.

I.8. On suppose que la fonction f est continue à droite en 0. Montrer qu'elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$ et conclure.

I.9. On suppose qu'il existe deux réels A et B vérifiant $0 \leq A < B$, tels que f soit majorée sur l'intervalle $[A, B]$.

I.9.1. Montrer que sur l'intervalle $[0, B - A]$, la fonction f est bornée de borne inférieure strictement positive.

I.9.2. Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

En conclusion de cette partie, le résultat suivant a été montré :
Si une fonction f à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^+$:
- vérifie l'équation (3.1) ,
- est non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- est majorée sur un intervalle de longueur strictement positive,
  alors il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout réel x positif ou nul.

– II – Produit de convolution

On admet le résultat suivant : Si R est un réel strictement positif et ψ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le carré $C_R = [0,R]^2$, alors *:*

$$\int_0^R \left(\int_0^R \psi(t,x)\,dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_0^R \psi(t,x)\,dx \right) dt.$$

II.1. Soient R un réel strictement positif et φ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle T_R défini par *:*

$$T_R = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le t \le x \le R \right\}.$$

Le but de cette question **II.1.** est de montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t,x)\,dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_t^R \varphi(t,x)\,dx \right) dt. \tag{3.2}$$

II.1.1. Montrer que la fonction ψ définie sur $C_R = [0,R]^2$ par :

$$\forall (t,x) \in C_R,\ \psi(t,x) = \begin{cases} \varphi(t,x) - \varphi(t,t) & \text{si } (t,x) \in T_R, \\ 0 & \text{si } (t,x) \notin T_R, \end{cases}$$

est continue sur C_R.

II.1.2. Soient R un réel strictement positif et k une fonction à valeurs réelles définie et continue sur l'intervalle $[0,R]$. Montrer, à l'aide de dérivations, que :

$$\forall z \in [0,R],\ \int_0^z \left(\int_0^x k(t)\,dt \right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z k(t)\,dx \right) dt.$$

II.1.3. Montrer l'aide de ce qui précède l'identité (3.2) .

II.2. *Pour toutes fonctions f, g appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$, on définit la fonction $f * g$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f * g(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

II.2.1. Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.

On admet que la loi $*$ ainsi définie est commutative et associative.

On suppose, dans les questions qui suivent, que f et g sont deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ à valeurs positives ou nulles dont les intégrales impropres sur $\mathbb{R}^+$ sont convergentes.

II.2.2. Montrer que pour tout réel R strictement positif on a :

$$\int_0^R f * g(x)\, dx = \int_0^R g(t) \left(\int_0^{R-t} f(x)\, dx \right) dt.$$

II.2.3. Montrer que pour tout réel R strictement positif on a :

$$\int_0^{\frac{R}{2}} f(x)\, dx \int_0^{\frac{R}{2}} g(t)\, dt \leq \int_0^R f * g(x)\, dx \leq \int_0^R f(x)\, dx \int_0^R g(t)\, dt.$$

II.2.4. Déduire de ce qui précède que l'intégrale impropre de $f * g$ sur $\mathbb{R}^+$ est convergente et que :

$$\int_0^{+\infty} f * g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \int_0^{+\infty} g(t)\, dt.$$

II.3. Pour tout réel λ strictement positif, on désigne par f_λ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

On définit la suite $(f_\lambda^{*n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ des puissances de convolution de la fonction f_λ par $f_\lambda^{*1} = f_\lambda$ et pour tout entier naturel non nul n, $f_\lambda^{*(n+1)} = f_\lambda^{*n} * f_\lambda$.

II.3.1. Calculer f_λ^{*2}.

II.3.2. Calculer f_λ^{*n} pour tout entier naturel non nul n.

– III– Variables aléatoires sans mémoire et temps d'attente

On rappelle que :

- *si X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, alors sa fonction de répartition est la fonction notée F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x);$$

- *la fonction de répartition caractérise la loi de la variable aléatoire réelle X ;*
- *une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle s'il existe un réel λ strictement positif tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \displaystyle\int_0^x f_\lambda(t)\,dt & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

où f_λ est la fonction définie en **II.3**.

On dit alors que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

III.1. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

III.1.1. Expliciter sa fonction de répartition.

III.1.2. Montrer que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ P((X > s+t) \mid (X > t)) = P(X > s) \qquad (3.3)$$

où la notation $P(A \mid B)$ représente la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B de probabilité non nulle est réalisé. On rappelle que :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

La propriété (3.3) *se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.*

III.2. Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. On note F_T sa fonction de répartition.

III.2.1. Montrer que la fonction G_T définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ G_T(x) = 1 - F_T(x)$$

vérifie l'équation fonctionnelle (3.1).

III.2.2. Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

III.3. *Pour cette partie et les suivantes, on s'intéresse à la modélisation probabiliste d'un problème concernant l'arrivée de messages vers un réseau informatique.*

On désigne par T_1 le temps d'attente pour le réseau d'un premier message à partir de l'instant initial $t = 0$ et, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, par T_k le temps d'attente du k-ième message à partir de l'arrivée du $(k-1)$-ième.

On suppose que les T_k, pour $k \geq 1$, sont des variables aléatoires suivant une même loi exponentielle de paramètre λ strictement positif et que pour tout entier $n \geq 2$, les variables aléatoires $T_1, \cdots, T_n$ sont indépendantes.
Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par S_n la variable aléatoire réelle définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

On admet que la fonction de répartition F_{S_n} de S_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \displaystyle\int_0^x f_\lambda^{*n}(t)\, dt & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

III.3.1. Donner une interprétation de la variable aléatoire S_n.

Pour les cinq questions suivantes, t est un réel strictement positif fixé. Pour les solutions, on pourra utiliser les variables de type S_i $(i \in \mathbb{N}^*)$ et leur fonction de répartition.

III.3.2. Calculer la probabilité pour qu'aucun message ne soit arrivé entre les instants 0 et t.

III.3.3. Calculer la probabilité pour qu'au plus un message soit arrivé entre les instants 0 et t.

Soit n un entier naturel.

III.3.4. Calculer la probabilité pour qu'au plus n messages soient arrivés entre les instants 0 et t.

III.3.5. Calculer la probabilité pour qu'exactement n messages soient arrivés entre les instants 0 et t.

III.3.6. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire N_t indiquant le nombre de messages reçus entre les instants 0 et t ?

– IV – Comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires

Dans ce qui suit, Y est une variable aléatoire réelle, suivant une loi de Poisson de paramètre μ, réel strictement positif. On rappelle que cette loi est déterminée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y = k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}.$$

Sa fonction de répartition, dont la définition est rappelée au début de la partie **III**, *est notée* F_Y. *On note* G_Y *la fonction définie sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à* -1 *par :*

$$\forall m \in \{-1\} \cup \mathbb{N},\ G_Y(m) = 1 - F_Y(m).$$

Pour tout entier naturel non nul n, *on désigne par* A_n *le nombre de messages arrivés dans l'intervalle de temps* $[n-1, n[$. *On suppose que les* A_n *sont des variables aléatoires suivant une même loi de Poisson de paramètre* μ *strictement positif et que pour tout entier* $n \geq 2$, *les variables aléatoires* $A_1, \cdots, A_n$ *sont indépendantes.*

Le réseau informatique ayant une capacité limitée de réception de messages sur chaque unité de temps, il est intéressant d'étudier la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n = \max\{A_1, \cdots, A_n\}$$

(*On admet que les* M_n *sont des variables aléatoires réelles).*

IV.1. Que représente la variable aléatoire M_n pour le modèle proposé.

IV.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N},\ P(M_n \leq m) = (1 - G_Y(m))^n.$$

IV.3.

IV.3.1. Montrer que, pour tout entier naturel m strictement supérieur à $\mu-2$, on a :

$$\frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!} \leq G_Y(m) \leq \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{m+2}}.$$

IV.3.2. En déduire un équivalent de $G_Y(m)$ pour m tendant vers l'infini.

IV.3.3. En déduire un équivalent de $\dfrac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}$ pour m tendant vers l'infini.

IV.4. *On définit la fonction* G_C *sur* $[-1, +\infty[$ *par :*

$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ G_C(x) = G_Y([x])\left(\frac{G_Y([x]+1)}{G_Y([x])}\right)^{x-[x]}.$$

IV.4.1. Montrer que la fonction G_C est continue sur $[-1, +\infty[$.

IV.4.2. Montrer que la fonction G_C est strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$.

IV.4.3. Montrer que la fonction G_C définit un homéomorphisme de $[-1, +\infty[$ sur $]0, 1]$.

IV.5. *On définit la suite de réels* $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *par :*

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \alpha_m = \frac{G_C\left(m+\dfrac{1}{2}\right)}{G_C(m)}.$$

IV.5.1. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \alpha_m = \sqrt{\frac{G_C(m+1)}{G_C(m)}} = \frac{G_C(m+1)}{G_C\left(m+\dfrac{1}{2}\right)}.$$

IV.5.2. Montrer que la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

IV.6. *En notant* G_C^{-1} *l'application réciproque de* G_C, on *définit les suites de réels* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = G_C^{-1}\left(\frac{1}{n}\right),\ I_n = \left[a_n + \frac{1}{2}\right].$$

IV.6.1. Etudier les limites éventuelles des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

IV.6.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} 0 < G_c(I_n+1) \leq \dfrac{\alpha_{I_n}}{n}, \\ G_c(I_n-1) \geq \dfrac{1}{n\alpha_{(I_n-1)}}. \end{cases}$$

IV.7. On définit les suites de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} p_n = P(M_n \leq I_n + 1), \\ q_n = P(M_n \leq I_n - 1). \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.

IV.8. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[P(M_n = I_n) + P(M_n = I_n + 1)\right] = 1.$$

IV.9. *Application numérique.* On utilisera la table numérique suivante, pour

$\mu = 0,4$:

k	$P(Y=k)$	$F_Y(k)$	$G_Y(k)$
0	0,67032005	0,67032005	0,329679954
1	0,26812802	0,93844806	0,061551936
2	0,0536256	0,99207367	0,007926332
3	0,00715008	0,99922375	0,000776251
4	0,00071501	0,99993876	6,12433E-05
5	5,7201E-05	0,99999596	4,04268E-06
6	3,8134E-06	0,99999977	2,29307E-07
7	2,1791E-07	0,99999999	1,13997E-08

IV.9.1. Calculer I_{10^5}.

IV.9.2. Calculer $P(M_{10^5} = I_{10^5}) + P(M_{10^5} = I_{10^5} + 1)$.

IV.9.3. Commenter ce résultat.

– V – Étude des suites $P(M_n = I_n)$ et $P(M_n = I_n + 1)$

On définit les suites de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} r_n = P(M_n = I_n + 1), \\ s_n = P(M_n = I_n). \end{cases}$$

où M_n est la variable aléatoire définie au début de la partie **IV** *et le réel I_n est défini en* **IV.6**.

V.1. *On définit la fonction H sur $[-1, +\infty[$ par :*

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \ H(x) = \frac{1}{G_C(x)},$$

où G_C est la fonction définie en **IV.4**.

V.1.1. Montrer que la fonction H est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ des réels positifs non entiers.

V.1.2. Calculer, pour tout entier naturel m :

$$h_m = \inf_{x\in]m,m+1[} H'(x)$$

et montrer que :

$$\lim_{m\to+\infty} h_m = +\infty.$$

V.2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie en **IV.6.**

V.2.1. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H(a_{n+1}) - H(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = +\infty.$$

V.2.2. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

V.3. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{I_n - a_n \mid n \geq 1\}$$

est dense dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

V.4.

V.4.1. Montrer que pour tout entier m non nul tel que :

$$I_m - a_m < -\frac{1}{4},$$

on a :

$$G_C(I_m) > \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}},$$

où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie en **IV.5.**

V.4.2. Montrer qu'il existe une sous-suite $\left(r_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 1, soit :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\varphi(n)} = I_{\varphi(n)} + 1\right) = 1.$$

V.4.3. Montrer que pour tout entier m non nul tel que :

$$I_m - a_m > \frac{1}{4},$$

on a :

$$G_C(I_m) < \frac{\sqrt{\alpha_{(I_m-1)}}}{m}.$$

V.4.4. Montrer qu'il existe une sous-suite $\left(s_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 1, soit :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\psi(n)} = I_{\psi(n)}\right) = 1.$$

3.2 Corrigé

– I – L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}^+$

I.1. Pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0.$$

I.2. Si $f(0) = 0$, on a alors pour tout réel x positif ou nul :

$$f(x) = f(x+0) = f(x) f(0) = 0.$$

I.3. On a $f(0) = f(0)^2$ avec $f(0)$ non nul, ce qui équivaut à $f(0) = 1$.

I.4. Par récurrence sur $n \geq 1$ on vérifie facilement que $f(nx) = f(x)^n$, puis avec $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n$, on déduit que $f\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)^{\frac{1}{n}}$.

I.5. De $f(q(rx)) = f(px) = f(x)^p$ et $f(q(rx)) = f(rx)^q$, on déduit que $f(rx) = f(x)^r$ (f est à valeurs positives).

I.6.

I.6.1. On peut prendre $x_n = \dfrac{\alpha}{n+1}$. On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et en utilisant **I.4.** pour tout entier naturel n, on a :

$$f(x_n) = f(\alpha)^{\frac{1}{n+1}} = 0.$$

I.6.2. Soit x un réel strictement positif. On considère un élément x_n de la suite définie en **I.6.1**. vérifiant $x_n < x$. On a alors :

$$f(x) = f(x - x_n) f(x_n) = 0.$$

En définitive, l'unique solution de (3.1) est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0, \\ 0 \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

I.7. On pose $a = \ln(f(1))$ (on a $f(1) > 0$) et on a :

$$\forall r \in \mathbb{Q}^{+*},\ f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = e^{ar}.$$

Soit x un réel positif. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_n est l'approximation décimale par excès de x à l'ordre n. La fonction f étant continue à droite en x, on a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{ax_n} = e^{ax}$.

I.8. Soit x un réel positif. On a :

$$\forall h > 0,\ f(x+h) - f(x) = f(x)\left(f(h) - 1\right) = f(x)\left(f(h) - f(0)\right),$$

et donc, pour f continue à droite en 0 :

$$\lim_{h \to 0^+} f(x+h) - f(x) = f(x) \,.\, \lim_{h \to 0^+} \left(f(h) - f(0)\right) = 0.$$

Ce qui exprime la continuité à droite de f en x. On obtient la même conclusion que la question précédente, c'est-à-dire que f est une fonction exponentielle.

I.9.

I.9.1. Soit M un majorant de f sur l'intervalle $[A, B]$. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0, B - A]$, les réels $(x + A)$ et $(B - x)$ appartiennent à l'intervalle $[A, B]$, donc, en tenant compte du fait que $f(A)$, $f(B - x)$ et M sont strictement positifs :

$$f(x) = \frac{f(x+A)}{f(A)} \leq \frac{M}{f(A)}$$

et

$$f(x) = \frac{f(B)}{f(B-x)} \geqslant \frac{f(B)}{M} > 0.$$

I.9.2. Soit n un entier strictement positif. Si x est dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{B-A}{n}\right]$, on a alors $f(x) = f(nx)^{\frac{1}{n}}$ avec nx dans $[0, B - A]$. La fonction racine n-ème étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\left(\frac{f(B)}{M}\right)^{\frac{1}{n}} \leq f(x) \leq \left(\frac{M}{f(A)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

D'autre part, les deux réels $\dfrac{f(B)}{M}$ et $\dfrac{M}{f(A)}$ étant strictement positifs, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(B)}{M}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{M}{f(A)}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

On déduit donc que pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier strictement positif n_0, tel que,

$$\forall x \in \left[0, \frac{B-A}{n_0}\right],\ 1 - \varepsilon \leq \left(\frac{f(B)}{M}\right)^{\frac{1}{n_0}} \leq f(x) \leq \left(\frac{M}{f(A)}\right)^{\frac{1}{n_0}} \leq 1 + \varepsilon,$$

ce qui prouve la continuité à droite de f en 0.

– II – Produit de convolution

II.0. Démonstration du résultat admis. Si ψ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le carré $C_R = [0, R]^2$, on désigne par α et β les fonctions définies sur $[0, R]$ par :

$$\begin{cases} \alpha(z) = \displaystyle\int_0^z \left(\int_0^R \psi(t, x)\, dt \right) dx, \\ \beta(z) = \displaystyle\int_0^R \left(\int_0^z \psi(t, x)\, dx \right) dt. \end{cases}$$

La fonction ψ est continue des deux variables et l'intégration se fait sur un intervalle compact, on déduit alors que la fonction :

$$\gamma : x \mapsto \int_0^R \psi(t, x)\, dt$$

est continue sur $[0, R]$. La fonction α qui est une primitive de γ est donc de classes C^1, avec :

$$\forall z \in [0, R],\ \alpha'(z) = \int_0^R \psi(t, z)\, dt.$$

On désigne par χ la fonction définie sur le carré C_R par :

$$\chi(t, z) = \int_0^z \psi(t, x)\, dx.$$

Pour (t, z) et (t_0, z_0) dans C_R, on a :

$$\begin{aligned} |\chi(t, z) - \chi(t_0, z_0)| &\leq \int_0^{z_0} |\psi(t, x) - \psi(t_0, x)|\, dx + \left| \int_{z_0}^z \psi(t, x)\, dx \right| \\ &\leq \int_0^{z_0} |\psi(t, x) - \psi(t_0, x)|\, dx + |z - z_0|\, \|\psi\|_\infty, \end{aligned}$$

en notant $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{C_R} |\psi(t, x)|$. Avec la continuité uniforme de la fonction ψ sur le compact C_R, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$|t - t_0| \leq \eta \ \Rightarrow\ \forall x \in [0, R],\ |\psi(t, x) - \psi(t_0, x)| < \varepsilon.$$

Ce réel η peut être choisi tel que $|z - z_0|\, \|\varphi\|_\infty < \varepsilon$ pour $|z - z_0| \leq \eta$. On a donc pour $(t, z) \in C_R$ tel que $|t - t_0| \leq \eta$ et $|z - z_0| \leq \eta$:

$$|\chi(t, z) - \chi(t_0, z_0)| \leq (z_0 + 1)\, \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure à la continuité de χ en (t_0, z_0).
La fonction χ est dérivable par rapport à z avec :

$$\frac{\partial \chi}{\partial z}(t, z) = \psi(t, z).$$

En résumé, les fonctions χ et $\dfrac{\partial \chi}{\partial z}$ sont continues sur C_R et l'intégration se fait sur un intervalle compact, on en déduit que la fonction β est de classe C^1 avec :

$$\forall z \in [0, R], \ \beta'(z) = \int_0^R \frac{\partial \chi}{\partial z}(t, z)\, dt = \int_0^R \psi(t, z)\, dt.$$

On a $\alpha' = \beta'$ sur $[0, R]$ avec $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$.
En particulier, on a $\alpha(R) = \beta(R)$, c'est-à-dire

$$\int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x)\, dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x)\, dx \right) dt.$$

II.1.

II.1.1. On désigne par Δ_R la diagonale du carré C_R définie par :

$$\Delta_R = \{(t, t) \mid 0 \leq t \leq R\}.$$

La continuité de la fonction ψ sur $C_R \setminus \Delta_R$ ne pose pas de problème.
On se donne un point $(t_0, t_0) \in \Delta_R$. La fonction φ étant continue en $(t_0, t_0) \in T_R$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(t, x) \in T_R, \ |t - t_0| \leq \eta, \ |x - x_0| \leq \eta, \ \Rightarrow \ |\varphi(t, x) - \varphi(t_0, t_0)| < \varepsilon.$$

Pour $(t, x) \in C_R$ tel que $|t - t_0| \leq \eta$ et $|x - x_0| \leq \eta$, on a soit $(t, x) \notin T_R$ et dans ce cas $\psi(t, x) - \psi(t_0, t_0) = \psi(t, x) = 0$, soit $(t, x) \in T_R$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} |\psi(t, x) - \psi(t_0, t_0)| &= |\psi(t, x)| = |\varphi(t, x) - \varphi(t, t)| \\ &\leq |\varphi(t, x) - \varphi(t_0, t_0)| + |\varphi(t, t) - \varphi(t_0, t_0)| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé la continuité de ψ en (t_0, t_0).

II.1.2. On définit les fonctions α et β sur $[0, R]$ par :

$$\alpha(z) = \int_0^z \left(\int_0^x k(t)\, dt \right) dx$$

et :

$$\beta(z) = \int_0^z \left(\int_t^z k(t)\, dx \right) dt = \int_0^z (z-t)\, k(t)\, dt$$
$$= z \int_0^z k(t)\, dt - \int_0^z tk(t)\, dt.$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R]$ avec :

$$\begin{cases} \alpha'(z) = \displaystyle\int_0^z k(t)\, dt, \\ \beta'(z) = \displaystyle\int_0^z k(t)\, dt + zk(z) - zk(z) = \int_0^z k(t)\, dt. \end{cases}$$

On a donc $\alpha' = \beta'$ avec $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$ sur $[0, R]$.

II.1.3. Le résultat admis au début de la partie **II** appliqué à la fonction ψ définie en **II.1.1.** sur le carré C_R donne :

$$\int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x)\, dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x)\, dx \right) dt,$$

avec :

$$\int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x)\, dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_0^x \psi(t, x)\, dt \right) dx$$
$$= \int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t, x)\, dt \right) dx - \int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t, t)\, dt \right) dx$$

et :

$$\int_0^R \left(\int_0^R \psi(t, x)\, dx \right) dt = \int_0^R \left(\int_t^R \psi(t, x)\, dx \right) dt$$
$$= \int_0^R \left(\int_t^R \varphi(t, x)\, dx \right) dt - \int_0^R \left(\int_t^R \varphi(t, t)\, dx \right) dt.$$

En utilisant l'égalité :

$$\int_0^R \left(\int_0^x \varphi(t, t)\, dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_t^R \varphi(t, t)\, dx \right) dt$$

(question **II.1.2.** pour $g(t) = \varphi(t, t)$ en $z = R$), on déduit l'identité (3.2).

II.2.

II.2.1. Il s'agit de montrer que si f, g sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$, alors $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ le changement de variable $t = \theta x$ avec $0 \leq \theta \leq 1$ donne :

$$f * g(x) = \int_0^1 f((1-\theta)x)\, g(\theta x)\, x d\theta.$$

La fonction $(\theta, x) \mapsto f((1-\theta)x)\, g(\theta x)\, x$ est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ et l'intégration se fait sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on en déduit alors que la fonction $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

II.2.2. En utilisant l'identité (3.2) de la question **II.1.** on a :

$$\begin{aligned}\int_0^R f * g(x)\, dx &= \int_0^R \left(\int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt\right) dx \\ &= \int_0^R \left(\int_t^R f(x-t)\, g(t)\, dx\right) dt\end{aligned}$$

et le changement de variable $y = x - t$, à t fixé dans $[0, R]$, donne :

$$\int_0^R f * g(x)\, dx = \int_0^R g(t) \left(\int_0^{R-t} f(y)\, dy\right) dt.$$

II.2.3. La fonction f étant à valeurs positives ou nulle, pour tout $t \in [0, R]$, on a :

$$\int_0^{R-t} f(y)\, dy \leq \int_0^R f(y)\, dy$$

et du résultat précédent, on déduit que :

$$\int_0^R f * g(x)\, dx \leq \int_0^R g(t)\, dt \int_0^R f(y)\, dy$$

(la fonction g est à valeurs positives ou nulles).

Pour $0 \leq t \leq \dfrac{R}{2}$, on a $\dfrac{R}{2} \leq R - t \leq R$ et :

$$\int_0^{R-t} f(x)\, dx \geq \int_0^{\frac{R}{2}} f(x)\, dx,$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\int_0^R f * g(x)\, dx &\geq \int_0^{\frac{R}{2}} g(t) \left(\int_0^{R-t} f(y)\, dy\right) dt \\ &\geq \int_0^{\frac{R}{2}} g(t)\, dt \int_0^{\frac{R}{2}} f(x)\, dx.\end{aligned}$$

II.2.4. Avec l'encadrement précédent et la convergence des intégrales impropres de f et g sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que :

$$\int_0^{+\infty} f * g\,(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f\,(x)\,dx \int_0^{+\infty} g\,(t)\,dt.$$

II.2bis Le changement de variable $y = x - t$ donne :

$$f * g\,(x) = \int_0^x f\,(y)\,g\,(x-y)\,dy = g * f\,(x)\,.$$

D'où la commutativité du produit de convolution.
Soient f, g, h dans $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+\right)$. Pour tout réel $z \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f * (g * h)\,(z) &= \int_0^z f\,(z-x)\,g * h\,(x)\,dx \\ &= \int_0^z \left(\int_0^x f\,(z-x)\,g\,(x-t)\,h\,(t)\,dt \right) dx \end{aligned}$$

et avec le théorème de Fubini sur un triangle :

$$f * (g * h)\,(z) = \int_0^z \left(\int_t^z f\,(z-x)\,g\,(x-t)\,dx \right) h\,(t)\,dt.$$

Le changement de variable $y = x - t$, à t fixé dans $[0, z]$ donne :

$$\begin{aligned} f * (g * h)\,(z) &= \int_0^z \left(\int_0^{z-t} f\,((z-t)-y)\,g\,(y)\,dy \right) h\,(t)\,dt \\ &= \int_0^z (f * g)\,(z-t)\,h\,(t)\,dt = (f * g) * h\,(z)\,. \end{aligned}$$

Ce qui montre que le produit de convolution est associatif.

II.3.

II.3.1. On a bien $f_\lambda \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+\right)$. On vérifie facilement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_\lambda^{*2}\,(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

II.3.2. On vérifie facilement par récurrence que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_\lambda^{*n}\,(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

– III– Variables aléatoires sans mémoire et temps d'attente

III.1.

III.1.1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

III.1.2. Pour tout $t \geq 0$, on a $P(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t} > 0$, la probabilité conditionnelle est bien donc définie et :

$$\begin{aligned} P((X > s + t) \mid (X > t)) &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} \\ &= e^{-\lambda s} = P(X > s). \end{aligned}$$

III.2.

III.2.1. On a, pour tout réel x positif ou nul :

$$G_T(x) = 1 - F_T(x) = P(T > x)$$

et la condition (3.3) s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ G_T(x + y) = G_T(x) G_T(y).$$

III.2.2. La fonction G_T vérifie l'équation (3.1). D'après (3.3) pour tout réel positif x, l'événement $(T > x)$ est de probabilité non nulle, donc G_T est non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, la fonction G_T est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par 1. D'après la question **I.9.** il existe alors un réel a tel que $G_T(x) = e^{ax}$ pour tout $x \geq 0$. Avec $0 < G_T(x) \leq 1$, on déduit que nécessairement $a = -\lambda$ avec $\lambda \geq 0$. Du fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_T(x) = 1$, on déduit que $\lambda > 0$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F_T(x) = 1 - G_T(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

La fonction F_T étant positive et croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \text{ si } x \geq 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

III.3.

III.3.1. La variable aléatoire S_n indique, pour le réseau informatique, le temps d'attente du n-ième message à partir de l'instant initial $t = 0$.

III.3.2. Dire qu'aucun message n'est arrivé avant l'instant t équivaut à dire que le temps d'attente d'arrivée du premier message est strictement supérieur à t. La probabilité cherchée est donc :

$$P\left(T_1 > t\right) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}.$$

III.3.3. Dire qu'au plus un message est arrivé entre les instants 0 et t équivaut à dire que le temps d'attente T_1+T_2 d'arrivée des deux premiers messages est strictement supérieur à t. La probabilité cherchée est donc :

$$P\left(T_1 + T_2 > t\right) = \int_t^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \int_{\lambda t}^{+\infty} y e^{-y} dy = (1 + \lambda t)\, e^{-\lambda t}.$$

III.3.4. Dire qu'au plus n message sont arrivés entre les instants 0 et t équivaut à dire que le temps d'attente $T_1 + \cdots + T_{n+1}$ d'arrivée des $n+1$ premiers messages est strictement supérieur à t. La probabilité cherchée est donc :

$$\begin{aligned} P\left(T_1 + \cdots + T_{n+1} > t\right) &= \int_t^{+\infty} \lambda^{n+1} \frac{x^n}{n!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_{\lambda t}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} e^{-y} dy = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

III.3.5. On note A_n l'événement « au plus n messages sont arrivés entre les instants 0 et t ». Pour n non nul, A_n est égal à l'union des événements incompatibles A_{n-1} et $(N_t = n)$. D'où :

$$P\left(N_t = n\right) = P\left(A_n\right) - P\left(A_{n-1}\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Le résultat reste vrai pour $n = 0$, d'après la question **III.3.2.**

III.3.6. La variable aléatoire N_t suit donc une loi de Poisson de paramètre λt.

– IV– Comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires

IV.1. Pour $n \geq 1$, la quantité M_n indique le nombre maximum de messages arrivés sur une unité de temps.

IV.2. Pour $m \geq 0$, on a :

$$P(M_n \leq m) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (A_k \leq m)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k \leq m)$$

puisque les variables aléatoires A_k sont indépendantes. Et avec :

$$P(A_k \leq m) = F_Y(m) = 1 - G_Y(m),$$

on déduit que :

$$P(M_n \leq m) = (1 - G_Y(m))^n.$$

IV.3.

IV.3.1. Pour $m \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} G_Y(m) = 1 - F_Y(m) = P(Y > m) &= \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\mu^j}{(m+2)\cdots(m+1+j)}\right). \end{aligned}$$

Pour tout $j \geq 1$, on a :

$$\frac{\mu^j}{(m+2)\cdots(m+1+j)} \leq \left(\frac{\mu}{m+2}\right)^j$$

et pour $m > \mu - 2$, on a $0 < \dfrac{\mu}{m+2} < 1$, de sorte que :

$$\begin{aligned} 1 \leq 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\mu^j}{(m+2)\cdots(m+1+j)} \\ \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{\mu}{m+2}\right)^j = \frac{1}{1 - \dfrac{\mu}{m+2}}, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\forall m > \mu - 2,\ \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!} \leq G_Y(m) \leq \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1 - \dfrac{\mu}{m+2}}.$$

IV.3.2. On déduit immédiatement que :

$$G_Y(m) \underset{m \to +\infty}{\backsim} \frac{e^{-\mu}\mu^{m+1}}{(m+1)!}.$$

IV.3.3. Il en résulte que :

$$\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)} \underset{m\to+\infty}{\backsim} \frac{\mu}{m+2} \underset{m\to+\infty}{\backsim} \frac{\mu}{m}.$$

IV.4.

IV.4.1. Sur chaque intervalle $I_m = [m, m+1[$ avec $m \geq -1$, on a :

$$G_c(x) = G_Y(m)\left(\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}\right)^{x-m}$$

ce qui définit bien une fonction continue sur I_m avec $G_c(m) = G_Y(m)$. Avec :

$$\lim_{\substack{x\to m+1\\ x<m+1}} G_c(x) = G_Y(m)\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)} = G_Y(m+1) = G_c(m+1),$$

on déduit que la fonction G_c est continue sur $[-1, +\infty[$.

IV.4.2. Avec $0 < \dfrac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)} < 1$, pour $m \geq -1$, on déduit que la fonction G_c est strictement décroissante sur $[m, m+1[$ et avec la continuité sur $[-1, +\infty[$, on déduit qu'elle est strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$.

IV.4.3. De **IV.4.1.** et **IV.4.2.** on déduit que la fonction G_c définit un homéomorphisme de $[-1, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} G_c(x), G_c(-1)\right]$ (une fonction décroissante minorée sur $[-1, +\infty[$ a une limite à l'infini). Et avec :

$$\lim_{x\to+\infty} G_c(x) = \lim_{m\to+\infty} G_c(m) = \lim_{m\to+\infty} G_Y(m) = 0,$$

$G_c(-1) = P(Y > -1) = 1$, on déduit que G_c réalise un homéomorphisme de $[-1, +\infty[$ sur $]0, 1]$.

IV.5.

IV.5.1. On a :

$$G_c\left(m+\frac{1}{2}\right) = G_Y(m)\sqrt{\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}} = \sqrt{G_Y(m)\,G_Y(m+1)}$$

et :

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{G_c\left(m+\frac{1}{2}\right)}{G_Y(m)} = \sqrt{\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}}\\ &= \frac{G_Y(m+1)}{\sqrt{G_Y(m)\,G_Y(m+1)}} = \frac{G_c(m+1)}{G_c\left(m+\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

IV.5.2. De **IV.3.3.** on déduit que

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{G_Y(m+1)}{G_Y(m)}} \underset{m \to +\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

et $\lim\limits_{m \to +\infty} \alpha_m = 0$.

IV.6.

IV.6.1. La fonction G_c^{-1} étant un homéomorphisme strictement décroissant de $]0, 1]$ sur $[-1, +\infty[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} G_c^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$.

IV.6.2. On a :

$$G_c(I_n + 1) = G_c\left(I_n + \frac{1}{2}\right) \frac{G_c(I_n + 1)}{G_c\left(I_n + \frac{1}{2}\right)} = G_c\left(I_n + \frac{1}{2}\right) \alpha_{I_n}$$

et avec $I_n \leq a_n + \frac{1}{2} < I_n + 1$, on déduit que $I_n + \frac{1}{2} > a_n$, ce qui avec la décroissance de G_c donne :

$$0 < G_c(I_n + 1) < G_c(a_n)\, \alpha_{I_n} = \frac{1}{n} \alpha_{I_n}.$$

De manière analogue, en écrivant que :

$$\begin{aligned} G_c(I_n - 1) &= G_c\left(I_n - \frac{1}{2}\right) \frac{G_c(I_n - 1)}{G_c\left(I_n - \frac{1}{2}\right)} \\ &= G_c\left(I_n - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\alpha_{(I_n - 1)}} \end{aligned}$$

et en tenant compte de $I_n - \frac{1}{2} \leq a_n$, on déduit que :

$$G_c(I_n - 1) \geq G_c(a_n) \frac{1}{\alpha_{(I_n - 1)}} = \frac{1}{n \alpha_{(I_n - 1)}}.$$

IV.7. On a :

$$p_n = P(M_n \leq I_n + 1) = (1 - G_Y(I_n + 1))^n,$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} G_Y(I_n+1) = \lim_{m\to+\infty} G_Y(m) = 0,$$

donc :

$$\ln(p_n) = n\ln(1 - G_Y(I_n+1)) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -nG_Y(I_n+1) = -nG_c(I_n+1).$$

Avec :

$$0 < nG_c(I_n+1) \leq \alpha_{I_n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{I_n} = \lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_m = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(p_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.

De manière analogue, on a :

$$q_n = P(M_n < I_n - 1) = (1 - G_Y(I_n-1))^n,$$

et :

$$\ln(q_n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -nG_Y(I_n-1) = -nG_c(I_n-1).$$

Avec :

$$nG_c(I_n-1) \geq \frac{1}{\alpha_{(I_n-1)}}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{(I_n-1)} = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(q_n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$.

IV.8. On a :

$$(M_n \leq I_n+1) = (M_n \leq I_n-1) \cup (M_n = I_n) \cup (M_n = I_n+1).$$

Les trois derniers événements de l'expression de droite étant deux à deux incompatibles,

$$p_n = P(M_n = I_n) + P(M_n = I_n+1) + q_n$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_n = I_n) + P(M_n = I_n+1) = 1.$$

IV.9.

IV.9.1. On a $G_c(a_{10^5}) = 10^{-5}$. La fonction G_c est décroissante et :

$$G_c(5) < 10^{-5} < G_c(4),$$

donc $4 < a_{10^5} < 5$. Avec

$$G_c(4,5) = \sqrt{G_c(4)\,G_c(5)} \backsimeq 1,5735 \cdot 10^{-5} > 10^{-5},$$

on déduit que $4,5 < a_{10^5} < 5$ et $I_{10^5} = 5$.

IV.9.2. On a :

$$\begin{cases} P\left(M_{10^5} \leq 4\right) = \left(1 - G_Y\left(4\right)\right)^{10^5} \backsimeq 0,00218854, \\ P\left(M_{10^5} \leq 6\right) = \left(1 - G_Y\left(6\right)\right)^{10^5} \backsimeq 0,97733022, \\ P\left(M_{10^5} = 5\right) + P\left(M_{10^5} = 6\right) \backsimeq 0,975. \end{cases}$$

IV.9.3. On peut dire, avec une erreur de $2,5\%$, qu'entre les instants 0 et 100 000 le nombre maximum de messages arrivés par unité de temps est de 5 ou 6.

– V – Étude des suites $P\left(M_n = I_n\right)$ et $P\left(M_n = I_n + 1\right)$

V.1.

V.1.1. Pour tout entier naturel m, on a :

$$\forall x \in]m, m+1[, \ H\left(x\right) = \frac{1}{G_Y\left(m\right)} \left(\frac{G_Y\left(m\right)}{G_Y\left(m+1\right)}\right)^{x-m}.$$

Cette fonction est donc dérivable sur l'intervalle $]m, m+1[$ avec :

$$\forall x \in \left]m, m+1\right[, \ H'\left(x\right) = \ln\left(\frac{G_Y\left(m\right)}{G_Y\left(m+1\right)}\right) H\left(x\right).$$

V.1.2. Le réel $\ln\left(\frac{G_Y\left(m\right)}{G_Y\left(m+1\right)}\right)$ est strictement positif. La fonction H est strictement positive croissante et continue sur $\left[-1, +\infty\right[$, donc :

$$h_m = \ln\left(\frac{G_Y\left(m\right)}{G_Y\left(m+1\right)}\right) H\left(m\right) = \frac{1}{G_Y\left(m\right)} \ln\left(\frac{G_Y\left(m\right)}{G_Y\left(m+1\right)}\right).$$

Puis avec $\lim\limits_{m \to +\infty} G_Y\left(m\right) = 0$ et $\lim\limits_{m \to +\infty} \frac{G_Y\left(m\right)}{G_Y\left(m+1\right)} = +\infty$ (questions **IV.3.2.** et **IV.3.3.**), on déduit que $\lim\limits_{m \to +\infty} h_m = +\infty$.

V.2.

V.2.1. On sait déjà que la suite $\left(a_n\right)_{n \geq 1}$ converge en croissant strictement vers l'infini (question **IV.6.1.**).

Soit K un réel strictement positif fixé. Soient m_0 un entier vérifiant

$$\forall m \geq m_0, \ h_m > K$$

$(\lim\limits_{m \to +\infty} h_m = +\infty)$ et un entier n_0 vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \ a_n > m_0$$

$\left(\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\right)$.
Soit n un naturel supérieur à n_0.
Si $a_{n+1} \le [a_n] + 1$, on peut alors utiliser le théorème des accroissements finis :

$$\frac{H(a_{n+1}) - H(a_n)}{a_{n+1} - a_n} \ge h_{[a_n]} > K.$$

Si $a_{n+1} > [a_n] + 1$:

$$\begin{aligned} H(a_{n+1}) - H(a_n) &= H(a_{n+1}) - H([a_{n+1}]) \\ &\quad + \sum_{k=[a_n]+1}^{[a_{n+1}]-1} (H(k+1) - H(k)) + H([a_n]+1) - H(a_n). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis sur chacun des intervalles concernés, on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(a_{n+1}) - H([a_{n+1}]) \ge K(a_{n+1} - [a_{n+1}]), \\ H(k+1) - H(k) \ge K, \\ H([a_n]+1) - H(a_n) \ge K([a_n] + 1 - a_n), \end{array} \right.$$

ce qui donne :

$$H(a_{n+1}) - H(a_n) \ge K(a_{n+1} - a_n).$$

On a donc, dans tous les cas :

$$\forall n \ge n_0, \ \frac{H(a_{n+1}) - H(a_n)}{a_{n+1} - a_n} \ge K.$$

On a donc ainsi prouvé que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H(a_{n+1}) - H(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = +\infty.$$

V.2.2. Avec $H(a_n) = \dfrac{1}{G_c(a_n)} = n$, on déduit immédiatement de la question précédente que :

$$\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

V.3. Soient $r \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ et $\varepsilon \in \left]0, r + \dfrac{1}{2}\right[$. Du fait que la suite $(a_n)_{n\ge1}$ est strictement croissante et que $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, on déduit qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \ge n_0, \ 0 < a_{n+1} - a_n < \varepsilon.$$

Pour n_0 ainsi choisi, on se donne un entier n_1 tel que :

$$n_1 \geq [a_{n_0}] + 2$$

et on pose :

$$m = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0, \ a_n \leq n_1 + r\}.$$

Cet ensemble est non vide puisque :

$$a_{n_0} < [a_{n_0}] + 1 \leq n_1 - 1 < n_1 + r$$

et borné puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. On a alors :

$$a_m \leq n_1 + r < a_{m+1}$$

et :

$$0 \leq n_1 + r - a_m < a_{m+1} - a_m < \varepsilon,$$

ce qui donne :

$$n_1 - \frac{1}{2} < n_1 + r - \varepsilon < a_m \leq n_1 + r < n_1 + \frac{1}{2},$$

soit :

$$n_1 < a_m + \frac{1}{2} < n_1 + 1$$

et :

$$I_m = \left[a_m + \frac{1}{2}\right] = n_1.$$

On a donc en définitive :

$$r - \varepsilon < a_m - n_1 = a_m - I_m \leq r,$$

où encore :

$$-\varepsilon < a_m - I_m - r \leq 0.$$

On a donc ainsi montré que l'ensemble A est dense dans $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, soit $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\subset \overline{A}$ et $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \overline{A}$.

V.4.

V.4.1. On a :

$$G_c\left(I_m + \frac{1}{4}\right) = G_c\left(I_m\right)\left(\frac{G_c\left(I_m+1\right)}{G_c\left(I_m\right)}\right)^{\frac{1}{4}} = G_c\left(I_m\right)\sqrt{\alpha_{I_m}}$$

ce qui donne en tenant compte de la décroissance de la fonction G_c, si $I_m - a_m < -\dfrac{1}{4}$:

$$G_c\left(I_m\right) = \frac{G_c\left(I_m + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\alpha_{I_m}}} > \frac{G_c\left(a_m\right)}{\sqrt{\alpha_{I_m}}} = \frac{1}{m\sqrt{\alpha_{I_m}}}.$$

V.4.2. Avec la densité de $\{I_n - a_n \mid n \geq 1\}$ dans $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, on déduit qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)} < -\frac{1}{4}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$P\left(M_n \leq I_n\right) = \left(1 - G_Y\left(I_n\right)\right)^n,$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} G_Y\left(I_n\right) = 0,$$

donc :

$$\ln\left(P\left(M_n \leq I_n\right)\right) = n\ln\left(1 - G_Y\left(I_n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -nG_Y\left(I_n\right).$$

On a donc :

$$\ln\left(P\left(M_{\varphi(n)} \leq I_{\varphi(n)}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -\varphi(n)\, G_Y\left(I_{\varphi(n)}\right),$$

avec :

$$\varphi(n)\, G_Y\left(I_{\varphi(n)}\right) > \frac{1}{\sqrt{\alpha_{I_{\varphi(n)}}}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

(question **IV.5.2.**). On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(P\left(M_{\varphi(n)} \leq I_{\varphi(n)}\right)\right) = -\infty$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\varphi(n)} \leq I_{\varphi(n)}\right) = 0.$$

Mais on a vu que $\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\varphi(n)} \leq I_{\varphi(n)}+1\right) = 1$ (question **IV.7.**) et avec :

$$P\left(M_{\varphi(n)} \leq I_{\varphi(n)}+1\right) = P\left(M_{\varphi(n)} \leq I_{\varphi(n)}\right) + P\left(M_{\varphi(n)} = I_{\varphi(n)}+1\right),$$

on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\varphi(n)} = I_{\varphi(n)}+1\right) = 1.$$

V.4.3. On a :

$$\begin{aligned} G_c\left(I_m - \frac{1}{4}\right) &= G_c\left(I_m - 1\right)\left(\frac{G_c\left(I_m\right)}{G_c\left(I_m-1\right)}\right)^{\frac{3}{4}} \\ &= \left(\frac{G_c\left(I_m-1\right)}{G_c\left(I_m\right)}\right)^{\frac{1}{4}} G_c\left(I_m\right) = \frac{G_c\left(I_m\right)}{\sqrt{\alpha_{(I_m-1)}}}, \end{aligned}$$

ce qui donne en tenant compte de la décroissance de la fonction G_c, si $I_m - a_m > \dfrac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} G_c\left(I_m\right) &= G_c\left(I_m - \frac{1}{4}\right)\sqrt{\alpha_{(I_m-1)}} \\ &< G_c\left(a_m\right)\sqrt{\alpha_{(I_m-1)}} = \frac{\sqrt{\alpha_{(I_m-1)}}}{m}. \end{aligned}$$

V.4.4. Avec la densité de $\{I_n - a_n \mid n \geq 1\}$ dans $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, on déduit qu'il existe une application $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{\psi(n)} - a_{\psi(n)} > \frac{1}{4}.$$

On a alors :

$$\ln\left(P\left(M_{\psi(n)} \leq I_{\psi(n)}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -\psi\left(n\right) G_Y\left(I_{\psi(n)}\right),$$

avec :

$$\psi\left(n\right) G_Y\left(I_{\psi(n)}\right) < \sqrt{\alpha_{I_{(\psi(n)-1)}}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(P\left(M_{\psi(n)} \leq I_{\psi(n)}\right)\right) = 0$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\psi(n)} \leq I_{\psi(n)}\right) = 1.$$

Mais on a vu que $\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\psi(n)} \leq I_{\psi(n)} - 1\right) = 0$ (question **IV.7.**) et avec :

$$P\left(M_{\psi(n)} \leq I_{\psi(n)}\right) = P\left(M_{\psi(n)} = I_{\psi(n)}\right) + P\left(M_{\psi(n)} \leq I_{\psi(n)} - 1\right),$$

on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(M_{\psi(n)} = I_{\psi(n)}\right) = 1.$$

Chapitre 4

CAPES externe 2002, épreuve 1

4.1 Énoncé

Notations et objectif

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ;

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs ;

$\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples entiers du nombre π ;

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls ;

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

D'autre part, si A et B sont des parties quelconques de $\mathbb{R}$, on note :

$A \setminus B$ l'ensemble des réels appartenant à A mais n'appartenant pas à B, autrement dit $A \cap C_{\mathbb{R}}B$.

Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. On note $\circ$ la composition des applications. On note respectivement $\Re$ et $\Im$ les applications partie réelle et partie imaginaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$. On note cot la fonction cotangente.

L'entier naturel n, l'intervalle J de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et l'application f de J vers $\mathbb{C}$ (ou vers $\mathbb{R}$) n fois dérivable étant donnés, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f sur J (en particulier $f^{(0)} = f$). On utilisera la notation usuelle f' pour désigner $f^{(1)}$.

L'entier naturel n et l'intervalle J de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, étant donnés, on note :

$\mathcal{D}^n(J)$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{C}$ au moins n fois dérivables sur J.

$\mathcal{D}^n(J,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{R}$ au moins n fois dérivables sur J.

$\mathcal{C}^n(J)$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

$\mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

$\mathcal{C}^\infty(J)$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.

$\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de J vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.

On étend ces notations au cas où J est l'union de deux intervalles disjoints et d'intérieurs non vides.

Si J contient l'intervalle (d'intérieur non vide) K, si f est une application de J vers $\mathbb{C}$ (respectivement vers $\mathbb{R}$), et si la restriction de f à K appartient à $\mathcal{C}^n(K)$ (respectivement à $\mathcal{C}^n(K,\mathbb{R})$), on pourra considérer que f appartient à $\mathcal{C}^n(K)$ (respectivement à $\mathcal{C}^n(K,\mathbb{R})$).

Soit z un nombre complexe fixé. On rappelle que l'application $x \mapsto x^z = e^{z\ln(x)}$ de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{C}$, est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée l'application $x \mapsto zx^{z-1}$ de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{C}$.

On considère dans ce problème un intervalle fixé I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et stable par l'application $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, ainsi que par sa réciproque $x \mapsto 2x$. L'intervalle I est en conséquence : ou $]0,+\infty[$, ou $[0,+\infty[$, ou $]-\infty,0[$, ou $]-\infty,0]$, ou $\mathbb{R}$ lui-même.

Ce problème vise essentiellement l'obtention de résultats simples relatifs à l'équation :

$$E(I): \quad f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$$

d'inconnue f appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}^1(I)$.

Une solution de $E(I)$ est donc un élément f de $\mathcal{D}^1(I)$ vérifiant, pour tout réel x de I, $f(x) = xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

On note $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des solutions de l'équation $E(I)$. Dans certaines parties, on s'intéresse plus spécialement aux solutions de l'équation $E(I)$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$. On note alors $E_{\mathbb{R}}(I)$ ce problème restreint et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ l'ensemble de ses solutions.

La partie **I**, très courte, concerne essentiellement l'interprétation graphique de l'équation $E_{\mathbb{R}}(I)$. La partie **II**, dune longueur moyenne, traite des généralités relatives à l'équation $E(I)$ et en recherche des solutions possédant certaines propriétés particulières. Dans la partie **III**, plus longue, une interrogation sur la dimension de l'espace $\mathcal{S}\,(]0,+\infty[)$ conduit à la découverte de solutions inattendues. La partie **IV**, assez courte, demande de repérer et de traiter des erreurs dans un texte mathématique. La partie **V**, longue, propose d'établir un théorème de Borel et donne une idée de l'espace $\mathcal{S}\,(]0,+\infty[)$. Ces cinq parties sont largement indépendantes. On utilise (**II.B.1**) dans (**III.A.1**), (**II.C.1**) dans (**III.B**).

Partie I

1. Dans le cas où I ne contient pas 0, proposer, en l'accompagnant d'une illustration graphique, une interprétation géométrique simple du problème $E_{\mathbb{R}}\,(I)$.
2. Soit (a,b,c) un élément de $\mathbb{C}^3$ et soit $p : I \to \mathbb{C}$ l'application définie par la relation $p\,(x) = ax^2+bx+c$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur le triplet (a,b,c) l'application p appartient-elle à $\mathcal{S}\,(I)$?
3. Dans cette question, sauf mention contraire, $I = \,]0,+\infty[$.
   Parmi les applications dont les courbes sont dessinées ci-dessous, quelles sont celles qui ne vérifient pas l'équation $E_{\mathbb{R}}\,(I)$? On se contentera de dresser la liste des numéros des représentations graphiques de ces applications et on ne justifiera pas les réponses données.

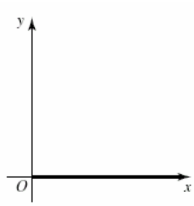


Fig. 1 : demi-droite "horizontale".

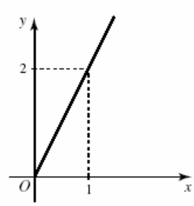


Fig. 2 : demi-droite.

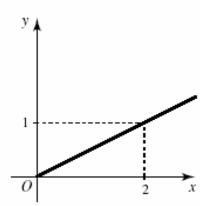


Fig. 3 : demi-droite.

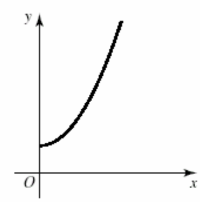


Fig. 4 : demi-parabole d'axe (Oy).

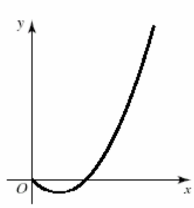


Fig. 5 : arc de parabole d'axe "vertical".

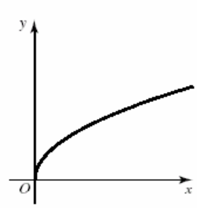


Fig. 6 : demi-parabole d'axe (Ox).

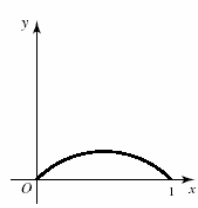


Fig. 7 : courbe coïncidant sur $]0,1]$ avec un arc de cercle.

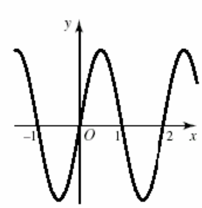


Fig. 8 : une sinusoïde $(I = \mathbb{R})$.

Partie II

– A –

1. Montrer que, pour les lois usuelles, $\mathcal{S}(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, non réduit à $\{0\}$.
   De manière analogue, de quelle structure algébrique peut-on munir $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$?
2. Soit une application $f : I \to \mathbb{C}$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) $f \in \mathcal{S}(I)$;
   (b) $\Re \circ f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ et $\Im \circ f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$;
   (c) l'application $x \mapsto \overline{f(x)}$ de I vers $\mathbb{C}$, appartient à $\mathcal{S}(I)$.

– B –

1. Soit f un élément de $\mathcal{S}(I)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est $(n+1)$ fois dérivable sur $I\setminus\{0\}$ et que, pour tout élément x de $I \setminus \{0\}$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right).$$
2. On suppose que l'intervalle I contient 0. Montrer que tout élément f de $\mathcal{S}(I)$ vérifie $f(0) = 0$ et appartient à $\mathcal{C}^1(I)$.

– C –

1. Étude dune fonction auxiliaire.
   (a) Étudier les variations de l'application $v : t \mapsto t2^{1-t}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $t2^{1-t} = 1$, d'inconnue réelle t, est l'ensemble $\{1, 2\}$.
2. Recherche des solutions polynomiales.
   Quelles sont les fonctions-polynômes appartenant à $\mathcal{S}(I)$?
3. Recherche des solutions plusieurs fois dérivables au point 0.
   On suppose que l'intervalle I contient 0. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f un élément de $\mathcal{S}(I)$ n fois dérivable au point 0.
   (a) En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

(b) En déduire qu'il existe des complexes a et b tels que, quand x tend vers 0 dans I,

$$f(x) = ax + bx^2 + o(x^n).$$

4. Recherche des solutions développables en série entière au point 0.
On suppose que $I = \mathbb{R}$. On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ développable en série entière au point 0 : il existe donc par définition un réel strictement positif, noté R, ainsi qu'une suite complexe, notée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tels que :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer que, si f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors f est polynomiale sur l'intervalle $\left]-R, R\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.

5. Recherche des solutions exponentielles.
Montrer que, quel que soit le complexe a, l'application $x \mapsto e^{ax}$ de I vers $\mathbb{C}$, n'appartient pas à $\mathcal{S}(I)$.

6. Recherche des solutions périodiques.
On suppose que $I = \mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de solution de l'équation $E(\mathbb{R})$ qui soit périodique et non identiquement nulle. On considérera un élément f de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, périodique ; on montrera que f' tend vers 0 en $+\infty$, on en déduira que f' est nulle sur $\mathbb{R}$ et on conclura.

Partie III

On suppose dans toute cette partie que $I = \left]0, +\infty\right[$.

– A –

1. Montrer que, si l'application $f : I \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{S}(I)$, alors, pour tout entier naturel k, l'application $x \mapsto x^k f^{(k)}(x)$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient aussi à $\mathcal{S}(I)$.
2. On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(I)$ est de dimension finie.
Soit une application f appartenant à $\mathcal{S}(I)$, non identiquement nulle.

(a) Montrer que f est solution sur I dune équation différentielle linéaire homogène dont l'ordre, noté q, est compris entre 1 et $\dim \mathcal{S}(I)$.

(b) En déduire que l'application $y : t \mapsto f\left(e^t\right)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre q à coefficients constants.

(c) Rappeler la forme générale des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ solutions dune équation différentielle linéaire homogène d'ordre q à coefficients constants.
En déduire que f est combinaison linéaire d'applications de la forme $x \mapsto (\ln(x))^{\nu} x^a$, a étant un complexe et ν un entier naturel.

(d) Peut-on affirmer a priori, c'est-à-dire sans justification, que les applications de la forme $x \mapsto (\ln(x))^{\nu} x^a$ dont f est combinaison linéaire appartiennent à $\mathcal{S}(I)$?

– B –

1. Recherche des éléments de $\mathcal{S}(I)$ de la forme $x \mapsto (\ln(x))^{\nu} x^a$, (a, ν) appartenant à $\mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$.
Soient a un nombre complexe et ν un entier naturel non nul.
On suppose que l'application $x \mapsto (\ln(x))^{\nu} x^a$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient à $\mathcal{S}(I)$.

   (a) Montrer que, pour tout réel t,
   $$2^{a-1} t^{\nu} - a(t - \ln 2)^{\nu} - \nu (t - \ln 2)^{\nu - 1} = 0.$$

   (b) Montrer que $2^{a-1} = a$.

   (c) Montrer que, si $\nu \geq 2$, alors $(\ln(2))^{\nu} = 0$, et que, si $\nu = 1$, alors $a \ln 2 = 1$.

   (d) Montrer que les résultats précédents sont contradictoires et conclure.

2. Soit a un nombre complexe. Montrer que l'application $x \mapsto x^a$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient à $\mathcal{S}(I)$ si et seulement si $2^{a-1} = a$.

3. Recherche des éléments de $\mathcal{S}(I)$ de la forme $x \mapsto x^a$, a appartenant à $\mathbb{R}$.
Quels sont les réels α tels que l'application $x \mapsto x^a$, de I vers $\mathbb{C}$, appartienne à $\mathcal{S}(I)$?

4. Recherche des éléments de $\mathcal{S}(I)$ de la forme $x \mapsto x^a$, a appartenant à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Dans cette question, on considère l'application $g : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par la relation :
$$g(\theta) = 2\theta - (\ln(2))(\sin(\theta)) e^{\theta \cot(\theta)}.$$
On recherche les complexes non réels a tels que l'application $h : I \to \mathbb{C}$ définie par la relation :
$$h(x) = x^a$$

appartienne à $\mathcal{S}(I)$.
On note respectivement α et ω les parties réelles et imaginaires du complexe non réel a.
On note aussi ρ le module de a et ϕ la détermination appartenant à $]-\pi, \pi[$ de l'argument de a.

(a) Pourquoi suffit-il de n'envisager dans cette recherche que le cas où ω est strictement positif ?
On suppose dans la suite de la présente question **III.B.4** que ω est strictement positif. On remarque que ϕ est donc élément de $]0, \pi[$.

(b) Exprimer sur les réels α et ω une condition nécessaire et suffisante d'appartenance de h à $\mathcal{S}(I)$.

(c) Montrer que h appartient à $\mathcal{S}(I)$ si, et seulement si, il existe un entier relatif n et un réel θ appartenant à $]2n\pi, (2n+1)\pi[$ tels que : $\phi = \theta - 2n\pi$, $2^{\rho\cos(\theta)} = 2\rho$.

(d) En déduire que h appartient à $\mathcal{S}(I)$ si, et seulement si, il existe un réel θ appartenant à l'ensemble $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$ tel que :

$$g(\theta) = 0 \text{ et } \alpha = \frac{\theta\cot(\theta)}{\ln(2)} \text{ et } \omega = \frac{\theta}{\ln(2)}.$$

(e) Montrer que, pour tout réel θ appartenant à $]0, \pi[$:

$$\frac{\ln(2)}{2}\frac{\sin(\theta)}{\theta}e^{\theta\cot(\theta)} < 1.$$

On rappelle que, pour tout réel θ appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta).$$

En déduire que l'équation $\mathcal{G} : g(\theta) = 0$, d'inconnue θ dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, n'a aucune solution sur $]0, \pi[$.

(f) Montrer que, quel que soit l'entier naturel non nul n, l'équation $\mathcal{G}$ définie en **III.B.4.e** possède une et une seule solution dans l'intervalle $]2n\pi, (2n+1)\pi[$.
On pourra étudier le signe de $g'(\theta)$ sur $]2n\pi, (2n+1)\pi[$.
On note θ_n cette solution, on note respectivement α_n et ω_n les réels α et ω obtenus pour $\theta = \theta_n$ et on note enfin h_n l'application h correspondante.

(g) Montrer que les réels de la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux distincts.
En déduire que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.
Nous avons supposé dans la section **III.A** que $\mathcal{S}(I)$ était de dimension finie. Qu'en est-il au juste ?
De même, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ est-il de dimension finie ?

(h) Calculez (à l'aide du programme de recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable dont votre calculatrice est pourvue) une valeur approchée de θ_1, de α_1 et de ω_1, et reportez sur votre copie les valeurs approchées décimales par défaut et par excès à 10^{-4} près de ces trois nombres.
Reproduisez sur votre copie la courbe représentative de $\Re \circ h_1$ sur $]0,1[$ obtenue sur votre calculatrice.

Partie IV

– A –

Cette section comporte une seule question, située au bas de cette page. Ima-ginons que vous posiez l'exercice suivant à l'un de vos élèves :

[Début de l'exercice proposé]

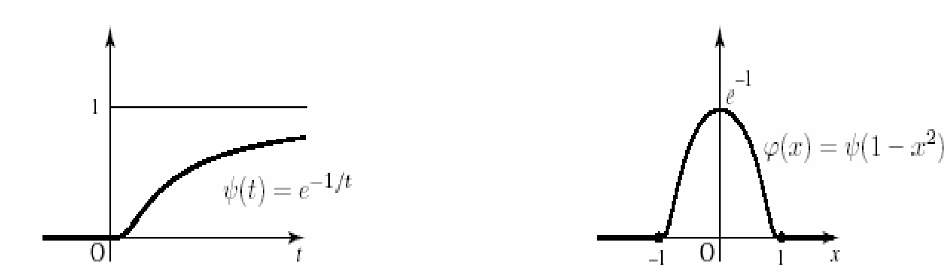
1. Soit ψ la fonction définie par $\psi(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$, $\psi(t) = 0$ si $t \leq 0$. Montrer que ψ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'il existe dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ une fonction φ, positive et dont le support soit la boule unité de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ [on pourra prendre $\varphi(x) = \psi\left(1 - \|x\|^2\right)$].
3. Montrer qu'étant donnés deux intervalles compacts $[a,d]$ et $[b,c]$ strictement emboîtés (avec $a < b < c < d$), il existe dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction s de support $[a,d]$, de valeurs comprises entre 0 et 1, et constante de valeur 1 sur $[b,c]$.

[Fin de l'exercice proposé]

Imaginons également que cet élève vous remette la solution suivante :

[Début de la solution rédigée par l'élève]

1. Pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a, par une récurrence facile, $\psi^{(k)}(t) = P_k\left(\dfrac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$, où P_k est un polynôme de degré $2k$ (avec $P_{k+1}(X) = X^2\left(P_k(X) - P_k'(X)\right)$).
Par suite $\psi^{(k)}(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 à droite (et à gauche, évidemment). De l'égalité classique des accroissements finis on déduit que ψ est dérivable à tout ordre à l'origine, avec dérivées nulles.



Courbes représentatives des fonctions ψ et φ

FIG. 4.1 –

2. Rappelons que le support dune fonction est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas, c'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est identiquement nulle.
   La fonction composée $\varphi(x) = \psi\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, nulle si et seulement si $\|x\| > 1$; son support est donc la boule unité (fermée).
3. Soit $\varphi(x) = \psi\left(1 - x^2\right)$ la fonction ci-dessus (pour $n = 1$). La fonction définie par
$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(0)}\varphi\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right) & \text{pour } a < x < b \\ \dfrac{1}{\varphi(0)}\varphi\left(\dfrac{x-c}{d-c}\right) & \text{pour } c < x < d \end{cases}$$
   $s(x) = 1$ sur $[b, c]$, $s(x) = 0$ hors de $]a, d[$ est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puisque les dérivées à gauche et à droite sont toutes nulles en a, b, c et d ; elle a donc les propriétés voulues.

[Fin de la solution rédigée par l'élève]

Question : les dessins de l'élève sont corrects mais ses réponses comportent des erreurs ; en trouver deux.

– B –

1. Mettre en forme la réponse 1 de l'élève cité dans la section **IV.A**. En particulier, préciser la proposition de récurrence utilisée ainsi que l'usage qui y est fait du théorème des accroissements finis.

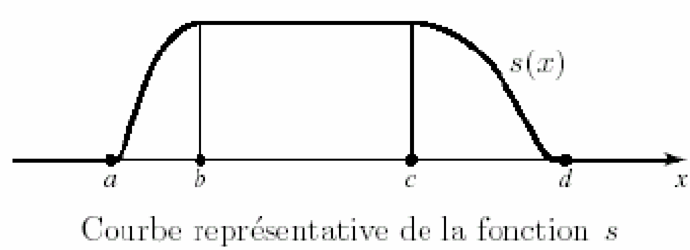


FIG. 4.2 –

2. Quelle est la norme sur $\mathbb{R}^n$ considérée dans la question **2** de l'exercice cité section **IV.A** ?
   Pourquoi l'application φ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$?
   Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Quelle est la valeur de $\varphi(x)$ si $|||x\| = 1$?
   Pourquoi le support de φ est-il la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme considérée ?
3. On s'intéresse maintenant à la question **3** de l'exercice cité dans la section **IV.A**.
   (a) Montrer que l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
   $$\delta : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de support le segment $[0,1]$.
   On pourra utiliser la fonction ψ définie dans la question **1** de l'exercice cité dans la section **IV.A**.
   (b) Montrer que l'intégrale $\eta = \displaystyle\int_0^1 \delta(t)\,dt$ est strictement positive (on n'essaiera pas de calculer).
   (c) Montrer que l'application : $\Delta : x \mapsto \dfrac{1}{\eta}\displaystyle\int_0^x \delta(t)\,dt$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, strictement monotone sur $[0,1]$, constante de valeur 0 sur $]-\infty,0]$ et de valeur 1 sur $[1,+\infty[$.
   (d) Répondre à la question **3** de l'exercice cité dans la section **IV.A**.
   On pourra considérer l'application :
   $$s : x \mapsto \Delta\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \Delta\left(\frac{d-x}{d-c}\right) - 1.$$

Partie V

– A –

En appliquant le résultat de **IV.B.3.d** au cas où $d = -a = 1$ et $c = -b = \frac{1}{2}$, on constate qu'il existe une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, constante de valeur 0 sur $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$ constante de valeur 1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, strictement monotone sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ ainsi que sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Dans la suite, on se donne une telle application et on la note ξ.

Une suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout à fait quelconque étant donnée, on note, si n est un entier naturel, $\mu_n(a)$ (ou simplement μ_n s'il n'y a pas d'ambiguïté) le nombre $\max(1, |a_n|)$, ainsi que $\varphi_{a,n}$ (ou simplement φ_n s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\varphi_{a,n}(x) = \frac{a_n}{n!}\xi(\mu_n x)\, x^n$$

Il est clair que $\varphi_{a,n}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On considère une suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer que, pour tout réel x et tout entier n vérifiant $n \geq 1$ et $\mu_n |x| < 1$,
   $$|\varphi_n(x)| \leq \frac{|x|^{n-1}}{n!}$$
   Que peut-on dire de $\varphi_n(x)$ si le réel x et l'entier n vérifient $n \geq 1$ et $\mu_n |x| \geq 1$?

   (b) Montrer que, pour tout réel x, la série de terme général $\varphi_n(x)$ converge.
   0n note Φ_a (ou Φ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par la relation :
   $$\Phi_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$$
   Que peut-on dire de $\Phi(x)$ si le réel x vérifie $|x| \geq 1$?

   (c) Justifier, pour tout entier naturel j, l'existence du réel $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\xi^{(j)}(x)\right|$, noté m_j.
   Si j appartient à $\mathbb{N}$, on note $M_j = \max(m_0, m_1, \cdots, m_j)$.

(d) Soit j un entier naturel. Montrer que, pour tout entier $n \geq j+1$ et tout réel x, $\left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| \leq \dfrac{2^j M_j}{(n-j)!}$. On distinguera les cas $|x| < \dfrac{1}{\mu_n}$ et $|x| \geq \dfrac{1}{\mu_n}$.

(e) En déduire que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier naturel j, $\Phi^{(j)}(0) = a_j$.

(f) Énoncer le théorème (du à Émile Borel) qui vient d'être établi. Quel vous paraît être son intérêt ?

2. On considère maintenant deux suites réelles $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) On définit l'application Ψ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\Psi(x) = \Phi_a(x) + \Phi_b(x-1).$$

Montrer que l'application Ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier naturel n, $\Psi^{(n)}(0) = a_n$ et $\Psi^{(n)}(1) = b_n$.

(b) Le réel strictement positif λ étant fixé, montrer qu'il existe une application F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout entier naturel n, $F^{(n)}(0) = a_n$ et $F^{(n)}(\lambda) = b_n$.

– B –

Dans toute la suite, la lettre ℓ représente le réel $\dfrac{\ln(2)}{2}$.

1. Soit f une application de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Le réel t étant quelconque, on pose $\widehat{f}(t) = f\left(e^{2t}\right)$.

   Montrer que, si f appartient à $\mathcal{S}_\mathbb{R}(]0,+\infty[)$, alors l'application $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\widehat{f}'(t) = \widehat{f}(t+\ell)$.

   On note :
   - $\mathcal{T}$ l'ensemble des éléments g de $\mathcal{D}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout réel x, $g'(t) = g(t+\ell)$,
   - $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}^\infty([0,\ell],\mathbb{R})$ tels que, pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(\ell) = f^{(n+1)}(0)$,
   - et $\mathcal{K}$ l'espace des éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de support inclus dans $[0,\ell]$. La notion de support a été définie dans la réponse **2** de la section **IV.A**.

   On note enfin $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles.

2. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathcal{S}_\mathbb{R}(]0,+\infty[)$.

3. On se donne un élément γ de $\mathcal{H}$.

   (a) On considère l'application $\gamma_1 : x \mapsto \gamma'(x-\ell)$ de $[\ell, 2\ell]$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g_1 : [0,2\ell] \to \mathbb{R}$, coïncidant avec γ sur $[0,\ell]$ et avec γ_1 sur $]\ell, 2\ell]$ est dérivable sur $[0,2\ell]$.

   (b) Soit l'application $\gamma_{-1} : x \mapsto \gamma(0) + \int_\ell^{x+\ell} \gamma(t)\,dt$, de $[-\ell, 0]$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g_{-1} : [-\ell,\ell] \to \mathbb{R}$, coïncidant avec γ sur $[0,\ell]$ et avec γ_{-1} sur $[-\ell, 0[$, est dérivable sur $[-\ell,\ell]$.

   (c) On ne demande dans cette question que le plan de la démonstration : on n'entrera dans aucun détail et on sen tiendra aux idées essentielles et à leur articulation.
   Montrer qu'il existe un et un seul élément g de $\mathcal{T}$ dont la restriction au segment $[0,\ell]$ est γ.

   (d) On note ρ l'application de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{H}$ qui, à l'élément g de $\mathcal{T}$, associe la restriction de g à $[0,\ell]$. Montrer que ρ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

4.

   (a) Montrer que l'application $\vartheta : f \mapsto \left(f^{(n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, de $\mathcal{H}$ vers $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est une application linéaire surjective.
   On suppose que l'espace $\ker(\vartheta)$ admet un supplémentaire dans $\mathcal{H}$ et l'on en choisit un, que l'on note $\mathcal{U}$.

   (b) En utilisant le sous-espace $\mathcal{U}$, montrer que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{K}$.

   (c) Est-il vrai que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ étant l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites complexes et $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ l'espace des éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[0,\ell]$?

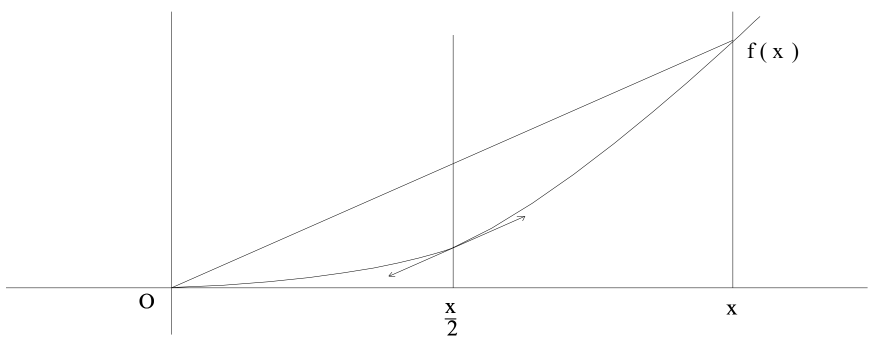
4.2 Corrigé

Partie I

I.1. Ici $I =]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$. Une fonction f de $\mathcal{D}^1(I)$ satisfait l'équation fonctionnelle $E(I)$ si et seulement si, pour tout point $M(x, f(x))$ du graphe $\mathcal{G}$ de f distinct de l'origine O, la pente de la tangente au point $N\left(\left(\frac{x}{2}, f\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)$ au graphe est parallèle à la sécante (OM). En effet, l'équation fonctionnelle s'écrit

$$\forall x \in I \quad f'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) - 0}{x - 0}$$

où la pente de la sécante (OM) est mise en évidence. L'interprétation du nombre dérivé $f'\left(\frac{x}{2}\right)$ comme la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x}{2}$ permet ensuite de conclure. Cette propriété est visualisée dans le dessin suivant (pour un point x particulier : la courbe dessinée ne vérifie cependant pas l'équation fonctionnelle).



I.2. On a

$$p \in \mathcal{S}(I) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = x\left(2a\frac{x}{2} + b\right) \Leftrightarrow c = 0.$$

I.3. Seules les figures $1, 2, 3$ et 5 représentent des fonctions appartenant à $E_{\mathbb{R}}(I)$. On le vérifie en utilisant les deux questions précédentes. La parabole de la Fig. 4 ne passe par l'origine, contrairement à celle de la Fig. 5. On vérifie à part que l'arc de cercle de la Fig. 7 ne possède pas la propriété « de la tangente » énoncée en **I.1**. Enfin la parabole de la Fig. 6 est à rejeter : en effet $y = \sqrt{x}$ définie une parabole de ce type, et ne vérifie pas l'équation fonctionnelle qui s'écrirait

$$\sqrt{x} = x\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}}}, \text{ c'est-à-dire } x = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Partie II

II.A.1. L'ensemble $\mathcal{S}(I)$ n'est pas vide et n'est pas réduit à $\{0\}$ d'après **I.3**. Si f et g appartiennent à $\mathcal{S}(I)$ et si λ désigne un nombre complexe quelconque, on a alors pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)(x) &= f(x) + \lambda g(x)\\ &= xf'\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda xg'\left(\frac{x}{2}\right) = x(f + \lambda g)'\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

donc $f+\lambda g \in \mathcal{S}(I)$. On vient de prouver que $\mathcal{S}(I)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^1(I)$. De même, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ sera un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$.

II.A.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la condition $f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$ équivaut à

$$(\mathcal{R}\circ f)(x) + i(\mathcal{I}\circ f)(x) = x\left(\mathcal{R}\circ f'\right)\left(\frac{x}{2}\right) + ix\left(\mathcal{I}\circ f'\right)\left(\frac{x}{2}\right)$$

ce qui équivaut encore, en égalant parties réelles et parties imaginaires, à :

$$(\mathcal{R}\circ f)(x) = x\left(\mathcal{R}\circ f'\right)\left(\frac{x}{2}\right) \text{ et } (\mathcal{I}\circ f)(x) = x\left(\mathcal{I}\circ f'\right)\left(\frac{x}{2}\right)$$

ou encore à :

$$(\mathcal{R}\circ f)(x) = x(\mathcal{R}\circ f)'\left(\frac{x}{2}\right) \text{ et } (\mathcal{I}\circ f)(x) = x(\mathcal{I}\circ f)'\left(\frac{x}{2}\right),$$

de sorte que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Si (ii) est vérifiée, $\mathcal{R}\circ f$ et $\mathcal{I}\circ f$ appartiennent à l'espace vectoriel $\mathcal{S}(I)$, et la combinaison linéaire $\overline{f} = \mathcal{R}\circ f - i(\mathcal{I}\circ f)$ aussi, de sorte que (iii) soit vérifiée. On a donc prouvé les implications

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii).$$

Puisque (i) entraîne (iii), $\overline{f} \in \mathcal{S}(I)$ entraîne $\overline{\overline{f}} \in \mathcal{S}(I)$, autrement dit f est dans $\mathcal{S}(I)$, et cela prouve l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$.

II.B.1. La propriété est vraie au rang 0 puisque f est une fois dérivable et $f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout $x \in I\setminus\{0\}$. Si la propriété est vraie au rang n, alors f est $n+1$ fois dérivable sur $I\setminus\{0\}$ et

$$\forall x \in I\setminus\{0\} \quad f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n}f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^{n-1}}f^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (\natural)$$

Cela s'écrit

$$\forall t \in I\setminus\{0\} \quad f^{(n+1)}(t) = \frac{1}{t}\left(2^{n-1}f^{(n)}(2t) - nf^{(n)}(t)\right)$$

et exprime $f^{(n+1)}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $I\setminus\{0\}$. Ainsi $f^{(n+1)}$ est dérivable sur $I\setminus\{0\}$, ce qui revient à dire que f est $n+2$ fois dérivable sur $I\setminus\{0\}$. En dérivant les deux membres de $(\natural)$, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{2^n}f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2^{n+1}}f^{(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^n}f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{x}{2^{n+1}}f^{(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n+1}{2^n}f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

pour tout $x \in I\backslash\{0\}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

II.B.2. Ici $0 \in I$, et il suffit de remplacer x par 0 dans l'équation $E(I)$ pour obtenir $f(0)=0$. D'après la question précédente, f est de classe C^∞ sur $I\backslash\{0\}$. Par hypothèse, f est dérivable sur tout I, donc a fortiori en 0, et cela s'écrit $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=f'(0)$ (bien entendu, si 0 est la borne inférieure de I, la dérivabilité en 0 sera comprise comme étant « à droite » de 0, et la limite sera une limite à droite, etc). Ainsi la quantité

$$f'(t)-f'(0)=\frac{f(2t)}{2t}-f'(0)$$

tendra vers 0 quand t tend vers 0, et cela prouve la continuité de f' en 0. En conclusion $f\in\mathcal{C}^1(I)$.

II.C.1.a. La fonction $v(t)=t2^{1-t}=te^{(1-t)\ln 2}$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables, et la formule de dérivation d'un produit donne

$$v'(t)=2^{1-t}-\ln 2\times te^{(1-t)\ln 2}=(1-t\ln 2)\,2^{1-t}.$$

Le signe de la dérivée est facile à obtenir, d'où les variations de v :

	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$v'(t)$		$+$		$-$	
$v(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e\ln 2}$	$\searrow$	0_+

II.C.1.b. 1 et 2 sont des solutions évidentes de l'équation $v(t)=1$, et le tableau de variation de v montre que ce sont les seules.

II.C.2. Considérons la fonction polynomiale $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$. On a

$$\begin{aligned}(f\in\mathcal{S}(I)) &\Leftrightarrow \forall x\in I\quad \sum_{k=0}^{n}a_kx^k=x\sum_{k=1}^{n}ka_k\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I\quad \sum_{k=0}^{n}a_kx^k=\sum_{k=1}^{n}k\frac{a_k}{2^{k-1}}x^k\\ &\Leftrightarrow a_0=0 \text{ et } a_k=k\frac{a_k}{2^{k-1}} \text{ pour tout } k\in\{1,\cdots,n\}\\ &\Leftrightarrow a_0=0 \text{ et } \left(2^{k-1}-k\right)a_k=0 \text{ pour tout } k\in\{1,\cdots,n\}\end{aligned}$$

Comme la question précédente donne

$$2^{k-1} - k = 0 \Leftrightarrow v(k) = k2^{1-k} = 0 \Leftrightarrow k \in \{1, 2\},$$

on obtient

$$f \in \mathcal{S}(I) \Leftrightarrow a_k = 0 \text{ pour tout } k \in \{0\} \cup \{3, 4, \cdots, n\}.$$

Une fonction polynomiale appartiendra donc à $\mathcal{S}(I)$ si et seulement si elle s'écrit $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x$ où a_1 et a_2 sont des nombres complexes quelconques.

Remarque : L'égalité de deux fonctions polynomiales définies sur I équivaut à l'égalité de leurs coefficients respectifs parce que l'intervalle I contient une infinité de réels.

II.C.3.a. La fonction f est n fois dérivable en 0, et l'on peut donc appliquer la formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

et affirmer que la fonction dérivée f' admet le développement limité suivant au voisinage de 0 (voir remarque plus bas) :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1} + o\left(x^{n-1}\right).$$

L'égalité $f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$ s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{2^{k-1}(k-1)!}x^k + o(x^n),$$

l'unicité de la partie polynomiale d'un développement limité entraîne $f(0) = 0$ et

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\} \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\left(1 - \frac{k}{2^{k-1}}\right) = 0$$

i.e.

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\} \quad f^{(k)}(0)\left(1 - k2^{1-k}\right) = 0.$$

Ainsi pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $f^{(k)}(0)$ ou $1 - k2^{1-k} = 0$.

Remarques et compléments : a) En fait, on ne peut pas « dériver le développement limité » de façon quasi-automatique. Par exemple, la fonction

$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ admet un développement limité à l'ordre deux en 0 puisque $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} = o\left(x^2\right)$, sans que la dérivée

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$

soit un $o(x)$ (dans le cas contraire, $x \cos \frac{1}{x}$ serait négligeable devant x, ce qui est absurde).

b) L'intégration ou la dérivation d'un développement limité en 0 pose moins de problème si la fonction f est définie en 0 (autrement dit si f est définie au voisinage de 0) et en rajoutant de bonnes hypothèses (par exemple : la fonction n fois dérivable en 0, comme dans le problème). Pour approfondir ce point, énonçons et démontrons le Théorème suivant :

Théorème : Si f est définie sur un intervalle I voisinage de 0 (donc qui contient aussi 0) et admet le développement limité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

en ce point, et si F est une primitive de f sur I, alors

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

preuve : Notons $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et $P(x) = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Le Théorème des accroissements finis montre que, pour x voisin de 0,

$$|F(x) - F(0) - P(x)| \leq \left(\operatorname*{Sup}_{t \text{ entre } 0 \text{ et } x} |f(t) - p(t)| \right) |x|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|t| \leq \eta$ entraîne $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon |t|^n$. Si $|x| \leq \eta$ et si t se trouve entre 0 et x, on peut donc affirmer que

$$|f(t) - p(t)| \leq \varepsilon |t|^n \leq \varepsilon |x|^n$$

et l'inégalité précédente donne $|F(x) - F(0) - P(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1}$. Cela montre que $F(x) - F(0) - P(x) = o\left(x^{n+1}\right)$ et achève la preuve. ■

Le résultat qui nous intéresse est alors le :

Corollaire : Si f est définie sur un intervalle I voisinage de 0 (donc qui contient aussi 0), admet le développement limité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

en ce point, et si f est n fois dérivable en 0 (avec $n \geq 2$), alors f est dérivable sur un intervalle J contenant 0 et inclus dans I, et

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right).$$

preuve : La dérivée f' est définie sur un voisinage J de 0 et $n-1$ fois dérivable en 0, donc admet un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ d'après la formule de Taylor-Young, par exemple

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right).$$

Le Théorème précédent donne :

$$f(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

et l'unicité d'un développement limité donne $a_0 = f(0)$ et $a_k = \dfrac{b_{k-1}}{k}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$. ■

II.C.3.b. La question précédente et **II.C.1.b.** permettent d'écrire

$$f \in \mathcal{S}(I) \Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } f^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k \in \{3, 4, \cdots, n\}$$

d'où $f(x) = f'(0)\, x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2} x^2 + o(x^n)$. Il existe donc des complexes a, b tels que $f(x) = ax + bx^2 + o(x^n)$.

II.C.4. ▶ On a

$$\begin{aligned}
(f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x f'\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{a_n}{2^{n-1}} x^n \\
&\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } \left(2^{n-1} - n\right) a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,
\end{aligned}$$

et la question **II.C.1.b** permet d'écrire

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

On a démontré que, si f est développable en série entière en 0 et appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors il existe deux complexes a et b tels que $f(x) = ax + bx^2$ pour tout $x \in]-R, R[$. Ainsi f est polynomiale sur $]-R, R[$. Choisissons un réel r tel que $0 < r < R$. Dans ce cas, f est polynomiale sur $[-R, R]$.

▶ Montrons maintenant que f est polynomiale sur $\mathbb{R}$.
Si $x \in [-2R, 2R] \setminus [-R, R]$, alors $\dfrac{x}{2} \in [-R, R]$ et

$$f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right) = x\left[a + 2b\left(\frac{x}{2}\right)\right] = ax + bx^2.$$

Soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $\left(\forall x \in [-2^n R, 2^n R] \quad f(x) = ax + bx^2\right)$. On sait que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On vient de prouver que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et le calcul effectué montre aussi bien que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie dès que $\mathcal{P}(n)$ l'est. Finalement on a montré par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Comme $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [-2^n R, 2^n R]$, on déduit que f est polynomiale sur $\mathbb{R}$.

II.C.5. Si $f(x) = e^{ax}$,

$$f \in \mathcal{S}(I) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in I \quad e^{ax} = xae^{a\frac{x}{2}} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in I \quad e^{a\frac{x}{2}} = ax \qquad (*)$$

et cette dernière assertion est toujours fausse puisque $\lim_{x\to 0} e^{a\frac{x}{2}} = 1$ tandis que $\lim_{x\to 0}(ax) = 0$.

Remarque : on n'a pas remplacé x par 0 dans $(*)$ car l'égalité fonctionnelle $(*)$ est supposée vraie seulement pour les réels x qui appartiennent à I, et puisque I ne contient pas 0 à priori. Mais 0 appartient toujours à l'adhérence de I, ce qui nous permet ces calculs de limites.

II.C.6. ▶ Premiere solution : Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ admet la période T, la fonction dérivée f' aussi (en effet $f(x+T) = f(x)$ pour tout x entraîne $f'(x+T) = f'(x)$ par dérivation). Comme $f'(t) = \dfrac{f(2t)}{2t}$ et comme le numérateur $f(2t)$ est une fonction bornée (une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ est toujours bornée), on déduit $\lim_{x\to+\infty} f'(t) = 0$.

Finalement f' est périodique et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ce qui est absurde sauf si f' est identiquement nulle (en effet, s'il existait x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$, on aurait $f'(x_0 + nT) = f'(x_0)$ pour tout entier n, d'où $0 = f'(x_0)$ en faisant tendre n vers $+\infty$). Puisque $f' = 0$, la fonction f est une constante, et cette constante ne peut être que nulle pour satisfaire l'égalité fonctionnelle $f(x) = xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

▶ Seconde solution : L'égalité $f(x+2T) = f(x)$ s'écrit :

$$(x+2T)\, f'\left(\frac{x}{2} + T\right) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$$

et entraîne $f'\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ puisque T est aussi une période de f'. Ce résultat est vrai pour tout réel x, de sorte que l'on ait montré que f' est identiquement nulle. On conclut comme dans la première solution.

Partie III

III.A.1. On a la caractérisation : $x^k f^{(k)}(x) \in \mathcal{S}(I)$ si, et seulement si :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad x^k f^{(k)}(x) = x\left[k\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} f^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^k f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

encore équivalent à :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f^{(k)}(x) = \frac{k}{2^{k-1}} f^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2^k} f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right).$$

On raisonne ensuite par récurrence sur k. La propriété annoncée est triviale pour $k = 0$. Si elle est vraie au rang k, $x^k f^{(k)}(x) \in \mathcal{S}(I)$ autrement dit

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f^{(k)}(x) = \frac{k}{2^{k-1}} f^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2^k} f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right).$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{k}{2^{k-1}} f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k} f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2^k} f^{(k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} \\ &= \frac{k+1}{2^k} f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2^{k+1}} f^{(k+2)}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où $x^{k+1} f^{(k+1)}(x) \in \mathcal{S}(I)$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Remarque : On pouvait éviter la récurrence en notant que la caractérisation de l'appartenance $x^k f^{(k)}(x) \in \mathcal{S}(I)$ donnée dès les premières lignes ci-dessus a déjà été prouvée en **II.B.1**. La preuve que nous avons donnée ici est indépendante de la partie **B**.

III.A.2.a. Posons $\dim \mathcal{S}(I) = N$.

Le système $\left(f(x), xf'(x), x^2 f^{(2)}(x), \cdots, x^N f^{(N)}(x)\right)$, qui comporte $N+1$ vecteurs appartenant à une espace vectoriel de dimension N, est lié, donc il existe q (tel que $1 \leq q \leq N$) et des constantes complexes a_i non toutes nulles telles que

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad a_0 f(x) + a_1 x f'(x) + \cdots + a_q x^q f^{(q)}(x) = 0.$$

III.A.2.b. Tout x appartenant à $]0,+\infty[$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = e^t$ où $t \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad a_0 f\left(e^t\right) + a_1 e^t f'\left(e^t\right) + \cdots + a_q e^{qt} f^{(q)}\left(e^t\right) = 0.$$

▶ Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}(k)$:

« $\left(f\left(e^t\right)\right)^{(k)} = f^{(k)}\left(e^t\right)e^{kt} + C_k(t)$ où $C_k(t)$ est une combinaison linéaire des fonctions $f^{(m)}\left(e^t\right)e^{mt}$ où $0 \leq m \leq k-1$ ».

Les propriétés $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont triviales. Si $\mathcal{H}(k)$ est vraie,

$$\begin{aligned}\left(f\left(e^t\right)\right)^{(k+1)} &= \left(f^{(k)}\left(e^t\right)e^{kt} + C_k(t)\right)' \\ &= f^{(k+1)}\left(e^t\right)e^{(k+1)t} + kf^{(k)}\left(e^t\right)e^{kt} + C_k'(t)\end{aligned}$$

et l'expression $kf^{(k)}\left(e^t\right)e^{kt} + C_k'(t)$ est bien une combinaison linéaire des fonctions $f^{(m)}\left(e^t\right)e^{mt}$ où $0 \leq m \leq k$. La propriété $\mathcal{H}(k+1)$ est démontrée.

▶ Une récurrence simple permet maintenant de déduire que $t \mapsto f\left(e^t\right)$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre q à coefficients constants. Tout revient en effet à montrer que la propriété

$\mathcal{P}(k)$: ´ $a_0 f\left(e^t\right) + a_1 e^t f'\left(e^t\right) + \cdots + a_k e^{kt} f^{(k)}\left(e^t\right)$ s'écrit sous la forme $b_0 y + b_1 y' + \cdots + b_k y^{(k)}$ où $y = f\left(e^t\right)$ et où les b_i sont des coefficients complexes convenables »

est vraie pour tout $k \in \{0, \cdots, q\}$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est triviale. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(k-1)$ soit vérifiée. D'après $\mathcal{H}(k)$, l'expression $W = a_0 f\left(e^t\right) + a_1 e^t f'\left(e^t\right) + \cdots + a_k e^{kt} f^{(k)}\left(e^t\right)$ s'écrit :

$$W = a_0 f\left(e^t\right) + a_1 e^t f'\left(e^t\right) + \cdots + a_{k-1} e^{k-1t} f^{(k-1)}\left(e^t\right) + a_k\left(\left(f\left(e^t\right)\right)^{(k)} - C_k(t)\right)$$

et il existera bien des coefficients complexes a_i' tels que

$$W = \left[a_0' f\left(e^t\right) + a_1' e^t f'\left(e^t\right) + \cdots + a_{k-1}' e^{k-1t} f^{(k-1)}\left(e^t\right)\right] + a_k\left(f\left(e^t\right)\right)^{(k)}.$$

L'hypothèse récurrente au rang $k-1$ exprime le terme entre crochets comme combinaison linéaire des fonctions y, y', ..., $y^{(k-1)}$, et il suffit de remplacer dans l'expression de W pour constater que W est bien une combinaison linéaire des fonctions y, y', ..., $y^{(k)}$. Cela prouve $\mathcal{P}(k)$ et achève notre raisonnement.

III.A.2.c. La fonction $y = f\left(e^t\right)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme $a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_q y^{(q)} = 0$. Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_q X^q$ désigne le polynôme caractéristique de cette équation différentielle, et si λ_1, ..., λ_m désignent les racines de $P(X)$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ leurs ordres de multiplicité respectives, on sait (d'après le cours) qu'il existe des polynômes $P_i(t)$ de degrés $\deg P_i(t) < \alpha_i$ tels que

$$y = f\left(e^t\right) = \sum_{i=1}^{m} P_i(t)\, e^{\lambda_i t}.$$

Par suite $f(x)=\sum_{i=1}^{m} P_i(\ln x)\, e^{\lambda_i \ln x}=\sum_{i=1}^{m} P_i(\ln x)\, x^{\lambda_i}$ et f sera bien une combinaison linéaire des fonctions $(\ln x)^{\nu}\, x^{a}$.

III.A.2.d. A priori il n'y a aucune raison pour que les fonctions $(\ln x)^{\nu}\, x^{a}$ appartiennent à $\mathcal{S}(I)$. On sait seulement que toute fonction de $\mathcal{S}(I)$ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $(\ln x)^{\nu}\, x^{a}$, c'est tout.

III.B.1.a. On a

$$\chi'(x)=\nu(\ln x)^{\nu-1}\frac{1}{x}x^{a}+(\ln x)^{\nu}\, a x^{a-1}=x^{a-1}\left(\nu(\ln x)^{\nu-1}+a(\ln x)^{\nu}\right).$$

La fonction $\chi(x)=(\ln x)^{\nu}\, x^{a}$ est dans $\mathcal{S}(I)$ si, et seulement si, on a

$$\chi'(x)=x\chi'\left(\frac{x}{2}\right),$$

c'est-à-dire

$$(\ln x)^{\nu}\, x^{a}=x\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1}\left(\nu\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\nu-1}+a\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\nu}\right)$$

ou encore

$$2^{a-1}(\ln x)^{\nu}=\nu(\ln x-\ln 2)^{\nu-1}+a(\ln x-\ln 2)^{\nu}.$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout réel strictement positif x, si bien que l'on puisse substituer e^{t} à x pour obtenir

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad 2^{a-1}t^{\nu}-a(t-\ln 2)^{\nu}-\nu(t-\ln 2)^{\nu-1}=0. \qquad (\flat)$$

III.B.1.b. La fonction polynomiale de degré ν du premier membre de l'égalité $(\flat)$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, donc tous les coefficients de ses monômes sont nuls. En particulier, le coefficient dominant est nul, donc $2^{a-1}=a$.

III.B.1.c. Si $\nu\geq 2$, remplaçons t par $\ln 2$ dans $(\flat)$.

On obtient $2^{a-1}(\ln 2)^{\nu}=0$ soit $(\ln 2)^{\nu}=0$. Si $\nu=1$, $(\flat)$ s'écrit

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad 2^{a-1}t-a(t-\ln 2)-1=0$$

et donne $a\ln 2=1$ lorsque $t=0$.

III.B.1.d. $(\ln 2)^{\nu}=0$ est impossible car $\ln 2\neq 0$. Par ailleurs si a vérifie $a\ln 2=1$, il suffit de remplacer dans $2^{a-1}=a$ pour obtenir

$$2^{\frac{1}{\ln 2}-1}=\frac{1}{\ln 2}$$

i.e. $\ln 2 \times e^{\left(\frac{1}{\ln 2}-1\right)\ln 2} = 1$, ou encore $e\ln 2 = 2$. Ce dernier résultat étant faux puisque $e\ln 2 \simeq 1,884$. En conclusion, aucun élément de $\mathcal{S}(I)$ n'est de la forme $(\ln x)^{\nu} x^{a}$ avec $(a,\nu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^{*}$.

III.B.2.

$$x^a \in \mathcal{S}(I) \Leftrightarrow x^a = xa\left(\frac{x}{2}\right)^{a-1} \Leftrightarrow x^a = a\frac{x^a}{2^{a-1}} \Leftrightarrow 2^{a-1} = a.$$

III.B.3. Ce sont les solutions réelles de l'équation $2^{\alpha-1} = \alpha$, donc en particulier $\alpha > 0$. On a

$$2^{\alpha-1} = \alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)\ln 2 = \ln\alpha \Leftrightarrow h(\alpha) = 0$$

où $h(\alpha) = \alpha\ln 2 - \ln\alpha - \ln 2$. Comme h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$h'(\alpha) = \ln 2 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha\ln 2 - 1}{\alpha},$$

on obtient facilement le tableau de variations de h :

	0		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$h'(\alpha)$		$-$		$+$	
$h(\alpha)$	$+\infty$	$\searrow$	$*$	$\nearrow$	$+\infty$

L'équation $h(\alpha) = 0$ admet les deux solutions évidentes 1 et 2, et ce sont les seules d'après le tableau de variation ci-dessus.

III.B.4.a. On sait que

$$h(x) = x^a \in \mathcal{S}(I) \Leftrightarrow 2^{a-1} = a$$

et l'on note $a = \alpha + i\omega = \rho e^{i\Phi}$ avec $\omega \neq 0$ et $\Phi \in]-\pi,\pi[$. D'après le Lemme ci-dessous, $2^{a-1} = a$ entraîne $2^{\overline{a}-1} = \overline{a}$, si bien que l'on puisse seulement rechercher les a tels que $\omega > 0$, ce qui revient à supposer $\Phi \in]0,\pi[$.

Lemme : On a $\overline{2^z} = 2^{\overline{z}}$ pour tout complexe z.

Preuve du Lemme : En notant $z = x + iy$,

$$\overline{2^z} = \overline{e^{(x+iy)\ln 2}} = \overline{e^{x\ln 2}e^{iy\ln 2}} = e^{x\ln 2}e^{-iy\ln 2} = e^{(x-iy)\ln 2} = 2^{\overline{z}}.$$

III.B.4.b.

$$\begin{aligned}(h \in \mathcal{S}(I)) &\Leftrightarrow 2^{a-1} = a \\ &\Leftrightarrow 2^{\alpha-1}e^{i\omega\ln 2} = \rho e^{i\Phi} \\ &\Leftrightarrow (I) \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} 2^{\alpha-1} = \rho \\ \omega\ln 2 = \Phi + n2\pi. \end{cases}\end{aligned}$$

III.B.4.c. Si $h \in \mathcal{S}(I)$, on utilise la caractérisation (I) de la question précédente et l'on pose $\theta = \omega \ln 2 = \Phi + n2\pi$. Alors $\Phi \in]0, \pi[$ entraîne $\theta \in]n2\pi, n2\pi + \pi[$. Comme $\alpha = \rho \cos \Phi = \rho \cos \theta$ et $\omega = \rho \sin \Phi = \rho \sin \theta$, on obtient

$$(II) \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \exists \theta \in]n2\pi, n2\pi + \pi[\quad \begin{cases} \Phi = \theta - n2\pi \\ 2^{\rho \cos \theta} = 2\rho \\ \rho (\ln 2) \sin \theta = \theta. \end{cases}$$

Réciproquement, si (II) est vraie, il suffit de voir que $a = \rho e^{i\Phi} = \rho e^{i\theta}$ et par conséquent que $\alpha = \rho \cos \theta$ et $\omega = \rho \sin \theta$, puis de remplacer, pour obtenir (I).

III.B.4.d. ▶ Si $h \in \mathcal{S}(I)$, alors (II) est vraie donc $\rho = \dfrac{\theta}{(\ln 2) \sin \theta}$ et l'équation $2^{\rho \cos \theta} = 2\rho$ devient successivement :

$$2^{\frac{\theta \cos \theta}{(\ln 2) \sin \theta}} = \frac{2\theta}{(\ln 2) \sin \theta}$$

$$2\theta - (\ln 2) \sin \theta e^{\theta \cot \theta} = 0$$

d'où $g(\theta) = 0$. Par ailleurs

$$\omega = \rho \sin \theta = \frac{\theta}{\ln 2} \text{ et } \alpha = \rho \cos \theta = \frac{\theta \cot \theta}{\ln 2}.$$

On a montré l'implication

$$h \in \mathcal{S}(I) \Rightarrow (III) \quad \exists \theta \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n2\pi, n2\pi + \pi[\quad \begin{cases} g(\theta) = 0 \\ \alpha = \frac{\theta \cot \theta}{\ln 2} \\ \omega = \frac{\theta}{\ln 2} \end{cases}$$

où la réunion des intervalles est maintenant indexée sur $\mathbb{N}$ plutôt que sur $\mathbb{Z}$ pour la simple raison que θ est strictement positif puisque $\omega = \dfrac{\theta}{\ln 2}$ l'est.

▶ Réciproquement, si (III) est vraie,

$$a = \alpha + i\omega = \frac{\theta \cot \theta}{\ln 2} + i \frac{\theta}{\ln 2} = \frac{\theta}{(\ln 2) \sin \theta} (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Si $\theta \in]n2\pi, n2\pi + \pi[$, on pose alors $\Phi = \theta - n2\pi \in]0, \pi[$ et $\rho = \dfrac{\theta}{(\ln 2) \sin \theta}$ pour obtenir $a = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\Phi}$ et deux des trois équations de (II). La dernière équation de (II) à vérifier est $2^{\rho \cos \theta} = 2\rho$, et c'est l'exacte transcription de l'équation $g(\theta) = 0$ comme on l'a vu plus haut. Finalement (II) est démontrée et (III) caractérise encore les fonctions h qui appartiennent à $\mathcal{S}(I)$.

III.B.4.e. a) Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$ alors $\theta\cot\theta \leq 1$ et

$$\frac{\ln 2}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}e^{\theta\cot\theta} \leq \frac{\ln 2}{2}e < 1.$$

b) Si $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a toujours $\sin\theta \leq \theta$ avec cette fois-ci $\theta\cot\theta \leq 0$, d'où

$$\frac{\ln 2}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}e^{\theta\cot\theta} \leq \frac{\ln 2}{2} < 1.$$

Conclusion : Puisque

$$g(\theta) > 1 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}e^{\theta\cot\theta} < 1,$$

on vient de montrer que l'équation $\mathcal{G} : g(\theta) = 0$ ne possède aucune solution θ dans l'intervalle $]0, \pi[$.

III.B.4.f. L'application $g(\theta) = 2\theta - (\ln 2)(\sin\theta)e^{\theta\cot\theta}$ est dérivable sur $]n2\pi, n2\pi + \pi[$ et

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 2 - (\ln 2)\left[\cos\theta e^{\theta\cot\theta} + (\sin\theta)e^{\theta\cot\theta}\left(\cot\theta + \theta\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\right)\right] \\ &= 2 + (\ln 2)\frac{\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}e^{\theta\cot\theta}. \end{aligned}$$

Pour tout $\theta \in]n2\pi, n2\pi + \pi[$, on a $\sin\theta > 0$ et $\theta - 2\sin\theta\cos\theta \geq n2\pi - 2 > 0$ donc $g'(\theta) > 0$. La fonction $g(\theta)$ est donc strictement croissante sur l'intervalle considéré.

► Si $\theta \to n2\pi_+$, posons $t = \theta - n2\pi \to 0_+$. On obtient

$$g(\theta) = 2t + n4\pi - (\ln 2)(\sin t)e^{(n2\pi + t)\cot t}.$$

Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} &= \frac{1 + o(t)}{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)} = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \times \frac{1}{t} \times \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)} \\ &= \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o(t)\right)\left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) = \frac{1}{t} - \frac{t}{3} + o(t), \end{aligned}$$

donc

$$(n2\pi + t)\cot t = (n2\pi + t)\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{3} + o(t)\right) = \frac{n2\pi}{t} + 1 - \frac{n2\pi t}{3} + o(t)$$

et

$$e^{(n2\pi+t)\cot t} = e^{\frac{n2\pi}{t}+1}e^{-\frac{n2\pi t}{3}+o(t)} = e \times e^{\frac{n2\pi}{t}}\left(1 - \frac{n2\pi t}{3} + o\left(t\right)\right).$$

Par suite

$$\begin{aligned} g\left(\theta\right) &= 2t + n4\pi - \left(\ln 2\right)\left(t + o\left(t\right)\right) \times e \times e^{\frac{n2\pi}{t}}\left(1 - \frac{n2\pi t}{3} + o\left(t\right)\right) \\ &= 2t + n4\pi - \left(\ln 2\right) e \times e^{\frac{n2\pi}{t}}\left(t + o\left(t\right)\right) \end{aligned}$$

et $\lim_{t\to 0_+} g\left(\theta\right) = -\infty$.

▶ Si $\theta \to \left(2n+1\right)\pi_-$, posons $m = 2n+1$ et $t = m\pi - \theta$. Alors $t \to 0_+$ et

$$g\left(\theta\right) = 2m\pi - 2t - \left(\ln 2\right)\left(\sin t\right) e^{(t-m\pi)\cot t}.$$

On trouve

$$\left(t - m\pi\right)\cot t = \left(t - m\pi\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{3} + o\left(t\right)\right) = -\frac{m\pi}{t} + 1 + \frac{m\pi t}{3} + o\left(t\right)$$

et

$$\left(\sin t\right) e^{(t-m\pi)\cot t} = \left(t + o\left(t\right)\right) e^{1-\frac{m\pi}{t}}\left(1 + \frac{m\pi t}{3} + o\left(t\right)\right) = e^{1-\frac{m\pi}{t}}\left(t + o\left(t\right)\right)$$

d'où

$$g\left(\theta\right) = 2m\pi - 2t - \left(\ln 2\right) e^{1-\frac{m\pi}{t}}\left(t + o\left(t\right)\right)$$

et $\lim_{t\to 0_+} g\left(\theta\right) = 2m\pi$.

▶ En conclusion, la fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]n2\pi, n2\pi + \pi[$, $\lim\limits_{\theta\to n2\pi_+} g\left(\theta\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\theta\to(2n+1)\pi_-} g\left(\theta\right) = 2m\pi$. Le tableau de variation de g (et le Théorème des valeurs intermédiaires) montre alors que l'équation $g\left(\theta\right) = 0$ admet une unique solution θ_n dans l'intervalle $]n2\pi, n2\pi + \pi[$.

III.B.4.g. ▶ Montrons que les réels de la famille $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux distincts. Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers n et m distincts tels que $\alpha_n = \alpha_m$. On a

$$\alpha_n = \frac{\theta_n \cot\theta_n}{\ln 2}$$

et $g\left(\theta_n\right) = 2\theta_n - \left(\ln 2\right)\left(\sin\theta_n\right) e^{\theta_n\cot\theta_n} = 0$ donc

$$e^{\alpha_n \ln 2} = e^{\theta_n\cot\theta_n} = \frac{2\theta_n}{\left(\ln 2\right)\sin\theta_n}.$$

Par suite
$$\frac{\theta_n}{\sin\theta_n} = \frac{\theta_m}{\sin\theta_m}. \qquad (1)$$
Mais alors
$$(\ln 2)\, e^{\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\cos\theta_n} = \frac{2\theta_n}{\sin\theta_n} \text{ et } (\ln 2)\, e^{\frac{\theta_m}{\sin\theta_m}\cos\theta_m} = \frac{2\theta_m}{\sin\theta_m}$$
associées à (1) entraînent $\cos\theta_n = \cos\theta_m$. Comme θ_n est dans $]n2\pi, n2\pi+\pi[$ et θ_m dans $]m2\pi, m2\pi+\pi[$, on en déduit l'existence d'un entier relatif k tel que $\theta_n = \theta_m + k2\pi$, puis $\sin\theta_n = \sin\theta_m$. En remplaçant dans (1), on trouve $\theta_n = \theta_m$, ce qui est absurde puisque les réels θ_n et θ_m appartiennent à des intervalles disjoints.

▶ Montrons que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre. Pour cela posons $h_n(x) = x^{a_n}$ et montrons la propriété suivante par récurrence sur k :

$\mathcal{P}(k)$: Pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$ de cardinal k,
$$\sum_{n\in I} \lambda_n x^{a_n} = 0 \Rightarrow (\forall n \in I \quad \lambda_n = 0).$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vérifiée. Si $\mathcal{P}(k-1)$ est vraie, considérons une partie I de $\mathbb{N}$ de cardinal k. On a $a_n = \alpha_n + i\omega_n$, donc tous les a_n sont distincts deux à deux (puisque les α_n le sont). Posons $n_0 = \operatorname{Min} I$. On obtient (en dérivant)
$$\sum_{n\in I} \lambda_n x^{a_n} = 0 \Rightarrow \sum_{n\in I} \lambda_n x^{a_n - a_{n_0}} = 0 \Rightarrow \sum_{n\in I\setminus\{n_0\}} \lambda_n (a_n - a_{n_0})\, x^{a_n - a_{n_0} - 1} = 0$$
et l'hypothèse récurrente au rang $k-1$ entraîne $\lambda_n (a_n - a_{n_0}) = 0$ pour tout $n \in I\setminus\{n_0\}$. Par suite $\lambda_n = 0$ pour tout $n \in I\setminus\{n_0\}$, ce qui entraîne à son tour $\lambda_{n_0} x^{a_{n_0}} = 0$ soit $\lambda_{n_0} = 0$.

▶ La famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre, infinie et incluse dans $\mathcal{S}(I)$, donc $\mathcal{S}(I)$ n'est pas de dimension finie. Supposons par l'absurde que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ soit de dimension finie, et notons $(f_1, \cdots, f_m)$ une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$. D'après **II.A.2**, si $f \in \mathcal{S}(I)$ alors $\mathcal{R}\circ f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$ et $\mathcal{I}\circ f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(I)$, et il existe des réels λ_s et μ_s tels que $\mathcal{R}\circ f = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s f_s$ et $\mathcal{I}\circ f = \sum_{s=1}^{m} \mu_s f_s$. Dans ce cas
$$f = (\mathcal{R}\circ f) + i\,(\mathcal{I}\circ f) = \sum_{s=1}^{m} (\lambda_s + i\mu_s)\, f_s$$
et $(f_1, \cdots, f_m)$ sera un système fini générateur du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(I)$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{S}(I)$ est de dimension infinie.

III.B.4.h. La solution de l'équation $g(\theta) = 2\theta - (\ln 2)(\sin\theta)\, e^{\theta \cot\theta} = 0$ appartenant à $]2\pi, 3\pi[$ est $\theta_1 \simeq 7.454\,087\,573$. Les formules de (III) donnent alors

$$\alpha_1 = \frac{\theta_1 \cot\theta_1}{\ln 2} \simeq 4,545\,364\,925 \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\theta_1}{\ln 2} \simeq 10,753\,975\,18.$$

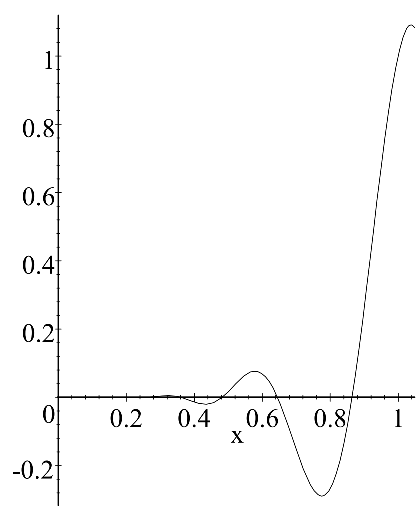
D'où le tableau suivant contenant les valeurs approchées à 10^{-4} près :

à 10^{-4} près	par défaut :	par excès :
θ_1	$7,454\,0$	$7,454\,1$
α_1	$4,545\,3$	$4,545\,4$
ω_1	$10,753\,9$	$10,754\,0$

On a $h_1(x) = x^{\alpha_1 + i\omega_1} = e^{\alpha_1 \ln x} \times e^{i\omega_1 \ln x}$ donc $\mathcal{R} \circ h_1(x) = e^{\alpha_1 \ln x} \cos(\omega_1 \ln x)$. L'allure de la courbe

$$\mathcal{R} \circ h_1(x) \simeq e^{4,545\,364\,925 \ln x} (\cos 10,753\,975\,18 \times \ln x)$$

sur $]0, 1]$ est représentée ici :



Partie IV

IV.A. Première erreur : Une petite étourderie peut être relevée dans la réponse de la question 2. En fait $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $1 - \|x\|^2 \leq 0$, et cela équivaut à $\|x\| \geq 1$ et pas du tout à $\|x\| > 1$ comme écrit.

Seconde erreur : La fonction φ n'est pas de classe C^∞ comme l'affirme la solution de la question 3, mais seulement C^1, comme on pourra le vérifier ci-dessous.

Troisième erreur : On peut noter un problème important de rédaction lorsqu'on lit « puisque les dérivées à gauche et à droite sont toutes nulles en a, b, c et d (...) », alors que l'on devrait expliquer que, si l'on se place en b par exemple (le raisonnement est le même en a, c ou d), pour tout entier naturel k, la fonction s est de classe C^k sur un intervalle ouvert I contenant b, que $s^{(k)}$ est une fonction dérivable sur $I \setminus \{b\}$, que les limites $\lim_{x\to b_-} s^{(k)}(x) = l$ et $\lim_{x\to b_+} s^{(k)}(x) = l'$ existent (dans $\mathbb{R}$), et qu'elles sont égales. On utiliserait alors le Lemme important qui sera énoncé et démontré en **IV.B.1**.

Remarques : 1) Complément d'explications pour les deux dernières erreurs relevées ci-dessus : Pour montrer - ou tenter de montrer - que s est de classe C^∞ en b (par exemple), on utilise le Lemme du **IV.B.1**, et l'on procède aux vérifications suivantes :

a) s est bien continue sur $\mathbb{R}$.

b) Si $x \in]a, b[$,

$$s'(x) = \frac{1}{\varphi(0)}\varphi'\left(\frac{x-b}{b-a}\right) \times \frac{1}{b-a} \underset{x\to b_-}{\longrightarrow} \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)(b-a)} = 0$$

puisque $\varphi'(x) = -2x\psi'\left(1-x^2\right)$ entraîne $\varphi'(0) = 0$. Ainsi $s'(x)$ existe sur $]a, b[$ et sur $]b, c[$, et $\lim_{x\to b_-} s'(x) = \lim_{x\to b_+} s'(x) = 0$. Le Lemme prouve alors que s est de classe C^1 au voisinage de b. On raisonnerait de la même façon aux voisinages de a, c ou d, pour conclure :

$$s \textbf{ est de classe } C^1 \textbf{sur } \mathbb{R}.$$

c) s' est continue sur $\mathbb{R}$. Si $x \in]a, b[$,

$$s''(x) = \frac{1}{\varphi(0)}\varphi''\left(\frac{x-b}{b-a}\right) \times \frac{1}{(b-a)^2} \underset{x\to b_-}{\longrightarrow} \frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)(b-a)^2}$$

et $\varphi''(x) = 4x^2\psi''\left(1-x^2\right) - 2\psi'\left(1-x^2\right)$ d'où $\varphi''(0) = -2\psi'(1) = -2e^{-1}$. Ainsi

$$\lim_{x\to b_-} s''(x) = \frac{-2}{(b-a)^2} \neq 0 \text{ tandis que } \lim_{x\to b_+} s''(x) = 0.$$

Cela prouve que f n'est pas de classe C^2 au voisinage de b, donc a fortiori :

$$s \textbf{ n'est pas de classe } C^2 \textbf{sur } \mathbb{R}.$$

2) Vérifions que la première phrase de la réponse à la question 3 est exacte. Le support $\operatorname{Supp}\varphi$ de la fonction φ est, par définition, l'adhérence de l'ensemble formé des points où φ ne s'annule pas.

Si l'on note $A = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi(x) \neq 0\}$, on peut écrire $\operatorname{Supp}\varphi = \overline{A}$. Dans ce cas on a $\complement A = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi(x) = 0\}$ et l'intérieur $\overbrace{\complement A}^{o}$ sera le plus grand ouvert formé des éléments x tels que $\varphi(x) = 0$. Comme $\complement \overline{A} = \overbrace{\complement A}^{o}$, on déduit

$$\operatorname{Supp}\varphi = \overline{A} = \complement(\overbrace{\complement A}^{o})$$

et l'on constate que le support d'une fonction φ est bien égal au complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est identiquement nulle.

IV.B.1. Le Lemme très important que l'on utilise est bien une conséquence du Théorème des accroissements finis :

> **Lemme** : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ d'intérieur non vide, dérivable sur $[a, b] \setminus \{x_0\}$ et telle que la limite $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et soit égale à l, est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

Preuve du Lemme : Pour x appartenant à $[a, b]$ et différent de x_0, le Théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| f(x) - lx - (f(x_0) - lx_0) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{t \text{ strictement} \\ \text{entre } x_0 \text{ et } x}} \left| f'(t) - l \right|, \end{aligned}$$

et l'hypothèse $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$ permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus soit $\leq \varepsilon$ dès que $|x - x_0| \leq \eta$. ■

Exemple de rédaction détaillée de la réponse à la question 1 : La première propriété $\mathcal{P}(k)$ qui doit être montrée par récurrence est la suivante : « La fonction ψ est k fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe un polynôme $P_k(x)$ de degré $2k$ tel que $\psi^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}$ pour tout

$t \in \mathbb{R}_+^*$. » La preuve est facile. La propriété est triviale au rang 0. Si elle est vraie au rang k, alors $\psi^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables, et

$$\psi^{(k+1)}(t) = -\frac{1}{t^2}P_k'\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}} + \frac{1}{t^2}P_k\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}} = P_{k+1}\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$$

avec $P_{k+1}(x) = x^2(P_k(x) - P_k'(x))$. Puisque $\deg P_k = 2k$, on déduit que $\deg(P_k - P_k') = 2k$ et $\deg P_{k+1} = 2(k+1)$. La propriété est démontrée au rang $n+1$.

La seconde propriété $\mathcal{Q}(k)$ qui doit être montrée par récurrence s'énonce : « ψ est de classe C^k ». La propriété $\mathcal{Q}(0)$ est évidente. Si $\mathcal{Q}(k)$ est vraie, on sait que $\psi^{(k)}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, que ψ est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après $\mathcal{P}(k+1)$), et aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ (où ψ coïncide avec la fonction nulle). De plus

$$\lim_{x\to 0_-}\psi^{(k+1)}(x) = \lim_{x\to 0_+}\psi^{(k+1)}(x) = 0.$$

Le Lemme montre alors que $\psi^{(k)}$ est aussi dérivable en 0 et que $\psi^{(k+1)}(0) = 0$. La continuité de $\psi^{(k+1)}$ est maintenant triviale sur tout $\mathbb{R}$, et cela prouve la propriété $\mathcal{Q}(k+1)$ au rang $k+1$.

IV.B.2. La norme utilisée est la norme euclidienne $\| \quad \|_2$ dérivée du produit scalaire euclidien canonique.

On a $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ si $x = (x_1, \cdots, x_n)$. L'application

$$\varphi(x) = \psi\left(1 - \|x\|^2\right)$$

est de classe C^∞ comme la composée de deux applications de classe C^∞ (on a déjà prouvé que ψ appartient à $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et l'application

$$x \mapsto 1 - \|x\|^2 = 1 - \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)$$

est polynomiale comme fonction des coordonnées de x, donc appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$). Si $\|x\| = 1$, $\varphi(x) = \psi(0) = 0$. Cependant l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \varphi(x) \neq 0\}$$

coïncide avec la boule unité ouverte B de $\mathbb{R}^n$, donc $\operatorname{Supp}\varphi = \overline{B}$ est la boule unité fermée.

IV.B.3.a. Le support de la fonction δ est égal à l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \delta(x) \neq 0\} =]0,1[$, donc à $[0,1]$. On a

$$\delta(x) = e^{-\dfrac{1}{x(1-x)}} = \psi(x(1-x))$$

si $0 < x < 1$, et
$$\delta(x) = 0 = \psi(x(1-x))$$
si $x \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$. Ainsi $\delta = \psi \circ h$ sur tout $\mathbb{R}$, où $h(x) = x(1-x)$ est une fonction polynomiale de degré 2. Les fonctions ψ et h appartenant à $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il en sera de même de δ.

IV.B.3.b. La fonction δ est continue sur $[0,1]$, positive sur cet intervalle, et non identiquement nulle (puisque par exemple $\delta\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-4} > 0$), donc $\eta = \int_0^1 \delta(t)\ dt > 0$. En effet, si l'on pose $\delta\left(\frac{1}{2}\right) = l > 0$, par continuité il existe $\frac{1}{2} > \mu > 0$ tel que $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \mu$ entraîne $|\delta(x) - l| < \frac{l}{2}$, donc a fortiori $\frac{l}{2} < \delta(x)$. Puisque δ est positive, on déduit alors
$$\eta = \int_0^{\frac{1}{2}-u} \delta(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}-u}^{\frac{1}{2}+u} \delta(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}+u}^{1} \delta(t)\ dt \geq \int_{\frac{1}{2}-u}^{\frac{1}{2}+u} \frac{l}{2}\, dt = lu > 0.$$

IV.B.3.c. Comme δ est continue sur $\mathbb{R}$, l'application Δ sera définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $\Delta'(x) = \frac{1}{\eta}\delta(x)$. Puisque $\delta \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on déduit $\Delta \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $0 \leq x \leq y \leq 1$,
$$\Delta(y) - \Delta(x) = \frac{1}{\eta}\int_x^y \delta(t)\ dt > 0$$
pour les mêmes raisons qu'en **IV.B.3.b**, donc Δ est strictement croissante sur $[0,1]$. Il est enfin facile de vérifier que :
$$x \leq 0 \Rightarrow \Delta(x) = -\frac{1}{\eta}\int_x^0 \delta(t)\ dt = -\frac{1}{\eta}\int_x^0 0\, dt = 0$$
et
$$x \geq 1 \Rightarrow \Delta(x) = \frac{1}{\eta}\int_0^1 \delta(t)\ dt + \frac{1}{\eta}\int_1^x \delta(t)\ dt = \frac{1}{\eta}\int_0^1 \delta(t)\ dt = 1.$$

IV.B.3.d. La fonction
$$s(x) = \Delta\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \Delta\left(\frac{d-x}{d-c}\right) - 1$$
est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées d'applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. L'étude des 6 cas possibles faite ci-dessous montre que s répond à

la question 3 de la Section **IV.A**.

$$x \le a \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} \le 0 \\ \frac{d-x}{d-c} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow s(x) = 0 + 1 - 1 = 0,$$

$$a < x \le b \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{x-a}{b-a} \le 1 \\ \frac{d-x}{d-c} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow s(x) = \underbrace{\Delta\left(\frac{x-a}{b-a}\right)}_{>0} + 1 - 1 > 0,$$

$$b \le x \le c \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} \ge 1 \\ \frac{d-x}{d-c} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow s(x) = 1 + 1 - 1 = 1,$$

$$c \le x < d \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} \ge 1 \\ 0 < \frac{d-x}{d-c} \le 1 \end{cases} \Rightarrow s(x) = 1 + \underbrace{\Delta\left(\frac{d-x}{d-c}\right)}_{>0} - 1 > 0,$$

$$x \ge d \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} \ge 1 \\ \frac{d-x}{d-c} \le 0 \end{cases} \Rightarrow s(x) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Partie V

V.A.1.a. Si $\mu_n |x| < 1$, a fortiori $|a_n| |x| \le 1$ et

$$|\varphi_n(x)| = \frac{|a_n|}{n!} \xi(\mu_n x) |x|^n \le \frac{|a_n| |x|^n}{n!} \le \frac{|x|^{n-1}}{n!}.$$

Si $\mu_n |x| \ge 1$, alors $|\mu_n x| \ge 1$ donc $\xi(\mu_n x) = 0$ et $\varphi_n(x) = 0$.

V.A.1.b. La série $\sum \varphi_n(x)$ converge absolument puisque

$$|\varphi_n(x)| \le \frac{|x|^{n-1}}{n!}$$

(pour tout n et quel que soit le réel x fixé) et puisque la série à termes positifs $\sum \frac{|x|^{n-1}}{n!}$ converge d'après la règle de d'Alembert (en effet $\lim \dfrac{|x|}{n+1} = 0 < 1$). Enfin $|x| \ge 1$ entraîne $|\mu_n x| \ge |x| \ge 1$ d'où $\xi(\mu_n x) = 0$ et $\varphi_n(x) = 0$ pour tout n. Dans ce cas $\Phi_n(x) = 0$.

V.A.1.c. Une récurrence triviale montre que $\xi^{(j)}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$. Comme $\xi^{(j)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'image du compact $[-1,1]$ par $\xi^{(j)}$ est un compact, donc un fermé borné de $\mathbb{R}$. Cela prouve que l'image $\xi^{(j)}(\mathbb{R}) = \xi^{(j)}([-1,1])$ est bornée et assure l'existence de m_j.

V.A.1.d. ▶ Cas où $|x| \leq \frac{1}{\mu_n}$: On a

$$\varphi_n^{(j)}(x) = \left(\frac{a_n}{n!}\xi(\mu_n x)x^n\right)^{(j)} = \frac{a_n}{n!}\sum_{k=0}^{j} C_j^k \xi^{(j-k)}(\mu_n x)\,\mu_n^{j-k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

Compte tenu de $|a_n| \leq \mu_n$, de $|x| \leq \dfrac{1}{\mu_n}$ et de la définition de M_j, on obtient

$$\left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| \leq \frac{M_j}{\mu_n^{n-(j+1)}}\sum_{k=0}^{j} C_j^k \frac{1}{(n-k)!}.$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{j} C_j^k \frac{1}{(n-k)!} \leq \frac{1}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{j} C_j^k = \frac{2^j}{(n-j)!}$$

on trouve

$$\left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| \leq \frac{2^j M_j}{(n-j)!}\frac{1}{\mu_n^{n-(j+1)}}.$$

Enfin il suffit de rappeler que $n-(j+1) \geq 0$ et $\mu_n \geq 1$ pour obtenir la majoration demandée

$$\left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| \leq \frac{2^j M_j}{(n-j)!}. \qquad (*)$$

▶ Cas où $|x| > \dfrac{1}{\mu_n}$: Ici $|\mu_n x| \geq 1$ donc $\xi(\mu_n x) = 0$ et $\varphi_n(x) = 0$. En fait, le même calcul montre que φ_n est identiquement nulle au voisinage de x, de sorte que les dérivées successives $\varphi_n^{(j)}(x)$ soient toutes nulles en x. L'inégalité $(*)$ est alors triviale.

V.A.1.e. ▶ Par récurrence sur j, on montre que $\Phi(x)$ est une fonction de classe C^j sur $\mathbb{R}$ et que $\Phi^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n^{(j)}(x)$. Au rang $j=0$, la série de fonctions $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(x)$ converge uniformément sur tout $\mathbb{R}$ (puisque $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{M_0}{n!}$ et puisque $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{M_0}{n!}$ est convergente), donc définie une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Si la propriété est vraie au rang j, alors $\Phi^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n^{(j)}(x)$ et chacune des fonctions $\varphi_n^{(j)}(x)$ est de classe C^1 (et même C^∞). Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n^{(j)}(x)$ converge pour tout x fixé, et comme la série des dérivées $\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n^{(j+1)}(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (puisque $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{2^j M_j}{(n-j)!}$

dès que $n \geq j+1$ et puisque $\sum_{n=j+1}^{+\infty} \dfrac{2^j M_j}{(n-j)!}$ converge), un résultat classique concernant les séries de fonctions montre que $\Phi^{(j)}(x)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi^{(j+1)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{(j+1)}(x)$. Cela prouve la propriété au rang $j+1$.

▶ On a $\Phi^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{(j)}(x)$ et la formule de dérivation d'un produit nous a déjà donné (**V.A.1.d**)

$$\varphi_n^{(j)}(x) = \left(\frac{a_n}{n!}\xi(\mu_n x)\, x^n\right)^{(j)} = \frac{a_n}{n!} \sum_{k=0}^{\mathrm{Min}(j,n)} C_j^k \xi^{(j-k)}(\mu_n x)\, \mu_n^{j-k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Ainsi

$$\varphi_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ a_n C_j^n \xi^{(j-n)}(0)\, \mu_n^{j-n} n & \text{si } n \leq j. \end{cases}$$

Puisque

$$\xi^{(j-n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j-n \geq 1 \\ 1 & \text{si } j=n, \end{cases}$$

on déduit

$$\varphi_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ a_n & \text{si } j=n. \end{cases}$$

Par suite

$$\Phi^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n^{(j)}(0) = \varphi_j^{(j)}(0) = a_j.$$

V.A.1.f. Une suite réelle quelconque $(a_n)_n$ étant donnée, il existe au moins une fonction Φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\Phi^{(j)}(0) = a_j$ pour tout entier naturel j, et dont le support est inclus dans $[-1,1]$. Ce Théorème montre l'existence d'une fonction lisse dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$ en entier, et satisfaisant des conditions très précises en 0 (la tangente en 0 et les sous-espaces caractéristiques Vect $\left(\Phi'(0), \Phi''(0), \cdots, \Phi^{(j)}(0)\right)$ du graphe de cette fonction en 0 sont fixés à l'avance de façon arbitraire).

V.A.2.a. L'application $\Psi(x) = \Phi_a(x) + \Phi_b(x-1)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux applications C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on a $\Psi^{(n)}(x) = \Phi_a^{(n)}(x) + \Phi_b^{(n)}(x-1)$, donc

$$\begin{cases} \Psi^{(n)}(0) = \Phi_a^{(n)}(0) + \Phi_b^{(n)}(-1) = a_n \\ \Psi^{(n)}(1) = \Phi_a^{(n)}(1) + \Phi_b^{(n)}(0) = b_n. \end{cases}$$

V.A.2.b. Soit λ un nombre strictement positif donné. On peut recommencer les questions **V.A.1** à **V.A.2.a** en remplaçant 1 par λ dans la définition de la fonction ξ. Dans ce cas le support de Φ_a est inclus dans $[-\lambda,\lambda]$ et l'on peut considérer la fonction $\Psi(x) = \Phi_a(x) + \Phi_b(x-\lambda)$ en s'inspirant de **V.A.2.a,** pour obtenir

$$\begin{cases} \Psi^{(n)}(0) = \Phi_a^{(n)}(0) + \Phi_b^{(n)}(-\lambda) = a_n \\ \Psi^{(n)}(\lambda) = \Phi_a^{(n)}(\lambda) + \Phi_b^{(n)}(0) = b_n. \end{cases}$$

V.B.1. Si $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$, **II.B.1** montre que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et il en sera de même de la fonction $\widehat{f}(t) = f\left(e^{2t}\right)$ par composition. De plus, pour tout réel t,

$$\widehat{f}'(t) = 2e^{2t} f'\left(e^{2t}\right) = f\left(2e^{2t}\right) = f\left(e^{2t+\ln 2}\right) = \widehat{f}(t+l)$$

puisque f vérifie $f(x) = xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

V.B.2. Tout élément g de l'ensemble

$$\mathcal{T} = \left\{ g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(x+l) \right\}$$

est infiniment dérivable (une récurrence simple permet de le vérifier, ainsi que la formule $g^{(k+1)}(x) = g^{(k)}(x+l)$), donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $f, g \in \mathcal{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(f+\lambda g)'(x) = f'(x) + \lambda g'(x) = f(x+l) + \lambda g(x+l) = (f+\lambda g)(x+l)$$

donc $\mathcal{T}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

L'application

$$\begin{array}{rccc} \zeta: & \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[) & \to & \mathcal{T} \\ & f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est bien définie. Elle est linéaire car $(\widehat{f+\lambda g}) = \widehat{f} + \lambda\widehat{g}$, et bijective puisque $\widehat{f}(t) = \widehat{g}(t)$ entraîne $f\left(e^{2t}\right) = g\left(e^{2t}\right)$ pour tout réel t, donc $f = g$ (égalité entre fonctions définies sur $]0,+\infty[$). C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

V.B.3.a. On pose :

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([0,l],\mathbb{R}) \ / \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(l) = f^{(n+1)}(0) \right\}.$$

La fonction g_1 est de classe C^∞ sur $[0,l[$ et $]l,2l]$. De plus

$$\lim_{x\to l_-} g_1(x) = \gamma(l)$$

et

$$\lim_{x\to l_+} g_1(x) = \lim_{x\to l_+} \gamma'(x-l) = \gamma'(0) = \gamma(l) \ \ (\text{car } \gamma \in \mathcal{H})$$

montrent que g_1 est continue en l. Enfin g_1 est dérivable en l puisque définie et dérivable sur $[0, l[$ et $]l, 2l]$ avec $\lim_{x\to l_-} g_1'(x) = \lim_{x\to l_+} g_1'(x)$ puisque

$$\lim_{x\to l_-} g_1'(x) = \gamma'(l)$$

et

$$\lim_{x\to l_+} g_1'(x) = \lim_{x\to l_+} \gamma''(x-l) = \gamma''(0) = \gamma'(l) \text{ (car } \gamma \in \mathcal{H}).$$

V.B.3.b. γ_{-1} est C^∞ sur $[-l, 0]$ et $\gamma_{-1}'(x) = \gamma(x+l)$. Ainsi g_{-1} est de classe C^∞ sur $[-l, 0[$ et $]0, l]$. On a

$$\lim_{x\to 0_-} g_{-1}(x) = \gamma(0) \text{ et } \lim_{x\to 0_+} g_{-1}(x) = \lim_{x\to 0_+} \gamma(x) = \gamma(0)$$

d'où $\lim_{x\to 0_-} g_{-1}(x) = \lim_{x\to 0_+} g_{-1}(x)$ et la continuité de g_{-1} en 0. La fonction g_{-1} est donc dérivable sur $[-l, 0[$ et $]0, l]$, continue en 0, et il suffit de vérifier l'égalité $\lim_{x\to 0_-} g_{-1}'(x) = \lim_{x\to 0_+} g_{-1}'(x)$ pour affirmer que g_{-1} est continûment dérivable sur tout $[-l, l]$. On vérifie donc que :

$$\lim_{x\to 0_-} g_{-1}'(x) = \lim_{x\to 0_-} \gamma(x+l) = \gamma(l)$$

et :

$$\lim_{x\to 0_+} g_{-1}'(x) = \lim_{x\to 0_+} \gamma'(x) = \gamma'(0) = \gamma(l)$$

(car $\gamma \in \mathcal{H}$).

V.B.3.c. ▶ **Analyse** : S'il existe $g \in \mathcal{T}$ telle que $g|_{[0,l]} = \gamma$, nécessairement

$$\forall x \in [l, 2l] \quad g(x) = g'(x-l) = \gamma'(x-l) = \gamma_1(x).$$

On montrerait alors la propriété suivante par récurrence sur k :

$$\forall x \in [kl, (k+1)l] \quad g(x) = \gamma^{(k)}(x-kl).$$

On ferait alors de même à gauche de 0, en écrivant

$$\forall x \in [-l, 0] \quad g'(x) = g(x+l) = \gamma(x+l)$$

d'où

$$\forall x \in [-l, 0] \quad g(x) = \int_0^x \gamma(t+l)\, dt + g(0) = \int_l^{x+l} \gamma(u)\, du + \gamma(0) = \gamma_{-1}(x).$$

On obtiendrait alors et de proche en proche une description de g sur $]-\infty, 0]$ en fonction de γ utilisant des primitives successives. Finalement, s'il existe

$g \in \mathcal{T}$ telle que $g|_{[0,l]} = \gamma$, alors g est unique et définie en fonction de γ par les formules ci-dessus.

▶ **Synthèse** : On n'oubliera surtout pas la réciproque : l'unique fonction g définie ci-dessus est bien continûment dérivable, et appartient à $\mathcal{T}$ (les questions **V.B.3.a** et **V.B.3.b** montrent d'ailleurs ce résultat sur les intervalles $[-l, l]$ et $[0, 2l]$.

V.B.3.d. L'application

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathcal{T} & \to & \mathcal{H} \\ & g & \mapsto & g|_{[0,l]} \end{array}$$

est bien linéaire entre deux espaces vectoriels. Si $\gamma \in \mathcal{H}$, la question précédente montre qu'il existe une unique application g de $\mathcal{T}$ telle que $\rho(g) = \gamma$, et cela prouve que ρ est bijective. ρ est donc bien un isomorphisme de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{H}$.

V.B.4.a. L'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathcal{H} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & f & \mapsto & \left(f^{(n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

est clairement linéaire. Montrons qu'elle est surjective. Si $(a_n)_n$ est une suite réelle quelconque, le corollaire du Théorème d'Emile Borel vu en **V.A.2.b** montre l'existence d'au moins une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ et $f^{(n)}(l) = a_{n+1}$. La restriction de cette fonction à $[0, l]$, que nous noterons encore f, sera toujours de classe C^∞ sur cet intervalle et vérifiera bien l'égalité $f^{(n)}(l) = a_{n+1} = f^{(n+1)}(0)$ pour tout entier n, donc appartiendra à $\mathcal{H}$. La surjectivité de θ est prouvée.

V.B.4.b. Les questions **V.B.2** et **V.B.3.d** montrent que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0, +\infty[)$ et $\mathcal{H}$ sont isomorphes, l'isomorphisme étant la composée $\rho \circ \zeta$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0, +\infty[) & \overset{\zeta}{\to} & \mathcal{T} & \overset{\rho}{\to} & \mathcal{H} \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}|_{[0,l]}. \end{array}$$

Par hypothèse $\mathcal{H} = \mathcal{U} \oplus \operatorname{Ker} \theta$. Puisque θ est surjective, l'application

$$\begin{array}{rcc} \xi : \mathcal{H} = \mathcal{U} \oplus \operatorname{Ker} \theta & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \operatorname{Ker} \theta \\ f = g + h & \mapsto & (\theta(g), h) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, ξ est linéaire, surjective puisque θ l'est, et injective puisque $(\theta(g), h) = (0, 0)$ entraîne

$$g \in \mathcal{U} \cap \operatorname{Ker} \theta = \{0\}$$

donc $g = 0$ et $f = g + h = 0$.

Par ailleurs

$$h \in \operatorname{Ker}\theta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h \in \mathcal{C}^{\infty}([0,l],\mathbb{R}) \\ \forall n \quad h^{(n)}(l) = h^{(n+1)}(0) \\ \forall n \quad h^{(n)}(0) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h \in \mathcal{C}^{\infty}([0,l],\mathbb{R}) \\ \forall n \quad h^{(n)}(l) = h^{(n)}(0) = 0 \end{array} \right.$$

de sorte qu'à chaque $h \in \operatorname{Ker}\theta$ on puisse associer une fonction $\widetilde{h}$ de $\mathcal{K}$ en posant

$$\widetilde{h}(x) = \left\{ \begin{array}{l} h(x) \text{ si } x \in [0,l], \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

On définit ainsi un isomorphisme d'espaces vectoriels et l'on peut écrire

$$\operatorname{Ker}\theta \simeq \mathcal{K}.$$

Finalement $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[) \simeq \mathcal{T} \simeq \mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \operatorname{Ker}\theta \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{K}$.

V.B.4.d. En séparant parties réelles et imaginaires, en utilisant le résultat de **II.A.2**, et en appliquant le résultat démontré dans le cas réel, on obtiendrait aussi $\mathcal{S}(]0,+\infty[) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$.

Chapitre 5

CAPES externe 2003, épreuve 1

5.1 Énoncé

Notations et objets du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels, par* $\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels et par* $\mathbb{R}^+$ *l'ensemble des réels positifs ou nuls.*

Pour tout entier naturel n *et tout entier* k *compris entre* 0 *et* n*, on note* C_n^k *le coefficient binomial défini par :*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Si A, B *sont deux ensembles, avec* B *inclus dans* A*, on note* $A \setminus B$ *l'ensemble :*

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

On rappelle que si E *est un espace vectoriel réel, une famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in K}$ *de vecteurs non nuls de* E *est une base si pour tout vecteur* x *dans* E *il existe une unique famille de scalaires* $(x_j)_{j \in L}$*, où* L *est une partie finie de* K*, telle que* $x = \sum\limits_{j \in L} x_j e_j$.

Sauf indication contraire, on désigne par a *et* b *des réels tels que* $a < b$ *et par* I *l'intervalle fermé borné* $[a, b]$.

On note $\mathcal{C}(I)$ *l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur* I *à valeurs réelles et continues.*

On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles périodiques de période 2π et *continues.*

Pour éviter les répétitions dans les définitions qui suivent on désigne par $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{F}$ et par J l'intervalle I dans le cas où $\mathcal{H}$ est l'espace $\mathcal{C}(I)$ ou l'intervalle $\mathbb{R}$ dans le cas où $\mathcal{H}$ est l'espace $\mathcal{F}$.

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{H}$ on désigne par $|f|$ la fonction définie par :

$$|f|: \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array}$$

L'espace $\mathcal{H}$ est muni de la norme de la convergence uniforme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{H},\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in J} |f(x)|.$$

On munit l'espace $\mathcal{H}$ de la relation d'ordre partiel notée $\leq$ et définie par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H},\ (f \leq g) \Leftrightarrow (\forall x \in J,\ f(x) \leq g(x)).$$

On dit qu'une fonction f appartenant à $\mathcal{H}$ est positive et on note $0 \leq f$, si $0 \leq f(t)$ pour tout t dans J.

On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathcal{H}$. Un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est aussi appelé un opérateur linéaire sur $\mathcal{H}$.

On dit qu'un opérateur linéaire u sur $\mathcal{H}$ est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à $\mathcal{H}$ en une fonction positive.

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynomiales d'une variable à coefficients réels. Cet espace est muni de la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e_k(x) = x^k.$$

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ formé des polynômes trigonométriques à coefficients réels, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

où n est un entier naturel, le coefficient a_0 et les coefficients a_k, b_k pour tout entier k compris entre 1 et n sont réels. Cet espace est muni de la base $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & c_k(x) = \cos(kx), \\ \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, & s_k(x) = \sin(kx). \end{cases}$$

On remarquera que $c_0 = e_0$.

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, on désigne par $(a_k(f))_{k\geq 0}$ et $(b_k(f))_{k\geq 1}$ les coefficients de Fourier de f définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt,$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$

On note :

$$S_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}c_0 \tag{5.1}$$

et pour tout entier n strictement positif, on désigne par $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\,c_k + b_k(f)\,s_k). \tag{5.2}$$

La partie **I** *est consacrée aux opérateurs linéaires positifs. Cette partie est utilisée par les parties* **II** *et* **III**.

La partie **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions continues sur un intervalle fermé borné et à valeurs réelles :*

Théorème 5.1 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$, où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*

La partie **III** *indépendante de la partie* **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions périodiques, continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles :*

Théorème 5.2 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

– I – Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que :

$$\forall f \in \mathcal{H},\ |u(f)| \leq u(|f|).$$

I.2 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que u est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(e_0) = 0$.

I.3 Montrer que tout opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$ est continu.

I.4 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Justifier l'existence de :

$$\|u\|_\infty = \sup_{f \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

et exprimer cette quantité en fonction de u et de e_0.

I.5 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a, b]$.*
Soit n un entier strictement positif. Etant donnés $n+1$ points $(x_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ deux à deux distincts de I et $n+1$ fonctions $(u_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ de $\mathcal{C}(I)$, montrer que l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ u_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k})\, u_{n,k}$$

est positif si et seulement si toutes les fonctions $u_{n,k}$, pour k compris entre 0 et n, sont positives.

I.6 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [0, 1]$ et on se donne un entier n strictement positif.*
On note φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi_n(x, y) = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I,\ B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{5.3}$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}. \tag{5.4}$$

I.6.1 Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que :

$$\forall x \in I,\ B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

I.6.2 Montrer que pour tout entier naturel j on a :

$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

I.6.3 Exprimer $B_n(e_j)$ dans la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ pour $j = 0, 1, 2$.

I.7 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ et on désigne par K un polynôme trigonométrique. On associe à ce polynôme l'opérateur linéaire u défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K(t)\, dt.$$

I.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K(x-t)\, dt.$$

I.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, $u(f)$ est un polynôme trigonométrique.

I.7.3 Montrer que l'opérateur linéaire u est positif si et seulement si la fonction K est à valeurs positives ou nulles.

I.8 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$, on se donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'opérateur linéaire T_n défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \tag{5.5}$$

où S_0 désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par (5.1) et *pour tout entier naturel k* non nul, *S_k désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par* (5.2).

I.8.1 Montrer que, pour tout entier naturel p strictement positif, la fonction θ_p définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par :

$$x \mapsto \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$$

se prolonge en une fonction continue et périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$. On note encore θ_p ce prolongement.

I.8.2 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right). \tag{5.6}$$

I.8.3 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right)dt.$$

I.8.4 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)\right)=\sin^2\left(\frac{n}{2}x\right). \tag{5.7}$$

I.8.5 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ T_n(f)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,K_n(x-t)\,dt,$$

où K_n est un polynôme trigonométrique.

I.8.6 Montrer que l'opérateur linéaire T_n est positif.

I.8.7 Calculer $S_n(c_j)$, $T_n(c_j)$ pour tout entier naturel j et $S_n(s_j)$, $T_n(s_j)$ pour tout entier naturel j non nul.

– II – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H}=\mathcal{C}(I)$ avec $I=[a,b]$.

II.1 Soit f un élément de $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall(t,x)\in I\times I,\ |f(t)-f(x)|\leq\varepsilon+2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2. \tag{5.8}$$

II.2 *Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}(I)$, pour tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I, on désigne par $g-g(x)e_k$ la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$t\mapsto g(t)-g(x)t^k.$$

Soit f appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x\in I,\ |f-f(x)e_0|\leq\varepsilon e_0+2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(e_2-2xe_1+x^2e_0\right). \tag{5.9}$$

II.3 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que pour tout $x \in I$, on ait :

$$|u(f - f(x)e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)\right). \tag{5.10}$$

II.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

II.4.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I (on peut utiliser l'inégalité (5.10)).

II.4.3 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.5 Pour cette question on prend $[a,b] = [0,1]$ et on considère la suite d'opérateurs linéaires $(B_n)_{n\geq 1}$ définie par (5.4).
Montrer que pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(I)$, la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

II.6 *Pour cette question $I = [a,b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

II.7 Pour cette question on prend $I = [0,b]$ avec b réel strictement positif. Si f est une fonction continue sur I, on la prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(b)$ pour x supérieur ou égal à b.

II.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ et pour tout entier naturel n strictement positif on peut définir une fonction $u_n(f)$ appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en posant :

$$\forall x \in I,\ u_n(f)(x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k.$$

II.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.

II.8 *Pour cette question $I = [a,b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Soient $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ trois fonctions appartenant à $\mathcal{C}(I)$ pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_0, a_1, a_2 non tous nuls tels que la fonction $\theta = a_0\theta_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2$ admette au moins trois racines réelles deux à deux distinctes, x_0, x_1, x_2 dans I.

II.8.1 Montrer qu'on peut trouver trois réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ non tous nuls tels que :

$$\begin{cases} |\lambda_k| < 1 \ (k = 0,1,2), \\ \text{au moins deux des } \lambda_k \text{ sont positifs ou nuls,} \\ \lambda_0\theta_k(x_0) + \lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2) = 0 \ (k = 0,1,2). \end{cases}$$

En modifiant si nécessaire la numérotation des racines de la fonction θ, on peut supposer que :

$$-1 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1, \ \lambda_1 \geq 0.$$

Pour tout entier n strictement positif, on désigne par δ_n la restriction à l'intervalle I de la fonction affine par morceaux et continue définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} x \notin \left[x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right] \ \Rightarrow \ \delta_n(x) = 0, \\ \delta_n(x_0) = 1, \\ \delta_n \ \textit{affine sur} \ \left[x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0\right] \ \textit{et sur} \ \left[x_0, x_0 + \dfrac{1}{n}\right]. \end{array}$$

On associe à δ_n l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$u_n(f) = (e_0 - \delta_n) f + ((1+\lambda_0) f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)) \delta_n$$

pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$.

II.8.2 Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'opérateur linéaire u_n est positif.

II.8.3 Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et 2, la suite de fonctions $(u_n(\theta_k))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers θ_k sur $[a,b]$.

II.8.4 Montrer qu'on peut trouver une fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que la suite $(u_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

– III – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$.

III.1 Montrer que toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, on désigne par ψ_x la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right).$$

III.2 Soient f appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}\psi_x(t). \tag{5.11}$$

Pour f appartenant à $\mathcal{F}$ et x fixé dans $\mathbb{R}$, $f - f(x)c_0$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto f(t) - f(x).$$

Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que, pour tout réel x, l'on ait :

$$|f - f(x)c_0| \leq \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1). \tag{5.12}$$

III.4 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{F}$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que, pour tout réel x, l'on ait :

$$|u(f - f(x)c_0)| \leq \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(u(c_0) - \cos(x)u(c_1) - \sin(x)u(s_1)). \tag{5.13}$$

III.5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

III.5.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = u_n(c_0) - c_1 u_n(c_1) - s_1 u_n(s_1)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

III.5.2 Montrer que, pour toute fonction f dans $\mathcal{F}$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = (u_n(f - f(x)c_0))(x),$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (on peut utiliser (5.13)).

III.5.3 Montrer que, pour toute fonction f dans $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

III.6 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n\geq 1}$ définie par (5.5) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

5.2 Corrigé

– I – Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1 Avec $-|f| \leq f \leq |f|$ et le fait que u est linéaire positif sur $\mathcal{H}$, on déduit que $-u(|f|) \leq u(f) \leq u(|f|)$, c'est-à-dire $|u(f)| \leq u(|f|)$.
On peut aussi utiliser les fonctions f_+ et f_- définies par :

$$\begin{cases} f_+ = \max(f, 0) = \dfrac{1}{2}(|f| + f), \\ f_- = \max(-f, 0) = \dfrac{1}{2}(|f| - f). \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues positives sur J et on a :

$$|u(f)| = |u(f_+) - u(f_-)| \leq u(f_+) + u(f_-) = u(|f|).$$

I.2 La condition nécessaire est évidente.
Supposons que $u(e_0) = 0$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$ on a $|f| \leq \|f\|_\infty e_0$.
Avec la positivité de l'opérateur linéaire u on déduit alors que :

$$|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_\infty u(e_0) = 0$$

et $u(f) = 0$.

I.3 Pour $f \in \mathcal{H}$ on a $|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_\infty u(e_0)$. On déduit alors que $\|u(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ avec $C = \|u(e_0)\|_\infty$ et l'application linéaire u est continue.

I.4 De la question précédente on déduit que $\|u\|_\infty = \|u(e_0)\|_\infty$.

I.5 Si toutes les fonctions $u_{n,k}$ $(0 \leq k \leq n)$ sont positives alors l'opérateur linéaire u_n est positif.
Si il existe $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tel que la fonction $u_{n,k}$ prenne des valeurs strictement négatives alors en prenant $f \in \mathcal{C}(I)$ positive, nulle en $x_{n,j}$ pour $j \in \{0, 1, \cdots, n\} - \{k\}$ et valant 1 en $x_{n,k}$ (on peut prendre, par exemple $f(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \left| \dfrac{x - x_{n,j}}{x_{n,k} - x_{n,j}} \right|$) on a $u_n(f) = u_{n,k}$ non positive.
En conclusion u_n est positif si et seulement si toutes les fonctions $u_{n,k}$ sont positives.

I.6

I.6.1 On a, pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \in I$:

$$\begin{aligned} B_n(f_y)(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x e^{\frac{y}{n}} \right)^k (1-x)^{n-k} \\ &= \left(x e^{\frac{y}{n}} + 1 - x \right)^n = \varphi_n(x, y). \end{aligned}$$

I.6.2 Pour tout entier naturel j on a :

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^j e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x)$$

et pour $y = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^j B_{n,k}(x) = B_n(e_j)(x).$$

I.6.3 De la question précédente on déduit facilement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_n(e_0) = e_0, \\ B_n(e_1) = e_1, \\ B_n(e_2) = e_2 + \dfrac{1}{n}(e_1 - e_2). \end{array} \right.$$

I.7

I.7.1 Le changement de variable $u = x - t$ donne :

$$u(f)(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u) K(x - u)\, du.$$

Puis avec le changement de variable $v = u + 2\pi$ et la 2π-périodicité de la fonction $u \mapsto f(u) K(x - u)$ on déduit que :

$$\int_{x-\pi}^{-\pi} f(u) K(x - u)\, du = -\int_{\pi}^{x+\pi} f(v) K(x - v)\, dv$$

et :

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) K(x-u)\, du.$$

I.7.2 Il suffit de considérer le cas où K est l'une des fonctions de base c_k ($k \in \mathbb{N}$) ou s_k ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Pour $K = c_0$ on a $u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \pi a_0(f)$ pour tout réel x, c'est-à-dire que $u(f)$ est une fonction constante.

Pour tout entier k strictement positif et toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) c_k(x-t)\, dt + i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) s_k(x-t)\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.\end{aligned}$$

On déduit donc que :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) c_k(x-t)\, dt &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) c_k(t)\, dt\right) c_k(x) \\ &+ \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) s_k(t)\, dt\right) s_k(x)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) s_k(x-t)\, dt &= -\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) s_k(t)\, dt\right) c_k(x) \\ &+ \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) c_k(t)\, dt\right) s_k(x).\end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) c_k(x-t)\, dt = \pi \left(a_k(f) c_k(x) + b_k(f) s_k(x)\right), \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) s_k(x-t)\, dt = \pi \left(-b_k(f) c_k(x) + a_k(f) s_k(x)\right). \end{cases}$$

I.7.3 Il est clair que l'opérateur linéaire u est positif si la fonction K est positive.

Si la fonction K n'est pas positive, du fait de la 2π-périodicité et de la continuité de K il existe alors un réel $x_0 \in]-\pi, \pi[$ et un réel $\eta \in]0, \pi[$ tels que $K(x) < 0$ pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. En prenant une fonction

f dans $\mathcal{F}$ positive sur $[-\eta, \eta]$ valant 1 en 0 et nulle sur $[-\pi, \pi] - [-\eta, \eta]$, on a alors :

$$u(f)(x_0) = \int_{-\eta}^{\eta} f(t) K(x_0 - t)\, dt < 0$$

(pour $t \in [-\eta, \eta]$ on a $x_0 - t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et $K(x_0 - t) < 0$) et l'opérateur u n'est pas positif.

I.8

I.8.1 L'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ est stable par la translation $x \mapsto x + 2\pi$ et la fonction θ_p est continue et périodique sur $\mathcal{D}$ comme quotient de deux fonctions continues et périodiques, le dénominateur ne s'annulant jamais sur $\mathcal{D}$. Pour k entier relatif et $x = k\pi + t$ avec t voisin de 0 on a :

$$\theta_p(x) = (-1)^{(p-1)k} \frac{\sin(pt)}{\sin(t)} \underset{t \to 0}{\backsim} (-1)^{(p-1)k} p.$$

On peut donc prolonger la fonction θ_p par continuité en tout point $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ en posant $\theta_p(k\pi) = (-1)^{(p-1)k} p$. La fonction obtenue est bien continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
On peut aussi remarquer que pour tout entier naturel non nul p et tout réel x dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$, on a :

$$\begin{aligned}\theta_{p+1}(x) &= \frac{\sin(px)\cos(x) + \cos(px)\sin(x)}{\sin(x)} \\ &= \cos(x)\,\theta_p(x) + \cos(px)\end{aligned}$$

et avec $\theta_1(x) = 1$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$, on déduit facilement par récurrence sur $p \geq 1$ que θ_p se prolonge en une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

I.8.2 Pour tout entier naturel k et pour tout réel u on a :

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(ku) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)u\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)u\right)\right),$$

on en déduit alors que pour tout réel u on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(ku) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{2k+1}{2}u\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2}u\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

I.8.3 On a :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx)\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(x-t))\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right)dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité (5.6) sous la forme :

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2}\theta_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right),$$

on déduit que :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right)dt.$$

Cette formule étant également valable pour $n=0$.

I.8.4 Pour tout entier naturel k et pour tout réel u on a :

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left((2k+1)\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(ku)-\cos((k+1)u)\right),$$

on en déduit alors que pour tout réel u on a :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2k+1)\frac{u}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(ku)-\cos((k+1)u)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\cos(nu)\right) = \sin^2\left(\frac{n}{2}u\right).
\end{aligned}$$

I.8.5 On a. :

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,dt$$

avec :

$$K_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

En **I.8.2** on a vu que chaque fonction $\theta_{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right)$ est un polynôme trigonométrique avec :

$$\theta_{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jx\right),$$

ce qui implique que K_n est également un polynôme trigonométrique.

I.8.6 En utilisant l'identité (5.7) sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{2k+1}\left(x\right)=\theta_n^2\left(x\right),$$

on obtient :

$$K_n\left(x\right)=\frac{1}{2n\pi}\theta_n^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

c'est-à-dire que la fonction K_n est à valeurs positives, et en conséquence l'opérateur linéaire T_n est positif.

I.8.7 Le calcul des $S_n\left(c_j\right), T_n\left(c_j\right), S_n\left(s_j\right)$ et $T_n\left(s_j\right)$ passe par le calcul des coefficients de Fourier des fonctions c_j et s_j.
Pour $k\in\mathbb{N}$ et $j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a :

$$\begin{aligned}a_k\left(s_j\right)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(jt\right)\cos\left(kt\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\left(\left(j+k\right)t\right)+\sin\left(\left(j-k\right)t\right)\right)dt=0.\end{aligned}$$

De même pour $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $j\in\mathbb{N}$ on a :

$$b_k\left(c_j\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(jt\right)\sin\left(kt\right)dt=0.$$

Pour j,k dans $\mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}a_k\left(c_j\right)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(jt\right)\cos\left(kt\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(\left(j-k\right)t\right)+\cos\left(\left(j-k\right)t\right)\right)dt\\&=\left\{\begin{array}{l}0\text{ si }j\neq k,\\1\text{ si }j=k\neq 0,\\2\text{ si }j=k=0.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Pour j, k dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a :

$$\begin{aligned} b_k(s_j) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt)\sin(kt)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((j-k)t) - \cos((j-k)t))\,dt \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k, \\ 1 \text{ si } j = k. \end{cases} \end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$S_n(c_j) = \begin{cases} c_j \text{ si } 0 \leq j \leq n, \\ 0 \text{ si } j > n \geq 0, \end{cases} \quad S_n(s_j) = \begin{cases} s_j \text{ si } 1 \leq j \leq n, \\ 0 \text{ si } j > n \geq 0. \end{cases}$$

On peut aussi remarquer, plus simplement que la famille :

$$\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

est orthogonale dans $\mathcal{F}$ pour le produit scalaire défini par :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt.$$

Il en résulte que :

$$T_n(c_j) = \begin{cases} \dfrac{n-j}{n} c_j \text{ si } 0 \leq j < n, \\ 0 \text{ si } j \geq n \geq 1, \end{cases}$$

$$T_n(s_j) = \begin{cases} \dfrac{n-j}{n} s_j \text{ si } 1 \leq j < n, \\ 0 \text{ si } j \geq n \geq 1. \end{cases}$$

– II – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

II.1 Toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ est uniformément continue sur le compact $[a, b]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$(t, x) \in I^2, \ |t - x| \leq \eta \implies |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $(t, x) \in [a, b]^2$ on a deux possibilités : soit $|t - x| \leq \eta$ et dans ce cas on a $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ et l'inégalité (5.8) est vérifiée, soit $|t - x| > \eta$ ou encore $1 < \dfrac{(t-x)^2}{\eta^2}$ ce qui entraîne :

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \frac{(t-x)^2}{\eta^2}$$

et l'inégalité (5.8) est encore vérifiée.

II.2 En écrivant que :

$$|f(t) - f(x)| = |f - f(x) e_0|(t)$$

et :

$$(t-x)^2 = e_2(t) - 2xe_1(t) + x^2 e_0(t),$$

l'inégalité (5.8) se traduit par :

$$\forall x \in I,\ |f - f(x) e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0\right).$$

II.3 En utilisant la linéarité et la positivité de u on déduit immédiatement que l'inégalité (5.9) entraîne l'inégalité (5.10). On peut remarquer que, pour $\varepsilon > 0$ donné, le réel $\eta > 0$ trouvé ne dépend pas de l'opérateur u.

II.4

II.4.1 En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left(e_2 - 2e_1^2 + e_2 e_0\right)(x) = x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$$

on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n = (u_n(e_2) - e_2) - 2e_1(u_n(e_1) - e_1) + e_2(u_n(e_0) - e_0)$$

et avec :

$$\|g_n\| \leq \|u_n(e_2) - e_2\| + 2\|e_1\|\,\|u_n(e_1) - e_1\| + \|e_2\|\,\|u_n(e_0) - e_0\|$$

(en notant $\|\cdot\|$ pour $\|\cdot\|_\infty$), on déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I.
On peut aussi dire que la convergence uniforme sur I de chacune des suites $(u_n(e_j))_{n\in\mathbb{N}}$ vers e_j $(j = 0,1,2)$ et le fait que ces fonctions e_j sont bornées sur I, impliquent la convergence uniforme sur I de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $e_2 - 2e_1^2 + e_2 e_0 = 0$.

II.4.2 L'inégalité (5.10) pour l'opérateur linéaire u_n appliquée à $t = x$ donne :

$$|h_n(x)| \leq \varepsilon u_n(e_0)(x) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} g_n(x),$$

cette inégalité étant valable pour tout $x \in I$ on déduit que :

$$\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty + \varepsilon\|e_0\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\|g_n\|_\infty,$$

ce qui entraîne la convergence uniforme vers la fonction nulle de la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, pour f non identiquement nulle, on peut trouver un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty \leq 1,\ \|g_n\|_\infty \leq \frac{\eta^2}{2\|f\|_\infty}$$

(le réel η ne dépend que de f, de I et de ε, mais pas de n), ce qui entraîne $\|h_n\|_\infty \leq 3\varepsilon$. Le résultat étant évident pour $f = 0$.

II.4.3 Pour x fixé dans I et $t \in I$ on a :

$$u_n(f)(t) - f(t) = (u_n(f - f(x)e_0))(t) + f(x)u_n(e_0)(t) - f(t)e_0(t).$$

Et en faisant $t = x$:

$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)(u_n(e_0)(x) - e_0(x)),$$

cette égalité étant valable pour tout $x \in I$. On en déduit alors que :

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty,$$

ce qui entraîne d'après ce qui précède la convergence uniforme vers la fonction f de la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

II.5 De de la positivité des fonctions $B_{n,k}$ sur $I = [0,1]$ en déduit que les opérateurs B_n sont positifs sur $\mathcal{C}(I)$. En **I.6.3** on a vu que :

$$B_n(e_0) = e_0,\ B_n(e_1) = e_1,\ B_n(e_2) = e_2 + \frac{1}{n}(e_1 - e_2).$$

Il en résulte que pour $j = 0,1,2$ la suite $(B_n(e_j))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers e_j sur I. On déduit alors de **II.4** que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.

II.6 Pour $f \in \mathcal{C}(I)$ la fonction $g \in \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in [0,1],\ g(t) = f(a + t(b-a))$$

est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes. La densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ s'en déduit immédiatement. La fonction f est la limite uniforme de la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de fonctions polynomiales définies par :

$$\forall x \in I,\ P_n(x) = B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

II.7

II.7.1 Pour $f \in \mathcal{C}(I)$, $x \in I = [0, b]$ et $n \geq 1$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k \right| \leq \|f\|_\infty \frac{(nb)^k}{k!},$$

avec $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nb)^k}{k!} = e^{nb}$. La série de terme général $f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k$ est donc uniformément convergente et la fonction $u_n(f)$ est bien définie et continue sur I, c'est-à-dire que $u_n(f) \in \mathcal{C}(I)$.

II.7.2 Il est facile de vérifier que les applications u_n sont linéaires et positives. Pour tout $x \in I$, on a :

$$u_n(e_0)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = 1,$$

c'est-à-dire que $u_n(e_0) = e_0$.
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, tout $n \geq 1$ et tout $x \in I = [0, b]$, on a :

$$u_n(f)(x) = e^{-nx} \left(\sum_{0 \leq k \leq nb} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k + \sum_{k > nb} f(b) \frac{n^k}{k!} x^k \right).$$

Pour $f = e_1$, on peut écrire :

$$u_n(e_1) = v_n(e_1) + r_n(e_1)$$

avec pour tout $x \in I = [0, b]$:

$$\begin{cases} v_n(e_1)(x) = e^{-nx} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^k = x \\ r_n(e_1)(x) = e^{-nx} \sum_{k > nb} \left(b - \frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k \end{cases}$$

et :

$$|r_n(e_1)(x)| \leq e^{-nx} \sum_{k \geq [nb]+1} \left(\frac{k}{n} - b\right) \frac{n^k}{k!} x^k = e^{-nx} R_n(x).$$

On peut écrire que, pour $x \in [0, b]$, on a :

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \sum_{k \geq [nb]+1} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^k - b \sum_{k \geq [nb]+1} \frac{n^k}{k!} x^k \\
&= x \sum_{k \geq [nb]} \frac{n^k}{k!} x^k - b \sum_{k \geq [nb]+1} \frac{n^k}{k!} x^k \\
&= \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} x^{[nb]+1} + (x-b) \sum_{k \geq [nb]+1} \frac{n^k}{k!} x^k \\
&\leq \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} x^{[nb]+1}
\end{aligned}$$

et donc :

$$|r_n(e_1)(x)| \leq e^{-nx} x^{[nb]+1} \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} = \varphi_n(x) \frac{n^{[nb]}}{[nb]!}.$$

Avec :

$$\varphi_n'(x) = e^{-nx} x^{[nb]} ([nb] + 1 - nx) \geq 0$$

pour tout $x \in \left[0, \frac{[nb]+1}{n}\right] \supset [0, b]$. La fonction φ_n est donc croissante sur $\left[0, \frac{[nb]+1}{n}\right]$ et :

$$\begin{aligned}
|r_n(e_1)(x)| &\leq e^{-([nb]+1)} \left(\frac{[nb]+1}{n}\right)^{[nb]+1} \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} = b \frac{e^{-([nb]+1)}}{nb} \frac{([nb]+1)^{[nb]+1}}{[nb]!} \\
&\leq b \frac{e^{-([nb]+1)}}{[nb]} \frac{([nb]+1)^{[nb]+1}}{[nb]!} = \frac{b}{e} \varepsilon_{[nb]}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p &= \frac{e^{-p}}{p} \frac{(p+1)^{p+1}}{p!} \backsim \frac{e^{-p}}{p} \frac{(p+1)^{p+1}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{p} p^p e^{-p}} \\
&= \frac{p+1}{p} \left(\frac{p+1}{p}\right)^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{p}} \backsim \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{p}}
\end{aligned}$$

(formule de Stirling).
Il en résulte que la suite $(u_n(e_1))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers e_1 sur I.
On montre de manière analogue que $(u_n(e_2))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers e_2 sur I.

Pour les sceptiques, on refait les calculs. Pour $f = e_2$, on a $u_n(e_2) = v_n(e_2) + r_n(e_2)$ avec pour tout $x \in I = [0, b]$:

$$\begin{aligned} v_n(e_2)(x) &= e^{-nx} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{n} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^k \\ &= e^{-nx} x^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{n} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-2} + e^{-nx} x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \\ &= x^2 + \frac{1}{n} x \end{aligned}$$

et :

$$|r_n(e_2)(x)| \leq e^{-nx} \sum_{k \geq [nb]+1} \left(\frac{k^2}{n^2} - b^2 \right) \frac{n^k}{k!} x^k = e^{-nx} S_n(x).$$

On a :

$$S_n(x) = \sum_{k \geq [nb]+1} \frac{k}{n} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^k - b^2 \sum_{k \geq [nb]+1} \frac{n^k}{k!} x^k = T_1 - T_2$$

avec :

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{k \geq [nb]} \frac{k+1}{n} \frac{n^k}{k!} x^{k+1} = \sum_{k \geq [nb]-1} \frac{n^k}{k!} x^{k+2} + \frac{1}{n} \sum_{k \geq [nb]} \frac{n^k}{k!} x^{k+1} \\ &\leq \sum_{k \geq [nb]-1} \frac{n^k}{k!} x^{k+2} + \frac{x}{n} \sum_{k \geq 0} \frac{n^k}{k!} x^k \leq x^2 \sum_{k \geq [nb]-1} \frac{n^k}{k!} x^k + \frac{b}{n} e^{nx} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} |r_n(e_2)(x)| &\leq \frac{b}{n} + e^{-nx} \left(x^2 \sum_{k \geq [nb]-1} \frac{n^k}{k!} x^k - b^2 \sum_{k \geq [nb]+1} \frac{n^k}{k!} x^k \right) \\ &\leq \frac{b}{n} + e^{-nx} \left(\frac{n^{[nb]-1}}{([nb]-1)!} x^{[nb]+1} + \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} x^{[nb]+2} \right) \\ &\leq \frac{b}{n} + e^{-nx} \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} x^{[nb]+1} \left(\frac{[nb]}{n} + x \right) \\ &\leq \frac{b}{n} + e^{-nx} \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} x^{[nb]+1} (2b) \\ &\leq \frac{b}{n} + 2b \varphi_n(x) \frac{n^{[nb]}}{[nb]!} \end{aligned}$$

(n grand donne $[nb] \geq 1$) et on conclut avec ce qui précède. On déduit alors de **II.4** que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, la suite $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I. On peut aussi donner une solution « probabiliste » de cette question. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,b]$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et bornée. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre nx. On a :

$$\mathbb{E}(X) = nx,\ \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = x,\ \mathbb{V}(X) = nx,\ \mathbb{V}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{x}{n}$$

et :

$$u_n(f)(x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{n}\right)\right).$$

Avec l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}^+$, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^+,\ |x_1 - x_2| \leq \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

On a alors pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,b]$, en notant χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A et en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev :

$$\begin{aligned}
|u_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \chi_{\left|\frac{X}{n}-x\right|\leq\eta}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \chi_{\left|\frac{X}{n}-x\right|>\eta}\right) \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - x\right| > \eta\right) \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{\mathbb{V}\left(\frac{X}{n}\right)}{\eta^2} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty x}{n\eta^2} \leq \varepsilon + \frac{2b\|f\|_\infty}{\eta^2}\frac{1}{n} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

pour n assez grand (uniformément par rapport à x). Et c'est terminé.

II.8

II.8.1 Les égalités $\theta(x_k) = 0$ pour $k = 0, 1, 2$ se traduisent en disant que le système linéaire :

$$\sum_{i=0}^{2} a_i\theta_i(x_k) = 0\ \ (k = 0, 1, 2)$$

admet une solution non triviale (a_0, a_1, a_2) et donc le déterminant de Gram généralisé :

$$\Delta(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \theta_0(x_0) & \theta_1(x_0) & \theta_2(x_0) \\ \theta_0(x_1) & \theta_1(x_1) & \theta_2(x_1) \\ \theta_0(x_2) & \theta_1(x_2) & \theta_2(x_2) \end{vmatrix}$$

est nul et il en est de même du déterminant de la matrice transposée de sorte que le système transposé :

$$\sum_{i=0}^{2} \theta_k(x_i)\lambda_i = 0 \ \ (k = 0, 1, 2)$$

admet au moins une solution non triviale $\lambda \in \mathbb{R}^3$. Tout vecteur proportionnel à λ étant encore solution on peut trouver une solution de ce système $\lambda \in \mathbb{R}^3$ telle que $\max\limits_{0 \leq i \leq 2} |\lambda_i| < 1$ et quitte à remplacer λ par $-\lambda$ on peut supposer qu'au moins 2 des λ_i sont positifs ou nuls.

II.8.2 On a $0 \leq \delta_n \leq 1$, $0 \leq e_0 - \delta_n \leq 1$, $1 + \lambda_0 > 0$, $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$. Il en résulte que l'opérateur linéaire u_n est positif.

II.8.3 Pour $f \in \mathcal{C}(I)$ et $x \in I$, on a, en notant $I_n = \left[x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right] \cap I$:

$$u_n(f)(x) - f(x) = 0$$

si $x \notin I_n$, et :

$$u_n(f)(x) - f(x) = ((1 + \lambda_0) f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f(x))\,\delta_n(x)$$

si $x \in I_n$.
Pour $f = \theta_k$ $(k = 0, 1, 2)$ on a :

$$\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = 0$$

et :

$$u_n(\theta_k)(x) - \theta_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin I_n, \\ (\theta_k(x_0) - \theta_k(x))\,\delta_n(x) & \text{si } x \in I_n. \end{cases}$$

De la continuité des fonctions θ_k en x_0 on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$x \in I,\ |x - x_0| \leq \eta \implies |\theta_k(x) - \theta_k(x_0)| \leq \varepsilon.$$

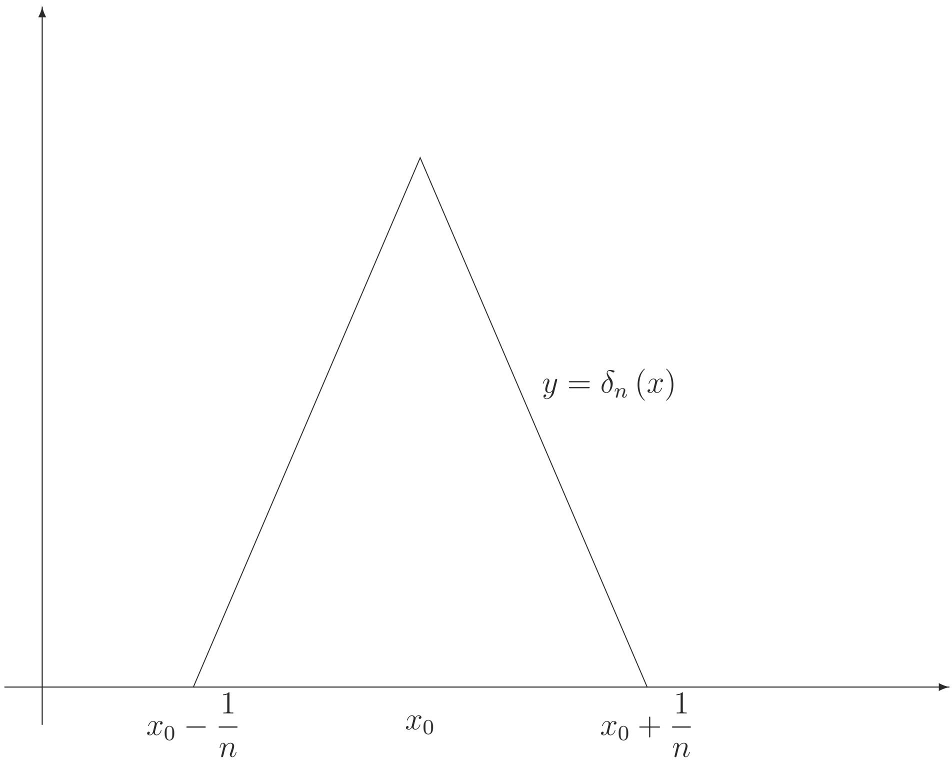


FIG. 5.1 – *Graphe de* δ_n

Pour $n > \dfrac{1}{\eta}$ on a alors :

$$\forall x \in I_n,\ |\theta_k(x) - \theta_k(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit donc que :

$$\forall n > \frac{1}{\eta},\ \|u_n(\theta_k) - \theta_k\|_\infty \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, la suite $(u_n(\theta_k))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers θ_k sur I.

II.8.4 Si $\lambda_0 \neq 0$, en prenant $f \in \mathcal{C}(I)$ nulle en x_1 et x_2 et non nulle en x_0 on a $u_n(f)(x_0) - f(x_0) = \lambda_0 f(x_0) \neq 0$. Si $\lambda_0 = 0$ alors $\lambda_2 > 0$ et en prenant $f \in \mathcal{C}(I)$ nulle en x_0 et x_1 et non nulle en x_2 on obtient :
$u_n(f)(x_0) - f(x_0) = \lambda_2 f(x_2) \neq 0$.
Dans tous les cas on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ telle que la suite $(u_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

– III – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$

III.1 Toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ est uniformément continue sur le compact $J = [-\pi - 1, \pi + 1]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta \in]0,1[$ tel que :

$$(t,x) \in J^2,\ |t-x| \leq \eta \implies |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $|t-x| \leq \eta$ on a nécessairement $t \in [-\pi - 1, \pi + 1]$ ($\eta \in]0,1[$) et $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.
Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|t-x| \leq \eta$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2n\pi \in [-\pi, \pi]$ ($n = E\left(\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right)$) on a $|(t-2n\pi) - (x-2n\pi)| \leq \eta$ et :

$$|f(t) - f(x)| = |f(t-2n\pi) - f(x-2n\pi)| \leq \varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

III.2 Toute fonction $f \in \mathcal{F}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta \in]0, \pi[$ tel que :

$$(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ |t-x| \leq \eta \implies |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x - \eta \leq t - 2n\pi \leq x - \eta + 2\pi$$

($n = E\left(\dfrac{t-x+\eta}{2\pi}\right)$). En posant $t' = t - 2n\pi$ on a :

$$-\eta \leq t' - x \leq 2\pi - \eta,\ f(t) - f(x) = f\left(t'\right) - f(x).$$

On a deux cas de figure possibles. Soit $|t'-x| \leq \eta$ et l'inégalité (5.11) est vérifiée. Soit $|t'-x| > \eta$ et en tenant compte de $-\eta \leq t' - x \leq 2\pi - \eta$ on déduit que :

$$\eta < t' - x \leq 2\pi - \eta,$$

ou encore :

$$0 < \frac{\eta}{2} < \frac{t'-x}{2} \leq \pi - \frac{\eta}{2} < \pi.$$

On a alors $\sin^2\left(\dfrac{t'-x}{2}\right) \geq \sin^2\left(\dfrac{\eta}{2}\right)$ et :

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\,\|f\|_\infty \leq 2\,\|f\|_\infty \frac{\sin^2\left(\dfrac{t'-x}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\eta}{2}\right)},$$

avec $\sin^2\left(\frac{t'-x}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)$ (la fonction $\sin^2$ est π-périodique). Là encore l'inégalité (5.11) est vérifiée.

III.3 Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé on a, pour tout réel t :

$$\begin{aligned}\psi_x(t) = \sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1-\cos(x-t)) \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos(x)\cos(t)-\sin(x)\sin(t)),\end{aligned}$$

soit :

$$\psi_x = \frac{1}{2}(c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1).$$

On en déduit alors que l'inégalité (5.11) est équivalente à l'inégalité (5.12).

III.4 En utilisant la linéarité et la positivité de u on déduit immédiatement que l'inégalité (5.12) entraîne l'inégalité (5.13). On peut remarquer que η ne dépend pas de u.

III.5

III.5.1 En remarquant que :

$$c_0 - c_1^2 - s_1^2 = 0,$$

on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n = (u_n(c_0) - c_0) - c_1(u_n(c_1) - c_1) - s_1(u_n(s_1) - s_1)$$

et avec :

$$\|g_n\|_\infty \leq \|u_n(c_0) - c_0\|_\infty + \|c_1\|_\infty \|u_n(c_1) - c_1\|_\infty + \|s_1\|_\infty \|u_n(s_1) - s_1\|_\infty,$$

on déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
On peut aussi dire que la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de chacune des suites $(u_n(c_j))_{n\in\mathbb{N}}$ vers c_j ($j = 0, 1$), $(u_n(s_1))_{n\in\mathbb{N}}$ vers s_1 et le fait que ces fonctions sont bornées sur $\mathbb{R}$, impliquent la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $c_0 - c_1^2 - s_1^2 = 0$.

III.5.2 L'inégalité (5.13) pour l'opérateur linéaire u_n appliquée à $t = x$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |h_n(x)| \leq \varepsilon u_n(c_0)(x) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)} g_n(x).$$

Il en résulte :

$$\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon \|u_n(c_0) - c_0\|_\infty + \varepsilon \|c_0\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)} \|g_n\|_\infty .$$

Et la convergence uniforme vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'en déduit immédiatement.

III.5.3 Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$u_n(f)(t) - f(t) = (u_n(f - f(x)c_0))(t) + f(x)u_n(c_0)(t) - f(t)c_0(t).$$

Et en faisant $t = x$:

$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)(u_n(c_0)(x) - c_0(x)).$$

On en déduit alors que :

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(c_0) - c_0\|_\infty ,$$

ce qui entraîne d'après ce qui précède la convergence uniforme vers la fonction f sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

III.6 En **I.8.6** on a vu que, pour tout entier n strictement positif, T_n est un opérateur linéaire positif. Et avec les résultats de **I.8.7** on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \begin{cases} T_n(c_0) = c_0, \\ T_n(c_1) = \dfrac{n-1}{n} c_1, \\ T_n(s_1) = \dfrac{n-1}{n} s_1. \end{cases}$$

Il en résulte que les suites $(T_n(c_0))_{n\geq 1}$, $(T_n(c_1))_{n\geq 1}$ et $(T_n(s_1))_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ respectivement vers c_0, c_1 et s_1. On déduit alors de **III.5** que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

5.3 Compléments

Ces remarques sont extraites de [29].

5.3.1 Théorèmes de Schäfer et de Korovkin

On désigne pour ce paragraphe par $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé borné non réduit à un point et par ψ une fonction définie sur I^2, continue et à valeurs réelles positives ou nulles.

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ on note :

$$\Delta_f = \left\{(t,x) \in I^2 \mid f(t) = f(x)\right\}.$$

L'ensemble Δ_f est un fermé de I^2 comme image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $(t,x) \mapsto f(t) - f(x)$.

Les résultats des questions **II.1.** et **III.2.** du problème sont des cas particuliers du lemme suivant.

Lemme 5.1 *Si f est une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que :*

$$\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f,$$

alors pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel m strictement positif (dépendant de f et de ε) tel que :

$$\forall (t,x) \in I^2,\ |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{m}\psi(t,x). \tag{5.14}$$

Proof. L'ensemble :

$$\mathcal{A}_{f,\varepsilon} = \left\{(t,x) \in I^2 \mid |f(t) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet c'est l'image réciproque du fermé $[\varepsilon, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $(t,x) \mapsto |f(t) - f(x)|$ sur I^2. L'ensemble I^2 étant compact dans $\mathbb{R}^2$ il en est de même de $\mathcal{A}_{f,\varepsilon}$.

Si $\mathcal{A}_{f,\varepsilon}$ est vide, on a alors $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ et tout réel m strictement positif convient.

Si $\mathcal{A}_{f,\varepsilon}$ est non vide, la fonction continue ψ est alors minorée sur $\mathcal{A}_{f,\varepsilon}$ avec $\psi(t,x) > 0$ pour tout (t,x) dans $\mathcal{A}_{f,\varepsilon}$ ($\psi(t,x) = 0$ entraîne $f(t) = f(x)$ et (t,x) n'est pas dans $\mathcal{A}_{f,\varepsilon}$), il existe donc un réel $m > 0$ tel que $\psi(t,x) \geq m$ pour tout (t,x) dans $\mathcal{A}_{f,\varepsilon}$. On a donc :

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in \mathcal{A}_{f,\varepsilon},\ |f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \dfrac{\psi(t,x)}{m}, \\ \forall (t,x) \in I^2 - \mathcal{A}_{f,\varepsilon},\ |f(t) - f(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

et on en déduit que :

$$\forall (t,x) \in I^2,\ |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{m}\psi(t,x).$$

■

En prenant pour fonction ψ la fonction définie par $\psi(t,x) = |t - x|$, on retrouve le résultat de la question **II.1.** et en utilisant la fonction ψ définie par $\psi(t,x) = \left|\sin\left(\dfrac{t-x}{2}\right)\right|$,on retrouve celui de **III.2.**

Pour x fixé dans I, on note ψ_x la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I,\ \psi_x(t) = \psi(t, x)$$

et pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, $f(x)\, e_0$ est la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I,\ (f(x)\, e_0)(t) = f(x).$$

Avec ces notations le lemme précédent devient.

Lemme 5.2 *Si f est une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que :*

$$\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f,$$

alors pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel m strictement positif tel que :

$$\forall x \in I,\ |f - f(x)\, e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{m}\psi_x. \tag{5.15}$$

Avec les propriétés des opérateurs linéaires positifs on obtient le résultat suivant.

Lemme 5.3 *Soit u un opérateur (ou une fonctionnelle) linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$. Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que :*

$$\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f$$

et pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel m strictement positif tel que :

$$\forall x \in I,\ |u(f - f(x)\, e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{m}u(\psi_x). \tag{5.16}$$

Le théorème qui suit est une généralisation des théorèmes de Korovkin démontrés dans le problème.

Théorème 5.3 (Schäfer) *Soit $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_p\}$ une famille de fonctions dans $\mathcal{C}(I)$ telle que :*
(i) $e_0 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{T})$;
(ii) il existe des fonctions $\lambda_0, \cdots, \lambda_p$ dans $\mathcal{C}(I)$ telles que la fonction ψ définie sur I^2 par :

$$\forall (t, x) \in I^2,\ \psi(t, x) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k(x)\, \theta_k(t)$$

soit à valeurs positives ou nulles et nulle pour $t = x$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{T}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que :

$$\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f,$$

la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

Proof. On désigne par $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur I par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ g_n(x) = u_n(\psi_x)(x).$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k (u_n(\theta_k) - \theta_k)$$

et on en déduit que cette suite converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

En effet, on a :

$$\begin{cases} u_n(\psi_x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k(x)\, u_n(\theta_k), \\ \psi_x(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k(x)\, \theta_k(x) = 0 \end{cases}$$

et :

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k(x) (u_n(\theta_k)(x) - \theta_k(x)),$$

c'est-à-dire :

$$g_n = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k (u_n(\theta_k) - \theta_k).$$

Et avec :

$$\|g_n\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{p} \|\lambda_k\|_\infty \|u_n(\theta_k) - \theta_k\|_\infty$$

on déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

On se donne une fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que $\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f$ et on note $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x).$$

Cette suite converge alors uniformément vers la fonction nulle sur I.

En effet l'inégalité (5.16) pour u_n appliquée à $t = x$ donne :

$$|h_n(x)| \leq \varepsilon \|u_n(e_0)\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{m} \|g_n\|_\infty ,$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty + \varepsilon \|e_0\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{m} \|g_n\|_\infty ,$$

avec $\|e_0\|_\infty = 1$. La convergence uniforme de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle s'en déduit alors immédiatement.

Enfin en écrivant, pour x fixé dans I et $t \in I$:

$$u_n(f)(t) - f(t) = (u_n(f - f(x)e_0))(t) + f(x)u_n(e_0)(t) - f(t)e_0(t)$$

et en faisant $t = x$, on obtient :

$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)(u_n(e_0)(x) - e_0(x)) ,$$

cette égalité étant valable pour tout $x \in I$. On en déduit alors que :

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty ,$$

ce qui entraîne d'après ce qui précède la convergence uniforme vers la fonction f de la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Avec les notations du théorème précédent, si ψ est telle que $\psi(t,x) = 0$ si et seulement si $t = x$, alors la condition $\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f$ est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ et le théorème précédent nous dit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(I)$ alors la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ si et seulement cette convergence uniforme est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{T}$.

En prenant pour fonction ψ la fonction définie par $\psi(t,x) = (t-x)^2$, ce qui revient à prendre :

$$\{\theta_0, \theta_1, \theta_2\} = \{e_0, e_1, e_2\}, \ \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\} = \{e_2, -2e_1, e_0\},$$

la condition $\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f$ est vérifiée pour toute fonction f continue sur I et on obtient le théorème de Korovkin de la partie **II.**

En raisonnant dans $\mathcal{C}([0,2\pi])$ et en utilisant le 2π-périodicité on obtient le résultat suivant sur l'espace $\mathcal{F}$.

Théorème 5.4 *Soit $\mathcal{T} = \{\theta_0, \cdots, \theta_p\}$ une famille de fonctions dans $\mathcal{F}$ telle que :*
(i) $e_0 \in \operatorname{Vect}(\mathcal{T})$;
(ii) il existe des fonctions $\lambda_0, \cdots, \lambda_p$ dans $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ telles que la fonction définie sur $[0, 2\pi]^2$ par :

$$\forall (t, x) \in [0, 2\pi]^2, \ \psi(t, x) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k(x) \theta_k(t)$$

soit à valeurs positives ou nulles et nulle pour $t = x$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{T}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ telle que :

$$\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f,$$

la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Avec les notations du théorème précédent, si les fonctions λ_k sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques et si la fonction ψ est telle que $\psi(t, x) = 0$ si et seulement si $t - x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors la condition $\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f$ est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et le théorème précédent nous dit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{F}$ alors la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ si et seulement cette convergence uniforme est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{T}$.

En prenant pour fonction ψ la fonction définie par :

$$\psi(t, x) = \sin^2\left(\frac{t - x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t)),$$

ce qui revient à prendre :

$$\{\theta_0, \theta_1, \theta_2\} = \{c_0, c_1, s_1\}, \ \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\} = \left\{\frac{c_0}{2}, -\frac{c_1}{2}, -\frac{s_1}{2}\right\},$$

la condition $\psi^{-1}\{0\} \subset \Delta_f$ est vérifiée pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et on obtient le théorème de Korovkin de la partie **III.**

On peut aussi utiliser ce théorème de Korovkin pour retrouver un résultat de densité de $\mathcal{C}_{2\pi}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (voir l'article de D. Hoareau dans la R. M. S. numéro 2, année 2002-2003). Pour ce faire on considère les opérateurs définis sur $\mathcal{F}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall f \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ u_n(f)(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\, dt.$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, la fonction $u_n(f)$ est dans $\mathcal{F}$ et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus il est clair que les opérateurs u_n sont linéaires et positifs.

Avec :

$$\begin{cases} u_n(c_0)(x) = 1 = c_0(x) \\ u_n(c_1)(x) = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \cos(x) - 2n \sin^2\left(\dfrac{1}{2n}\right) \sin(x) \\ u_n(c_2)(x) = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sin(x) + 2n \sin^2\left(\dfrac{1}{2n}\right) \cos(x) \end{cases}$$

et le théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$, on déduit que la suite $(u_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

5.3.2 Majoration de l'erreur d'approximation de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

On désigne pour ce paragraphe par $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé borné avec $a < b$ et pour tout réel δ positif ou nul, on note :

$$K_\delta = \left\{ (t, x) \in I^2 \mid |x - t| \leq \delta \right\}.$$

L'ensemble K_δ est compact dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.1 *Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$. On appelle module de continuité de la fonction f sur l'intervalle I la fonction ω_f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \ \omega_f(\delta) = \sup_{(t,x) \in K_\delta} |f(x) - f(t)|.$$

Les propriétés du module de continuité sont résumées dans le théorème qui suit.

Théorème 5.5 *Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$.*

1. *On a $\omega_f(0) = 0$.*
2. *Pour tout réel δ positif ou nul il existe $(t, x) \in I^2$ tel que :*

$$\omega_f(\delta) = |f(x) - f(t)|.$$

3. *La fonction ω_f est croissante et bornée sur $\mathbb{R}^+$.*
4. *Pour tous réels δ_1, δ_2 positifs ou nuls on a :*

$$\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$$

(on dit que la fonction ω_f est sous-additive).

5. *Pour tout réel δ positif ou nul et pour tout entier naturel n, on a :*

$$\omega_f (n\delta) \leq n\omega_f (\delta) .$$

6. *Pour tous réels δ_1, δ_2 positifs ou nuls on a :*

$$\omega_f (\delta_1 \delta_2) \leq (1 + \delta_1) \omega_f (\delta_2) .$$

7. *La fonction ω_f est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Proof.

1. Il est clair que $\omega_f (0) = 0$.
2. La fonction $(t, x) \mapsto |f (x) - f (t)|$ est continue sur le compact K_δ, elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $(t, x) \in I^2$ tel que $\omega_f (\delta) = |f (x) - f (t)|$.
3. Si $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$ alors $K_{\delta_1} \subset K_{\delta_2}$ et $\omega_f (\delta_1) \leq \omega_f (\delta_2)$. La fonction ω_f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Il est clair qu'elle est majorée par $2 \|f\|_\infty$.
4. Soient δ_1, δ_2 dans $\mathbb{R}^+$ et (t, x) dans $K_{\delta_1+\delta_2}$. Si $|x - t| \leq \delta_1$ alors :

$$|f (x) - f (t)| \leq \omega_f (\delta_1) \leq \omega_f (\delta_1) + \omega_f (\delta_2) .$$

Supposons que $\delta_1 < |x - t| \leq \delta_1 + \delta_2$ avec $x > t$, on a alors :

$$\begin{cases} a \leq t \leq t + \delta_1 < x \leq b, \\ 0 < x - (t + \delta_1) \leq \delta_2 \end{cases}$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} |f (t) - f (x)| &\leq |f (t) - f (t + \delta_1)| + |f (t + \delta_1) - f (x)| \\ &\leq \omega_f (\delta_1) + \omega_f (\delta_2) . \end{aligned}$$

De même si $x < t$. On peut donc conclure que :

$$\omega_f (\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_f (\delta_1) + \omega_f (\delta_2) .$$

5. Par récurrence sur $n \geq 0$, on déduit immédiatement de ce qui précède que $\omega_f (n\delta) \leq n\omega_f (\delta)$.
6. Si $n = [\delta_1]$ (partie entière de δ_1), on a $\delta_1\delta_2 < (n + 1) \delta_2$ et :

$$\omega_f (\delta_1\delta_2) \leq (1 + n) \omega_f (\delta_2) \leq (1 + \delta_1) \omega_f (\delta_2) .$$

7. On montre tout d'abord la continuité de ω_f en 0. La fonction f continue sur le compact I est uniformément continue, en conséquence pour tout réel ε strictement positif il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall (t, x) \in K_\eta,\ |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

On a donc, pour tout réel $\delta \in [0, \eta]$:

$$\omega_f(\delta) \leq \omega_f(\eta) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la continuité de ω_f en 0.
Si $\delta_0 > 0$, pour tout réel ε strictement positif il existe un réel η strictement positif tel que $\delta_0 - \eta > 0$ et $\omega_f(\eta) \leq \varepsilon$. Pour tout $\delta \in [\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta]$, on a alors :

$$\omega_f(\delta) \leq \omega_f(\delta_0 + \eta) \leq \omega_f(\delta_0) + \omega_f(\eta)$$

et avec :

$$\omega_f(\delta_0) = \omega_f(\delta_0 - \eta + \eta) \leq \omega_f(\delta_0 - \eta) + \omega_f(\eta)$$

on a :

$$\omega_f(\delta_0) - \omega_f(\eta) \leq \omega_f(\delta_0 - \eta) \leq \omega_f(\delta).$$

On a donc en définitive :

$$-\omega_f(\eta) \leq \omega_f(\delta) - \omega_f(\delta_0) \leq \omega_f(\eta),$$

soit :

$$|\omega_f(\delta) - \omega_f(\delta_0)| \leq \omega_f(\eta) \leq \varepsilon.$$

D'où la continuité de ω_f en δ_0.

■

Dans la suite de ce paragraphe, on désigne par ψ la fonction définie sur I^2 par :

$$\forall (t, x) \in I^2,\ \psi(t, x) = (t - x)^2$$

et pour tout x fixé dans I, on note ψ_x la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I,\ \psi_x(t) = \psi(t, x).$$

Lemme 5.4 *Soient δ un réel strictement positif et f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$. On a :*

$$\forall (t, x) \in I^2,\ |f(x) - f(t)| \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{\psi(t, x)}{\delta^2}\right).$$

Proof. Le résultat est évident pour $t = x$. On suppose que $x > t$ et on note $n-1$ la partie entière de $\frac{x-t}{\delta}$, on a alors :

$$0 \leq n-1 \leq \frac{x-t}{\delta} < n.$$

En posant $t_k = t + k\frac{x-t}{n}$ pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$0 < t_{k+1} - t_k = \frac{x-t}{n} < \delta$$

et :

$$\begin{aligned}|f(x) - f(t)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq n\omega_f(\delta) \\ &\leq \left(1 + (n-1)^2\right)\omega_f(\delta) \leq \left(1 + \frac{(x-t)^2}{\delta^2}\right)\omega_f(\delta).\end{aligned}$$

■

Lemme 5.5 *Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ tel que $u(e_0) = e_0$, δ un réel strictement positif et f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$. On a :*

$$\forall x \in I,\ |u(f)(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{u(\psi_x)(x)}{\delta^2}\right).$$

Proof. L'inégalité du lemme précédent peut s'écrire, à x fixé dans I :

$$|f - f(x)e_0| \leq \omega_f(\delta)\left(e_0 + \frac{\psi_x}{\delta^2}\right)$$

et avec la positivité de u, on déduit :

$$|u(f - f(x)e_0)| \leq u(|f - f(x)e_0|) \leq \omega_f(\delta)\left(u(e_0) + \frac{u(\psi_x)}{\delta^2}\right),$$

soit :

$$|u(f) - f(x)e_0| \leq \omega_f(\delta)\left(e_0 + \frac{u(\psi_x)}{\delta^2}\right)$$

et appliqué à $t = x$, on obtient :

$$|u(f)(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{u(\psi_x)(x)}{\delta^2}\right).$$

■

On note :

$$c = \max_{[a,b]} (1 + 2|x|)$$

et pour tout opérateur linéaire u sur $\mathcal{C}(I)$ tel que $u(e_0) = e_0$:

$$\gamma_u = \max_{1 \leq k \leq 2} \|u(e_k) - e_k\|_\infty .$$

Théorème 5.6 *Pour tout opérateur linéaire positif u sur $\mathcal{C}(I)$ tel que $u(e_0) = e_0$ et pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ on a :*

$$\|u(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f\left(\sqrt{c\gamma_u}\right).$$

Proof. En écrivant que $\psi_x = e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0$, on a, pour tout x dans I :

$$u(\psi_x) = u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)$$

et avec $\psi_x(x) = 0$, $u(e_0) = e_0$, on a :

$$u(\psi_x)(x) = (u(e_2)(x) - e_2(x)) - 2x(u(e_1)(x) - e_1(x))$$

de sorte que :

$$|u(\psi_x)(x)| \leq (1 + 2|x|)\gamma_u \leq c\gamma_u.$$

Et avec le lemme précédent, on déduit que pour tout réel δ strictement positif et tout x dans I on a :

$$|u(f)(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{c\gamma_u}{\delta^2}\right),$$

c'est-à-dire que :

$$\forall \delta > 0,\ \|u(f) - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{c\gamma_u}{\delta^2}\right).$$

Si $\gamma_u = 0$ alors $\|u(f) - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta)$ et en faisant tendre δ vers 0, avec la continuité de ω_f en 0, on déduit que $u(f) = f$. Si $\gamma_u \neq 0$ en prenant $\delta = \sqrt{c\gamma_u}$ on obtient :

$$\|u(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f\left(\sqrt{c\gamma_u}\right).$$

■

Remarque 5.7 *Si, avec les notations et hypothèses du théorème précédent, on a aussi* $u(e_1) = e_1$*, alors pour tout* x *dans* I*, on a* $u(\psi_x)(x) = u(e_2)(x) - e_2(x)$ *et :*

$$|u(\psi_x)(x)| \leq \|u(e_2) - e_2\|_\infty,$$

de sorte que la majoration précédente devient :

$$\forall \delta > 0,\ \|u(f) - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{\|u(e_2) - e_2\|_\infty}{\delta^2}\right)$$

et :

$$\|u(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f\left(\sqrt{\|u(e_2) - e_2\|_\infty}\right).$$

Le théorème 5.6 et la continuité en 0 de la fonction ω_f nous permettent retrouver théorème de Korovkin dans un cas particulier, avec en prime une majoration de l'erreur d'approximation.

Théorème 5.8 (Korovkin) *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle réel fermé borné non réduit à un point,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'opérateurs linéaires positifs sur* $\mathcal{C}(I)$ *telle que* $u_n(e_0) = e_0$ *pour tout entier* n *et* $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de réels définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \delta_n = \max_{1\leq k\leq 2} \|u_n(e_k) - e_k\|_\infty.$$

Si pour toute fonction f *appartenant à* $\{e_1, e_2\}$ *la suite* $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* I*, alors pour toute fonction* f *appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *la suite de fonctions* $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* I *avec :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f\left(\sqrt{c\delta_n}\right),$$

avec $c = \max_I (1 + 2|x|)$.

Remarque 5.9 *Si, avec les notations et hypothèses du théorème précédent, on a de plus* $u_n(e_1) = e_1$ *pour tout entier* n*, alors la majoration précédente devient :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f\left(\sqrt{\|u_n(e_2) - e_2\|_\infty}\right).$$

Dans le cas de l'approximation uniforme d'une fonction continue sur $[0, 1]$ par les opérateurs de Bernstein, on a $B_n(e_0) = e_0$, $B_n(e_1) = e_1$ et :

$$\|B_n(e_2) - e_2\|_\infty = \frac{1}{n}\|e_1 - e_2\|_\infty = \frac{1}{4n},$$

ce qui donne la majoration :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right).$$

Chapitre 6

CAPES externe 2004, épreuve 1

6.1 Énoncé

Objectifs et notations

Ce problème propose essentiellement l'étude de deux définitions classiques de la fonction exponentielle. La première partie établit des résultats fondamentaux qui seront utilisés dans les deux parties suivantes, mais à l'exception de la toute dernière question, la deuxième et la troisième partie sont totalement indépendantes.

Les candidats sont invités à lire soigneusement les en-têtes de chaque partie et à se conformer strictement aux exigences qui y sont formulées. Toute solution ne respectant pas ces exigences sera rejetée.

Certaines questions comportent des indications ou des suggestions de solutions. Les candidats peuvent bien sur ne pas en tenir compte et proposer des solutions personnelles.

$\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers naturels,* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

$\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels et* $\mathbb{R}^{*+}$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

E désigne l'application usuelle partie entière.

n désignant un entier naturel non nul, on appelle n-uplet de réels un élément du produit cartésien $\mathbb{R}^n$.

L'écriture $(u_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite indexée par $\mathbb{N}^*$, de terme général u_n et si a désigne un réel positif, $(u_n)_{n>a}$ désigne une suite indexée à partir du premier entier strictement supérieur à a et de terme général u_n. Dans certaines questions, l'indexation de la suite ne sera pas précisée et la notation (u_n) utilisée.

Partie A : Quelques résultats fondamentaux

Le but de cette partie est essentiellement la démonstration d'inégalités qui seront utilisées dans les parties suivantes, au service de constructions de la fonction exponentielle. On s'interdit donc toute emploi de propriétés de la fonction exponentielle exp, de la fonction logarithme ln et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel.

Par contre, les propriétés des fonctions puissances à exposant rationnel sont supposées connues.

A.I. L'inégalité de Bernoulli

Il s'agit de l'inégalité suivante :

> pour tout réel a strictement supérieur à -1 et tout entier naturel n appartenant à $\widehat{\mathbb{N}}$, $(1+a)^n \geq 1+na$ avec égalité si et seulement si $a=0$.

Démontrer cette inégalité de deux manières différentes, par des méthodes élémentaires. On étudiera le cas d'égalité.

Suggestion : Une méthode possible est de poser $x = 1+a$ et d'utiliser une factorisation.

A.II. L'inégalité de Cauchy

Il s'agit de l'inégalité suivante :

> pour tout entier naturel non nul n, pour tout n-uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$, $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$ avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$

encore appelée inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique.

1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n=2$. On étudiera le cas d'égalité.
2. La première démonstration proposée du cas général est due à Cauchy lui-même.

2.1. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} i)\ 1 \in A \\ ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \Rightarrow 2n \in A \\ iii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Rightarrow n \in A \end{cases}$$

Démontrer que $A = \mathbb{N}^*$.
Indication : on pourra commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \in A$.

2.2. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.
Indication : pour le passage de n à $2n$, on pourra utiliser le cas $n = 2$ et pour le passage de $n+1$ à n, on pourra généraliser l'égalité $\dfrac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} = \dfrac{a+b}{2}$.

3. Deuxième démonstration : soit n un entier naturel non nul, et $(x_1, \cdots, x_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs supposés pas tous égaux. On définit une application Φ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ en posant :

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{t}{n} \sum_{h=1}^{n} (x_h - x_k) \right).$$

3.1. Justifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $\Phi(t) > 0$.

3.2. Montrer que Φ est strictement croissante sur $[0,1]$.
Indication : Utiliser $\left(\dfrac{\Phi'}{\Phi}\right)'$.

3.3. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

4. La troisième démonstration est plus élaborée (on signale aux candidats que sa recherche n'a aucune incidence sur la suite du problème). Elle repose sur les trois idées suivantes :

4.1. Si les x_k ne sont pas tous égaux, alors soit :

$$m = \min_{1 \leq k \leq n} x_k, M = \max_{1 \leq k \leq n} x_k.$$

On a donc $m < M$; si dans le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ on remplace m et M par $\dfrac{m+M}{2}$, on obtient un n-uplet différent dont la moyenne arithmétique est la même, et la moyenne géométrique est strictement plus grande.

4.2. L'inégalité de Cauchy dans le cas général se déduit de l'inégalité obtenue dans le cas particulier où on suppose que les x_k vérifient de plus l'égalité $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

4.3. L'application $\Psi : (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) \prod_{k=1}^{n-1} x_k$ possède un maximum sur l'ensemble Ω des $(n-1)$-uplets vérifiant $x_1 > 0$, $\cdots, x_{n-1} > 0$ et $\sum_{k=1}^{n-1} x_k < 1$ atteint uniquement en $\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

Démontrer ces trois propriétés, sans faire appel au calcul différentiel à plusieurs variables.
Indication : pour la propriété 3), on pourra commencer par démontrer que le maximum de Ψ existe sur l'adhérence de Ω.

5. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

A.III. Un calcul d'intégrale

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit F une application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que f et F satisfont à la condition suivante :

$$\text{pour tout } (x, y) \in [a, b]^2, \; F(y) - F(x) \geq (y - x) f(x)$$

1. Démontrer que f est croissante sur $[a, b]$.
2. Démontrer que F est convexe sur $[a, b]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_{k+1})$$

4. En déduire que $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

A.IV. Continuité des applications convexes

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, convexe sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer l'inégalité dite des pentes : pour tous réels a, b, c, si $a < b < c$ alors :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra étudier les limites à droite et à gauche en x_0 arbitraire.

Partie B : Étude de la fonction exponentielle

Comme application des inégalités fondamentales de la partie A, on se propose de construire « à partir de rien » la fonction exponentielle.

On s'interdit donc, dans cette partie, tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle exp, de la fonction logarithme ln, et par voie de conséquence des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel, à moins qu'elles n'aient été préalablement redémontrées.

Cette partie fait un usage intensif des inégalités de la partie A,en particulier de l'inégalité de Bernoulli.

1. Soit x un réel fixé ; on note, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, et pour tout entier $n > |x|$, $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.
   1.1. Démontrer que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.
   Suggestion : Une méthode est de partir de l'égalité :
$$1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = (n+1)\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$$
   1.2. En déduire que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.
   1.3. Démontrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont convergentes et ont la même limite.
   Indication : Démontrer que $v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n}$.
2. On note e l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un réel x, associe la limite commune des suites de la question précédente.
   2.1. Soient a et b deux nombres réels, a strictement inférieur à b.
   Démontrer que la convergence de la suite d'applications $(u_n)_{n\geq 1}$ est uniforme sur $[a, b]$.
   Que peut-on en déduire pour l'application e.

2.2. Démontrer que pour tout x, $1+x \leq f(x)$ et, pour tout réel x strictement inférieur à 1, $e(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.

2.3.

2.3.1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e(x)$ est non nul et exprimer son inverse à l'aide de e.

2.3.2. Soit (ε_n) une suite de nombres réels convergente vers 0. Démontrer que la suite $\left(\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\right)$ converge vers 1.

2.3.3. En déduire que, pour tous x, y réels, on a :

$$e(x+y)\, e(-x)\, e(-y) = 1.$$

2.4. Énumérer les propriétés usuelles de la fonction exponentielle et démontrer que l'application e possède bien chacune de ces propriétés. (Propriétés usuelles est à comprendre ici comme propriétés enseignées dans les classes de lycée).

2.5. On pose $e = e(1)$. Déterminer la valeur décimale approchée par défaut de e à 10^{-1} près. On se gardera bien sûr d'utiliser la touche d'exponentiation ^ ou x^y des calculatrices car elle fait en général appel aux fonctions ln et exp. Toutes les explications utiles sur les moyens de calcul mis en œuvre pour cette détermination seront fournies.

2.6. Expliquer pourquoi les suites $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ et $\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right)$ sont mal adaptées au calcul numérique de valeurs approchées de e.

3. On va voir que la définition précédente de e peut être étendue aux nombres complexes.

3.1. Soit z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. Démontrer que :

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n) \frac{z^k}{k!}$$

où on a posé :

$$a_k(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \text{ ou } 1 \\ \displaystyle\prod_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{n}\right) \text{ si } 1 < k < n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3.2. En déduire que, pour tout nombre complexe z, et tous entiers naturels non nuls n, m

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| \leq \left|\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m\right|$$

Indication : on pourra commencer par observer que qu'à k fixé, la suite $n \mapsto a_k(n)$ est croissante.

3.3. En déduire, pour tout nombre complexe z, la convergence de la suite de nombres complexes $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$.

Partie C : L'exponentielle $\mathbb{R}$-solution de $y' = y$, $y(0) = 1$

Dans cette partie, on propose à nouveau une étude de la fonction exponentielle ; on s'interdit donc encore tout usage de exp, de ln et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel. Est aussi exclu tout emploi de la théorie des équations différentielles linéaires, a fortiori tout théorème d'existence et d'unicité de type Cauchy-Lipschitz ainsi que toute référence aux résultats de la partie précédente.

Par contre, on utilise librement les résultats de la première partie, en particulier ceux des questions **III** et **IV**.

Soient k et a deux réels, k non nul. Il s'agit de démontrer que le problème

$$PC_{k,a} \quad \begin{cases} y' = ky \\ y(0) = a \end{cases}$$

possède une unique $\mathbb{R}$-solution, et que cette unique solution s'exprime simplement en fonction de la solution du problème $PC_{1,1}$.

On appelle $\mathbb{R}$-solution du problème $PC_{k,a}$ toute application Φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\Phi(0) = a$ et pour tout réel x, $\Phi'(x) = k\Phi(x)$.

1. Quelle relation existe-il entre les $\mathbb{R}$-solutions éventuelles du problème $PC_{k,a}$ et celles du problème $PC_{1,1}$.
2. Soit a un réel quelconque et Φ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

$$(i) \quad \Phi \text{ est } \mathbb{R}\text{-solution du problème } PC_{1,a}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \Phi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \text{pour tout réel } x \ \Phi(x) = a + \displaystyle\int_0^x \Phi(t)\,dt \end{cases}$$

3. On démontre dans cette question l'unicité pour le problème $PC_{1,1}$.

   3.1. Quel lien y-a-t'il entre l'unicité pour le problème $PC_{1,1}$ et celle pour le problème $PC_{1,0}$?

   3.2. Soit Φ une $\mathbb{R}$-solution du problème $PC_{1,0}$ et T un réel fixé. Démontrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout x entre 0 et T, $|\Phi(x)| \leq M\dfrac{|x|^n}{n!}$. Que peut-on en déduire pour Φ ?
   Indication : On pourra traiter séparément les cas T positif et T négatif.

   3.3. En déduire l'unicité pour le problème $PC_{1,1}$.

On va maintenant démontrer l'existence d'une $\mathbb{R}$-solution du problème $PC_{1,1}$.
Dans toute la suite, h désigne un réel strictement positif.

4. On définit une application ψ_h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par les deux conditions suivantes :
   – pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_h(nh) = (1+h)^n$;
   – pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la restriction de ψ_h à $[nh,(n+1)h]$ est affine.

   (a) Construire dans le même repère les représentations graphiques de ψ_h sur $[-1,2]$ pour $h=1$ et $h=\dfrac{1}{2}$. On prendra 4 cm comme unité en abscisse et 2 cm en ordonnée.

   4.2. Expliquer l'origine graphique de la définition de ψ_h et son lien avec le problème $PC_{1,1}$. On se contentera de fournir cette explication pour des réels positifs.

5. On obtient dans cette question quelques propriétés utiles de ψ_h qui seront utilisées dans la suite.

   5.1. Démontrer que, pour tout réel x :
   $$\psi_h(x) = (1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)}\left(1+x-hE\left(\frac{x}{h}\right)\right).$$

   5.2. Démontrer que, pour tout réel x, on a $\psi_h(x) = 1+\displaystyle\int_0^x (1+h)^{E\left(\frac{t}{h}\right)}\,dt$.
   Indication : on pourra d'abord, pour x et y appartenant à l'intervalle $[nh,(n+1)h]$, exprimer $\psi_h(y)-\psi_h(x)$ à l'aide d'une intégrale.

   5.3. Démontrer l'inégalité suivante :
   pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi_h(y)-\psi_h(x) \geq (y-x)(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)}$.

5.4. Donner une interprétation graphique de cette inégalité.

5.5. En déduire que ψ_h est croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

6. On suppose dans cette question que x est un réel strictement positif. On va démontrer l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \psi_h(x)$.

   Pour cela, on introduit les deux applications α_x et β_x de $]0, x]$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\alpha_x(h) = \psi_h(x) \text{ et } \beta_x(h) = \psi_h(x(1+h)).$$

6.1. Construire, à l'aide de la calculatrice, un échantillon de représentation graphique des applications α_x et β_x (pour des x fixés à choisir et h variant entre 0 et x). Quelles conjectures peut-on faire sur les propriétés de ces applications ?

6.2. Déterminer le sens des variations de α_x sur $]0, x]$.
Indication : on pourra commencer par prouver que α_x est dérivable sur chaque $\left]\dfrac{x}{p+1}, \dfrac{x}{p}\right[$, p entier positif non nul, puis démontrer la continuité de α_x sur $]0, x]$.

De façon similaire, on démontre que β_x est croissante sur $]0, x]$. Cette propriété sera admise pour la suite.

6.3. En déduire que, pour tout réel h dans $]0, x]$, on a $\alpha_x(h) \leq \beta_x(h)$.

6.4. Conclure.
On démontre par un procédé similaire l'existence de $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \psi_h(x)$ dans le cas où x est strictement négatif. Dans la suite, on admettra ce résultat. Le cas $x = 0$ est banal.

7. On définit une application $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en posant $\mathcal{E}(x) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \psi_h(x)$.

   Il reste à démontrer que $\mathcal{E}$ est une $\mathbb{R}$-solution du problème $PC_{1,1}$.

7.1. Quelles sont les propriétés de ψ_h qui sont conservées par passage à la limite sur h ?

7.2. Démontrer que, pour tous x, y réels, on a $\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x) \geq (y-x)\mathcal{E}(x)$.

7.3. En déduire l'existence d'une solution pour le problème $PC_{1,1}$.

8. On revient au problème $PC_{k,a}$.

8.1. Démontrer que le problème $PC_{k,a}$ possède une unique $\mathbb{R}$-solution que l'on explicitera en fonction de $\mathcal{E}$.

8.2. En déduire que $\mathcal{E}$ satisfait à la propriété fonctionnelle fondamentale de la fonction exponentielle.

9. Dans cette question, on utilise les résultats de la partie **B**.
Démontrer que $\mathcal{E} = e$.

6.2 Corrigé

– A – Quelques résultats fondamentaux

A.I. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $x > 0$, on désigne par P_n la fonction polynomiale (donc indéfiniment dérivable) définie par :

$$P_n(x) = x^n - nx + n - 1 = x^n - 1 - n(x-1).$$

On a $P_n(1) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et il s'agit de montrer que $P_n(x) > 0$ pour tout $x \in D = \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$.

1ère **solution** Avec $P_2(x) = (x-1)^2 > 0$ et :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x-1)(x^n - 1) = P_n(x) + (x-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} x^k > P_n(x)$$

pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in D$, le résultat se déduit par récurrence sur $n \geq 2$.

2ème **solution** Pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in]0,1[$ [resp. $x \in]1,+\infty[$], on a $P_n'(x) = n\left(x^{n-1} - 1\right) < 0$ [resp. $P_n'(x) > 0$], donc la fonction P_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$ avec $P_n(1) = 0$, ce qui implique $P_n(x) > 0$ pour tout $x \in D$.

3ème **solution** On peut aussi écrire que pour tout $x \in D$ on a :

$$\begin{aligned} P_n(x) = x^n - 1 - n(x-1) &= (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} \left(x^k - 1\right) \\ &= (x-1)^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j \right) > 0. \end{aligned}$$

A.II. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)^n$, on pose :

$$A_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \; G_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pour $n = 1$, on a $A_1(x) = G_1(x) = x_1$ pour tout $x_1 > 0$.
On suppose donc dans ce qui suit que $n \geq 2$.
En notant :

$$\Delta_n = \left\{x \in \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\right\},$$

on a $A_n(x) = G_n(x)$ pour tout $x \in \Delta_n$. Il s'agit alors de montrer que :

$$\forall x \in D_n = \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)^n \setminus \Delta_n,\ A_n(x) > G_n(x).$$

En remarquant que les fonctions A_n et G_n sont homogènes (c'est-à-dire que $A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x)$ et $G_n(\lambda x) = \lambda G_n(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D_n$), il suffit de montrer cette inégalité sur :

$$E_n = \left\{x \in D_n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = 1\right\}.$$

En effet pour tout $x \in D_n$, on a $\lambda = \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$ et $x' = \frac{1}{\lambda} x \in E_n$, de sorte que :

$$A_n(x) = \lambda A_n\left(x'\right) > \lambda G_n\left(x'\right) = G_n(x)$$

si l'inégalité est vraie sur E_n.
Il s'agit donc de démontrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in E_n,\ nG_n(x) < 1.$$

1. Pour $(x_1, x_2) \in E_2$, on a :

$$1 - 2G_2(x) = 1 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 > 0.$$

2.

2.1. On a déjà $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}^*$.
Par récurrence descendante, on déduit de la propriété (iii) que si $m \geq 2$ est dans $\mathbb{A}$, alors $\{1, 2, \ldots, m\} \subset \mathbb{A}$ (on a $\{m\} \subset \mathbb{A}$ et en supposant que $\{k, \ldots, m\} \subset \mathbb{A}$ pour un entier k compris entre 2 et m, la propriété (iii) nous dit que $k - 1 \in \mathbb{A}$).
Toujours par récurrence, on déduit de (i) et (ii) que 2^n est dans $\mathbb{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est vrai pour $n = 0$ d'après (i) et en le supposant vrai pour n, on a $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \in \mathbb{A}$ d'après (ii)).
Comme pour tout entier $m \geq 1$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq 2^n$, il en résulte que $m \in \mathbb{A}$.
On a donc bien $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$.

2.2. Posons :

$$\mathbb{A} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n = 1 \text{ ou } n \geq 2 \text{ et } \forall x \in E_n,\ nG_n(x) < 1\}.$$

Pour tout n dans $\mathbb{A}$ on a $A_n(x) \geq G_n(x)$ pour tout $x \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, x est dans Δ_n (et donc $n \geq 2$).

On a $1 \in \mathbb{A}$ par définition et on a vu en **A.II.1.** que $2 \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{A}$ et $x = (x_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ dans E_{2n}. Le vecteur x a au moins deux composantes distinctes, donc, quitte à réordonner (ce qui ne modifie ni A_{2n} ni G_{2n}), on peut supposer que $x_1 \neq x_2$. Si $n = 1$, on sait déjà que 2 est dans $\mathbb{A}$. On suppose donc que $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} 2nG_{2n}(x) &= 2n\sqrt{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}} \\ &\leq n\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

avec $n\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} < \sum_{k=1}^{n} x_k$ ($x \notin \Delta_n$) et $n\left(\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} x_{n+k}$, ce qui donne :

$$2nG_{2n}(x) < \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_{n+k} = 1.$$

On a donc $2n \in \mathbb{A}$ si $n \in \mathbb{A}$.

Supposons que $n + 1 \in \mathbb{A}$ et soit $x \in E_n$. On a $\left(x, \frac{1}{n}\right) \notin \Delta_{n+1}$ et :

$$G_{n+1}\left(x, \frac{1}{n}\right) < A_{n+1}\left(x, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

soit :

$$\left(\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n}$$

ou encore :

$$\frac{1}{n}(G_n(x))^n < \frac{1}{n^{n+1}},$$

ce qui équivaut à $nG_n(x) < 1$. On a donc $n \in \mathbb{A}$.
On déduit alors de la question précédente que $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$, ce qui revient à dire que l'inégalité de Cauchy (avec son cas d'égalité) est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On se place toujours dans le cas où $n \geq 2$ et $x \in E_n$ et on définit la fonction Φ sur $[0,1]$ par :

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{t}{n} \sum_{h=1}^{n} (x_h - x_k) \right) = \prod_{k=1}^{n} \left((1-t)\, x_k + \frac{t}{n} \right).$$

3.1. Pour tout $t \in [0,1]$ le réel $(1-t)\, x_k + \dfrac{t}{n}$ est dans le segment d'extrémités $x_k > 0$ et $\dfrac{1}{n} > 0$, c'est donc un réel strictement positif. On a donc $\Phi(t) > 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

3.2. En notant $y_k = \dfrac{1}{n} - x_k$ pour tout k compris entre 1 et n, la dérivée logarithmique (qui se définit sans logarithme) de Φ est donnée par :

$$\forall t \in [0,1], \ \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{y_k}{y_k t + x_k},$$

ce qui donne :

$$\forall t \in [0,1], \ \left(\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \right)' = -\sum_{h=1}^{n} \frac{y_k^2}{(y_k t + x_k)^2} < 0$$

(les x_k n'étant pas tous égaux, il y a au moins un y_k non nul). La fonction $\dfrac{\Phi'}{\Phi}$ est donc strictement décroissante sur $[0,1]$ et donc :

$$\forall t \in [0,1[, \ \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} > \frac{\Phi'(1)}{\Phi(1)} = n \sum_{h=1}^{n} y_k = n \left(1 - \sum_{h=1}^{n} x_k \right) = 0$$

ce qui implique, compte tenu de $\Phi > 0$, que la fonction Φ est strictement croissante sur $[0,1]$.

3.3. L'inégalité $\Phi(0) < \Phi(1)$ équivaut à $nG_n(x) < 1$.

4.

4.1. Si $x \notin \Delta_n$, il a au moins deux composantes distinctes et quitte à renuméroter, on peut supposer que :

$$x_1 = m = \min_{1 \leq k \leq n} x_k \text{ et } x_2 = M = \max_{1 \leq k \leq n} x_k.$$

On a $m < M$ et en posant $x'_1 = x'_2 = \dfrac{m+M}{2}$, on a $x'_1 + x'_2 = x_1 + x_2$ et $x'_1 x'_2 = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{4} > x_1 x_2$ (ce qui équivaut à $(x_1 - x_2)^2 > 0$), ce qui donne pour $x' = (x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_n)$, $A_n(x') = A_n(x)$ et $G_n(x') > G_n(x)$.
Le résultat de cette question n'est pas utilisé dans ce qui suit.

4.2. Déjà vu en début de **A.II.**

4.3. La fonction ψ qui est continue (puisque polynomiale) sur le compact :

$$\overline{\Omega} = \left\{ x \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{n-1} \mid \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \leq 1 \right\} = \left(\mathbb{R}^+\right)^{n-1} \cap B_1$$

où on a noté B_1 la boule unité de $\left(\mathbb{R}^{n-1}, \|\cdot\|_1\right)$ ($\overline{\Omega}$ est compact comme fermé borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie) y est bornée et atteint ses bornes. Comme $\psi(x) \geq 0 = \psi(0)$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $\psi\left(\dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^n} > 0$, on a :

$$0 = \inf_{\overline{\Omega}} \psi(x) < M = \sup_{\overline{\Omega}} \psi(x).$$

Si l'une des composantes de x est nulle ou si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k = 1$ (c'est-à-dire si x est sur la frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ de $\overline{\Omega}$) alors $\psi(x) = 0$, ce qui implique que le maximum de la fonction ψ est atteint en un point $\omega = (\omega_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ dans l'intérieur Ω de $\overline{\Omega}$. Pour tout k compris entre 1 et n, il existe un réel $r_k > 0$ tel que pour tout $t \in \left]-r_k, r_k\right[$ le point $\omega_t = \left(\omega'_j\right)_{1 \leq j \leq n-1}$ défini par $\omega'_j = \omega_j$ si $j \neq k$ et $\omega'_k = \omega_k + t$ est dans l'ouvert Ω. La fonction g_k définie sur $\left]-r_k, r_k\right[$ par :

$$g_k(t) = \psi(\omega_t) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j - t\right)(\omega_k + t) \prod_{j=1,\ j \neq k}^{n-1} \omega_j$$

admet un maximum en 0 et étant dérivable, on a nécessairement $g'_k(0) = 0$, soit :

$$-\omega_k \prod_{j=1,\ j \neq k}^{n-1} \omega_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j\right) \prod_{j=1,\ j \neq k}^{n-1} \omega_j = 0.$$

Le vecteur ω est donc solution du système linéaire :

$$\omega_k + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j = 1 \ \ (1 \leq k \leq n-1) .$$

En réalité, cela revient à écrire la condition nécessaire d'extremum $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_k} (\omega) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$.
En retranchant la ligne $k \neq 1$ à la ligne 1, on obtient $\omega_k = \omega_1$ et la première équation donne $\omega_1 = \dfrac{1}{n}$.
En définitive le maximum de ψ est atteint en $\omega = \left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n} \right)$ et il vaut $\dfrac{1}{n^n}$.
Cette preuve est due à Maclaurin (voir [16]).

5. Pour $x \in E_n$, on a $x \neq \omega = \left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n} \right)$ et :

$$\begin{aligned} (G_n (x))^n &= \prod_{k=1}^{n} x_k = x_n \prod_{k=1}^{n-1} x_k = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) \prod_{k=1}^{n-1} x_k \\ &= \psi (x) < \psi (\omega) = \frac{1}{n^n}, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $nG_n (x) < 1$.

A.III. On suppose que f, F sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur $[a, b]$ telles que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 , \ F (y) - F (x) \geq (y - x) f (x) . \tag{6.1}$$

Aucune hypothèse de continuité n'est faite sur f.
De (6.1) on déduit que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 , \ (y - x) f (x) \leq F (y) - F (x) \leq (y - x) f (y) \tag{6.2}$$

1. De l'encadrement (6.2) on déduit que $(y - x) (f (y) - f (x)) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, ce qui signifie que f est croissante. Elle est donc Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De cet encadrement on déduit aussi que $|F (y) - F (x)| \leq \|f\|_\infty |y - x|$, où $\|f\|_\infty = \max (|f (a)| , |f (a)|)$, c'est-à-dire que F est lipschitzienne et donc continue.

2. Pour x, y, z dans $[a, b]$ et λ dans $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}(1-\lambda) F(x) + \lambda F(y) - F(z) &= (1-\lambda)(F(x) - F(z)) + \lambda (F(y) - F(z)) \\ &\geq ((1-\lambda)(x-z) + \lambda (y-z)) f(z) \\ &\geq ((1-\lambda) x + \lambda y - z) f(z) = 0\end{aligned}$$

si $z = (1-\lambda) x + \lambda y$, ce qui prouve que F est convexe.

3. En additionnant les encadrements :

$$(a_{k+1} - a_k) f(a_k) \leq F(a_{k+1}) - F(a_k) \leq (a_{k+1} - a_k) f(a_{k+1}) \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

on obtient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \leq F(b) - F(a) \leq T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_{k+1}),$$

les S_n et T_n étant des sommes de Riemann de f.

4. Prenant $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

   En travaillant sur $[a, x]$, on a en fait $F(x) - F(a) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ pour tout t dans $[a, b]$ et on retrouve le fait que F est lipschitzienne.

A.IV. Tout est basé sur le fait que tout point $b \in \,]a, c[$ s'écrit $b = \lambda a + (1-\lambda) c$ avec $\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}$ dans $]0, 1[$.

1. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors :

$$f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

avec $1 - \lambda = \dfrac{b-a}{c-a}$, ce qui donne :

$$f(b) - f(a) \leq (1-\lambda)(f(c) - f(a)) = \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a)),$$

soit $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c) - f(a)}{c-a}$ et :

$$f(b) - f(c) \leq \lambda (f(a) - f(c)) = \frac{c-b}{c-a}(f(a) - f(c)),$$

soit en multipliant par -1 :

$$f(c) - f(b) \geq \frac{c-b}{c-a}(f(c) - f(a))$$

ou encore $\dfrac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(c) - f(b)}{c-b}$. On a donc :

$$a < b < c \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}.$$

2. Pour $a < b < x$, on a :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x-b}$$

et pour $b < x < c$, on a :

$$\frac{f(x) - f(b)}{x-b} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$

ce qui donne :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-b) \leq f(x) - f(b) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}(x-b)$$

et le passage à la limite en b nous donne $\lim\limits_{x \to b^+}(f(x) - f(b)) = 0$, ce qui traduit la continuité à droite en b. La continuité à gauche se montre de manière analogue.

– B – Fonction exponentielle

1.

1.1. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 1$ pour toute $n \geq 1$, c'est-à-dire que la suite est stationnaire, donc croissante.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un entier naturel non nul n_x tel que $n_x + x > 0$ (pour $x > 0$, $n_x = 1$ et pour $x < 0$ prendre $n_x > -x = |x|$). En notant $n_x = E(|x|) + 1$, où E désigne la fonction partie entière, on a $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ pour tout $n \geq n_x$ et :

$$\begin{aligned}(u_n(x))^{\frac{1}{n+1}} &= G_{n+1}\left(1, 1 + \frac{x}{n}, \ldots, 1 + \frac{x}{n}\right) \\ &< A_{n+1}\left(1, 1 + \frac{x}{n}, \ldots, 1 + \frac{x}{n}\right) = (u_{n+1}(x))^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

(comme $x \neq 0$, on a $1 + \dfrac{x}{n} \neq 1$ et l'inégalité de Cauchy est stricte).
Il en résulte que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ est strictement croissante.

1.2. De $v_n(x) = \dfrac{1}{u_n(-x)}$ pour $n \geq n_x$, on déduit que la suite $(v_n(x))_{n \geq n_x}$ est strictement décroissante.

1.3. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = v_n(0) = 1$ et les deux suites convergent vers $e(0) = 1$.

Pour $x \neq 0$, et $n \geq n_x$, on a :

$$\begin{aligned} v_n(x) - u_n(x) &= \frac{1}{u_n(-x)} - u_n(x) = \frac{1 - u_n(x)\, u_n(-x)}{u_n(-x)} \\ &= v_n(x) \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Comme $n^2 \geq n_x^2 > x^2$, on a $1 - \dfrac{x^2}{n^2} \in \left]0, 1\right[$, ce qui entraîne que $v_n(x) - u_n(x) > 0$ et on peut utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que $\left(1 - \dfrac{x^2}{n^n}\right)^n > 1 - \dfrac{x^2}{n}$, ce qui donne :

$$\forall n \geq n_x,\ 0 < v_n(x) - u_n(x) < v_n(x) \frac{x^2}{n} \leq v_{n_x}(x) \frac{x^2}{n}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n(x) - u_n(x)) = 0$.

En définitive, les suites $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ et $(v_n(x))_{n \geq n_x}$ sont adjacentes et elles convergent vers une même limite $e(x)$.

Pour tout réel x, on a :

$$\forall n \geq n_x,\ 0 < u_n(x) \leq e(x) \leq v_n(x).$$

La fonction e est donc à valeurs strictement positives.

2.

2.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq n_x = E(|x|) + 1$, on a :

$$0 \leq e(x) - u_n(x) \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n}.$$

Pour $a < b$, on peut trouver un entier $n_0 > 0$ tel que $[a, b]$ soit contenu dans $[-n_0, n_0]$ et on a $n_x \leq n_0 + 1$ pour tout $x \in [a, b]$, de sorte que :

$$\forall n \geq n_0 + 1,\ 0 \leq e(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n} \leq v_{n_0+1}(x) \frac{x^2}{n} \leq \frac{M}{n}$$

où $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} x^2 v_{n_0+1}(x)$ (la fonction continue $x \mapsto x^2 v_{n_0+1}(x)$ est bornée sur le compact $[a, b]$). La convergence uniforme sur $[a, b]$ de

la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq n_0+1}$ vers la fonction e s'en déduit alors immédiatement.
Les fonction polynomiales u_n étant continues, il en résulte que e est continue sur tout segment $[a,b]$ et donc sur $\mathbb{R}$.
Nous verrons un peu plus loin que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

2.2. Dans l'encadrement :

$$\forall n \geq n_x,\ 0 < u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e(x) \leq v_n(x) = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

on peut utiliser l'inégalité de Bernoulli pour le terme de gauche quel que soit le réel x (pour $n \geq n_x > |x|$, on a $\frac{x}{n} > -1$) et on peut l'utiliser pour le terme de droite si $x < 1$ (dans ce cas on a bien $-\frac{x}{n} > -1$ et $1-x > 0$ qui permet de passer à l'inverse), ce qui nous donne $1+x \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e(x)$ pour tout réel x et $e(x) \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1-x}$ pour tout réel $x<1$, ces inégalités étant strictes pour $x \neq 0$ (et $n \geq 2$).

2.3.

2.3.1. On a déjà vu en **B.I.3.** que e est à valeurs strictement positives. De plus pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{e(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} v_n(-x) = e(-x).$$

On a donc $e(x)\,e(-x) = 1$ pour tout réel x.

2.3.2. On montre, de manière plus générale, que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ qui converge uniformément vers une fonction f, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b]$ qui converge vers x, la suite $(u_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On sait déjà que f est continue sur $[a,b]$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues, que x est dans $[a,b]$ puisque cet ensemble est fermé et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} |u_n(x_n) - f(x)| &\leq |u_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|u_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|. \end{aligned}$$

La convergence uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - f\|_\infty = 0$ et la continuité de f que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = f(x)$.
Pour le cas qui nous intéresse, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} u_n(\varepsilon_n) = e(0) = 1$$

pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

2.3.3. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x)\, u_n(y) = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x + y + \dfrac{xy}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} x + y$. Il en résulte que :

$$e(x)\, e(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = e(x+y),$$

encore équivalent à $e(x+y)\, e(-x)\, e(-y) = 1$ (résultat de **B.II.3.1.**).

2.4. On sait déjà que la fonction e est continue à valeurs strictement positives et solution de l'équation fonctionnelle $e(x+y) = e(x)\, e(y)$ avec $e(0) = 1$.

- Pour tout réel $x > 0$, on a $u_n(x) > 1$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(u_n(x))_{n\geq1}$ étant strictement croissante, il en résulte que $e(x) > 1$.
- On en déduit alors que la fonction e est strictement croissante. En effet, pour $x < y$, on a $\dfrac{e(y)}{e(x)} = e(y)\, e(-x) = e(y-x) > 1$.
- De l'inégalité $e(x) > u_1(x) = 1 + x$ pour tout $x > 0$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = +\infty$ et de $e(-x) = \dfrac{1}{e(x)}$, on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} e(x) = 0$.
- La fonction e réalise donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Son inverse est appelé fonction logarithme et noté $\ln$.
- Avec :

$$\frac{e(x)}{x^n} > \frac{u_{n+1}(x)}{x^n} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$$

pour $x > 0$ et $n \geq 1$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e(x)}{x^n} = +\infty$.

- La fonction e est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $e' = e$. Il suffit en effet d'écrire que pour x, h dans $\mathbb{R}$ avec $h \neq 0$, on a :
$$\frac{e(x+h) - e(x)}{h} = e(x)\,\frac{e(h) - 1}{h}$$
et l'encadrement $1 + h \leq e(h) \leq \dfrac{1}{1-h}$ valable pour $h \in \left]-1, 1\right[$ nous donne $1 \leq \dfrac{e(h) - e(0)}{h} \leq \dfrac{1}{1-h}$ pour h non nul, qui entraîne $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{e(h) - e(0)}{h} = 1$.
- On en déduit alors que la fonction ln est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ de dérivée égale à $\dfrac{1}{t}$. La fonction ln est donc la primitive sur $\left]0, +\infty\right[$ de la fonction $\dfrac{1}{t}$ nulle en 1.
- De $e' = e$, on déduit que e est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ce qui implique que ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0, +\infty\right[$.
- Avec $e'(x) = e(x) > 0$ pour tout réel x, on retrouve le fait que e est strictement croissante et avec $e''(x) = e(x) > 0$ on déduit que e est convexe sur $\mathbb{R}$.
- On retrouve également les propriétés classiques de la fonction logarithme.

2.5. On note $u_n = u_n(1)$ pour tout $n \geq 1$.

En notant $(w_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $w_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, on a pour $n \geq 2$:
$$\begin{aligned}(w_n)^{\frac{1}{n+1}} &= H_{n+1}\left(1, 1 + \frac{1}{n-1}, \dots, 1 + \frac{1}{n-1}\right)\\ &< G_{n+1}\left(1, 1 + \frac{1}{n-1}, \dots, 1 + \frac{1}{n-1}\right) = (w_{n-1})^{\frac{1}{n+1}},\end{aligned}$$
c'est-à-dire que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et avec $w_n - u_n = \dfrac{u_n}{n}$, on déduit que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux vers $e = e(1)$ et on a l'encadrement :
$$0 \leq e - u_n \leq w_n - u_n = \frac{u_n}{n}.$$
De plus avec $w_n \leq w_6 = \left(1 + \dfrac{1}{6}\right)^7 < 3$, on déduit que $u_n < 3$ pour $n \geq 6$ (on vérifie que c'est vrai aussi pour n entre 1 et 5),

ce qui donne $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et la précision de 10^{-1} sera atteinte pour $n \geq 1$ tel que $\frac{3}{n} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{10}$, soit pour $n \geq 60$. Le calcul des u_{2^p} étant plus simple, on prend $n = 64 = 2^6$, ce qui donne $u_{2^6} \approx 2.697344953$. Pour $n = 2^7$, on a $u_{2^7} \approx 2.707739020$.
La procédure Maple qui suit donne un exemple de programmation du calcul des u_{2^p}.

```
restart ;
f :=proc(p)
local n, k, t ;
    n := 1 :
    for k from 1 to p do n :=2*n od :
    t := 1+ 1/n :
    for k from 1 to p do t :=t*t od :
    RETURN(evalf(t)) :
end :
```

2.6. Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 (à ce stade du problème, on connaît cette fonction et ses propriétés) nous donne le développement asymptotique suivant :

$$\forall n \geq 1,\ x_n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ce qui entraîne $e_n = e - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{e}{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$. La convergence de cette suite vers le nombre e est donc lente.
Si on considère la suite $(t_n)_{n\geq 0} = (u_{2^n})_{n\geq 0}$, on a $e - t_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{e}{2^{n+1}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{e - t_{n+1}}{e - t_n} = \frac{1}{2}$, donc la convergence est géométrique.
On peut utiliser le procédé d'accélération de Richardson qui consiste à utiliser les suites accélératrices définies par :

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} \ (n \geq 0), \\ u_{n,k} = \frac{2^k u_{n+1,k-1} - u_{n,k-1}}{2^k - 1} \ (k \geq 1). \end{cases}$$

Ce qui donne, par exemple, pour les trois premières suites :

$$\begin{cases} u_{n,0} = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}, \\ u_{n,1} = 2u_{n+1,0} - u_{n,0}, \\ u_{n,2} = \dfrac{4u_{n+1,1} - u_{n,1}}{3}, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e - u_{n,0} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2}\dfrac{1}{2^n}, \\ e - u_{n,1} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{11e}{24}\dfrac{1}{2^{2n+1}}, \\ e - u_{n,2} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{7e}{16}\dfrac{1}{2^{3(n+1)}}. \end{cases}$$

(voir le paragraphe 6.2 de [28] pour plus de détails).

3. La définition précédente de la fonction exponentielle peut être étendue aux algèbres de Banach. On rappelle que si E est une algèbre unitaire sur $\mathbb{R}$, on dit que c'est une algèbre de Banach si elle est munie d'une norme multiplicative $x \mapsto \|x\|$ (c'est-à-dire que $\|\cdot\|$ est une norme sur E et $\|xy\| \leq \|x\| \|x\|$ pour tous x, y dans E) telle que $\|1\| = 1$ (où 1 est le neutre pour la multiplication) et si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On peut considérer par exemple $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ qui est une algèbre de Banach commutative ou $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ muni d'une quelconque norme multiplicative. Cette dernière algèbre n'est pas commutative.
Pour tout z dans E et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $u_n(z) = \left(1 + \dfrac{1}{n}z\right)^n$.
Pour $z \in E$ et $m > n$, on a :

$$\begin{aligned} \|u_m(z) - u_n(z)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right) z^k - \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} z^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right| \|z\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} \|z\|^k \end{aligned}$$

(comme z et 1 commutent, on peut utiliser la formule du binôme). Pour k compris entre 2 et n, on a :

$$\begin{aligned} C_m^k \frac{1}{m^k} &= \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!m^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \\ &\geq \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = C_n^k \frac{1}{n^k}, \end{aligned}$$

et pour $k = 0$ ou 1, ces deux quantités valent 1. On a donc :

$$\begin{aligned}\|u_m(z) - u_n(z)\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right) \|z\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} \|z\|^k \\ &\leq u_m(\|z\|) - u_n(\|z\|)\end{aligned}$$

et il en résulte que la suite $(u_n(z))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$. Cet espace étant complet, la suite y est convergente. On note $e(z)$ sa limite dans E.

Faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité précédente, on a :

$$\forall n \geq 1,\ \|e(z) - u_n(z)\| \leq e(\|z\|) - u_n(\|z\|)$$

et on en déduit que la convergence est uniforme sur tout compact de E.

Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers z, on en déduit que la suite $(u_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e(z)$.

En écrivant que :

$$u_n(z)\, u_n(-z) = \left(1 - \frac{1}{n^2} z^2\right)^n = u_n\left(-\frac{1}{n} z^2\right)$$

(les polynômes en z commutent dans E), on en déduit par passage à la limite que $e(z)\, e(-z) = 1$, c'est-à-dire que pour tout $z \in E$, $e(z)$ est inversible d'inverse $e(-z)$.

Pour z, z' dans E, qui commutent dans E, on a :

$$u_n(z)\, u_n(z') = \left(\left(1 + \frac{1}{n} z\right)\left(1 + \frac{1}{n} z'\right)\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} z_n\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = z + z' + \frac{1}{n} z z' \underset{n\to+\infty}{\to} z + z'$. Il en résulte que :

$$e(z)\, e(z') = \lim_{n\to+\infty} u_n(z)\, u_n(z') = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = e(z + z').$$

Ce résultat est faux si z et z' ne commutent pas comme le montre l'exemple des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (voir [27], exercice 7.1.).

– C – L'exponentielle solution de $y' = y$, $y(0) = 1$

1. Pour k, a dans $\mathbb{R}^*$, la fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$ si, et seulement si, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = af(kx)$ est solution de $g'(x) = kg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g(0) = a$.
   Pour $k \in \mathbb{R}^*$, la fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$ si, et seulement si, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(kx)$ est solution de $g'(x) = kg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g(0) = 1$.
2. Si Φ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\Phi' = \Phi$ et $\Phi(0) = a$, elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :
   $$\Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^x \Phi'(t)\,dt = a + \int_0^x \Phi(t)\,dt.$$
   Réciproquement si Φ est continue et solution de cette équation intégrale, elle est alors dérivable de dérivée $\Phi' = \Phi$ et on a $\Phi(0) = a$.
3. Par linéarité de la dérivation et de l'évaluation en 0, on déduit que l'unicité d'une solution pour le problème $PC_{1,1}$ est équivalente à l'unicité pour le problème $PC_{1,0}$. On s'intéresse donc à ce dernier problème.
   Soit f une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$. De $f' = f$ on déduit facilement que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)} = f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si de plus $f(0) = 0$, on a alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et la formule de Taylor à l'ordre n entre 0 et $x \in \mathbb{R}^*$ s'écrit $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_{n,x})}{n!}x^n$ où $c_{n,x}$ est un réel strictement compris entre 0 et x. Tenant compte de $f^{(n)} = f$, on a $f(x) = \dfrac{f(c_{n,x})}{n!}x^n$ et en utilisant le fait que la fonction continue f est bornée sur le segment d'extrémités $0, x$, on déduit qu'il existe une constante $M_x > 0$ telle que $|f(x)| \leq M_x \dfrac{|x|^n}{n!} = \varepsilon_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}(x)}{\varepsilon_n(x)} = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$ et $f(x) = 0$. En définitive la fonction f est la fonction nulle.
4. Pour $h > 0$, la fonction ψ_h est continue affine par morceaux et telle que $\psi_h(nh) = (1+h)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle est donc définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in [nh, ((n+1)h)],\ \psi_h(x) = (1+h)^n (x - nh + 1).$$
   On trace facilement les graphes de ψ_1 et $\psi_{0.5}$ sur $[-1, 2]$.
   La méthode d'Euler pour résoudre de façon approchée le problème $PC_{1,1}$

consiste à approximer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre dérivé $y'(nh)$ par la différence finie $\dfrac{y(nh+h)-y(nh)}{h}$, ce qui donne en tenant compte de $y' = y$:

$$y(nh) \backsimeq \frac{y(nh+h)-y(nh)}{h}$$

et donc $y(nh+h) \backsimeq (1+h)\, y(nh)$. En notant y_n la valeur approchée de $y(nh)$ obtenue à chaque étape, on a $y_{n+1} = (1+h)\, y_n$ et par récurrence $y_n = (1+h)^n$, en prenant $y_0 = y(0) = 1$. Graphiquement le graphe de la solution y du problème $PC_{1,1}$ est remplacé par celui de ψ_h.

5.

5.1. Tout réel x étant dans un unique intervalle $[nh, ((n+1)h)[$, où $n = E\left(\dfrac{x}{h}\right)$, on peut écrire que :

$$\psi_h(x) = (1+h)^n (x - nh + 1) = (1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} \left(1 + x - E\left(\frac{x}{h}\right) h\right).$$

On peut remarque que ψ_h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}]nh, ((n+1)h)[$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in]nh, ((n+1)h)[,\ \psi_h'(x) = (1+h)^n.$$

En posant $\psi_h'(nh) = (1+h)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction ψ_h' qui est en escaliers sur $\mathbb{R}$ et croissante.

5.2. Pour $x \geq 0$ dans $[nh, ((n+1)h)[$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_h(x) &= \psi_h(x) - \psi_h(nh) + \psi_h(nh) \\
&= \psi_h(x) - \psi_h(nh) + \sum_{k=1}^{n} \left(\psi_h(kh) - \psi_h((k-1)h)\right) + \psi_h(0) \\
&= \int_{nh}^{x} \psi_h'(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)h}^{kh} \psi_h'(t)\, dt + 1 = \int_0^x \psi_h'(t)\, dt + 1
\end{aligned}$$

(pour $n = 0$, la somme sur k n'apparaît pas et on utilise le fait que ψ_h' définie précédemment est continue par morceaux donc intégrable sur $[0, x]$).

Pour $x < 0$ dans $[nh, ((n+1)h)[$ avec $n \leq -1$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_h(x) &= \psi_h(x) - \psi_h((n+1)h) + \psi_h((n+1)h) \\
&= \psi_h(x) - \psi_h((n+1)h) + \sum_{k=n+1}^{-1} (\psi_h(kh) - \psi_h((k+1)h)) + \psi_h(0) \\
&= \int_{(n+1)h}^{x} \psi_h'(t)\,dt + \sum_{k=n+1}^{-1} \int_{(k+1)h}^{kh} \psi_h'(t)\,dt + 1 = \int_0^x \psi_h'(t)\,dt + 1
\end{aligned}$$

(pour $n = -1$, la somme sur k n'apparaît pas).
Soit dans tous les cas :

$$\psi_h(x) = 1 + \int_0^x \psi_h'(t)\,dt = 1 + \int_0^x (1+h)^{E\left(\frac{t}{h}\right)}\,dt.$$

5.3. Pour x, y dans $\mathbb{R}$, en utilisant la croissance de ψ_h', on a :

$$\psi_h(y) - \psi_h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^y \psi_h'(t)\,dt \geq (y-x)\,\psi_h'(x) & \text{si } y \geq x, \\ \displaystyle -\int_y^x \psi_h'(t)\,dt \geq (y-x)\,\psi_h'(x) & \text{si } y \leq x, \end{cases}$$

soit dans tous les cas :

$$\psi_h(y) - \psi_h(x) \geq (y-x)\,\psi_h'(x) = (y-x)(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)}. \tag{6.3}$$

5.4. Cette inégalité traduit la convexité de la fonction ψ_h (pour $a < b$, le graphe de ψ_h est sous la corde définie par a et b).

5.5. Pour $x < y$, on a $\psi_h(y) - \psi_h(x) \geq (y-x)(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} > 0$, donc la fonction ψ_h est strictement croissante.
Le résultat de la question **A.III.2.** nous dit que ψ_h est convexe.

6.

6.1. Comme on dit dans les bons ouvrages, le lecteur est prié de faire des dessins. On conjecture alors ce qu'on demande de prouver dans les questions qui suivent.

6.2. Pour $x > 0$, on écrit que $]0, x] = \bigcup_{p \geq 1} \left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right]$ et sur chaque intervalle $\left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right]$ on a $\alpha_x(h) = (1+h)^p(1+x-h)$. La fonction α_x est donc dérivable sur chacun de ces intervalles avec :

$$\alpha_x'(h) = p(1+h)^{p-1}(x - (p+1)h) < 0.$$

Elle y est donc strictement décroissante. De plus pour tout $p \geq 1$, on a $\lim\limits_{h \to \frac{x}{p}} \alpha_x(h) = \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p = \alpha_x\left(\frac{x}{p}\right)$, c'est-à-dire que α_x est continue sur $]0, x]$ et elle est décroissante sur cet intervalle.

6.3. Avec la croissance de ψ_h et β_x, on a pour tout $h \in]0, x]$:

$$\alpha_x(h) = \psi_h(x) \leq \psi_h((1+h)x) = \beta_x(h) \leq \beta_x(x).$$

6.4. La fonction α_x étant décroissante et majorée par $\beta_x(x)$ sur $]0, x]$, on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha_x(h) = \sup_{h \in]0,x]} \alpha_x(h) \leq \beta_x(x),$$

c'est-à-dire que $\psi_h(x)$ a une limite en 0^+ pour tout $x > 0$.
Ce résultat est aussi valable pour $x \leq 0$.

7. On peut donc définir la fonction $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ par $\mathcal{E}(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \psi_h(x)$.

7.1. Chaque fonction ψ_h étant croissante, convexe et à valeurs positives, il en est de même de $\mathcal{E}$. La convexité de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité.

7.2. Avec $hE\left(\frac{x}{h}\right) \leq x < hE\left(\frac{x}{h}\right) + h$, on déduit que $0 \leq x - hE\left(\frac{x}{h}\right) < h$ et $\lim\limits_{h \to 0}\left(x - hE\left(\frac{x}{h}\right)\right) = 0$. Puis avec $(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} = \dfrac{\psi_h(x)}{1 + x - E\left(\frac{x}{h}\right)h}$, on déduit que $\lim\limits_{h \to 0}(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \psi_h(x) = \mathcal{E}(x)$ et en faisant tendre h vers 0 dans (6.3) on en déduit que pour tous réels x, y, on a $\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x) \geq (y - x)\mathcal{E}(x)$.

7.3. On déduit alors de l'étude faite en **A.III.** que pour tout réel x on a $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(0) + \displaystyle\int_0^x \mathcal{E}(t)\, dt$. La fonction $\mathcal{E}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, cela équivaut à dire que $\mathcal{E}$ est solution de $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = \mathcal{E}(0) = 1$.

8.

8.1. En utilisant le résultat de la question **C.1.** on déduit que l'unique solution du problème $PC_{k,a}$, pour $(k, a) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est $y(x) = a\mathcal{E}(kx)$.

8.2. En dérivant par rapport à la variable x la fonction φ définie par $\varphi(x, y) = \mathcal{E}(x + y) - \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)$, on a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \varphi(x, y)$ avec $\varphi(0, y) = 0$, ce qui équivaut à dire que φ est nulle (0 est l'unique solution de $PC_{1,0}$) et donc $\mathcal{E}$ vérifie la même équation fonctionnelle que l'exponentielle.

8.3. Comme e et $\mathcal{E}$ sont solutions du problème $PC_{1,1}$, on a $e = \mathcal{E}$ par unicité.

6.3 Remarques et compléments

6.3.1 La méthode d'Euler pour l'équation $y' = y$

La méthode d'Euler est basée sur le théorème des accroissements finis qui permet d'écrire, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage du point x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \backsimeq f(x) + hf'(x),$$

où h est réel non nul destiné à tendre vers 0 et θ (qui dépend de x et h) est dans $]0,1[$.

D'un point de vue géométrique, on remplace au voisinage de x le graphe de f par sa tangente en x.

On s'intéresse ici au problème de Cauchy qui consiste à déterminer une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = y(x). \end{cases} \tag{6.4}$$

En supposant que ce problème admet une solution (ce que nous dit le théorème de Cauchy-Lipschitz) on se fixe un réel $x > 0$ et on va utiliser la méthode d'Euler pour obtenir une valeur approchée de $y(x)$. Pour ce faire on se donne un entier $n \geq 1$ auquel on associe la subdivision de $[0,x]$ définie par les points :

$$x_k = k\frac{x}{n} \ \ (0 \leq k \leq n)$$

et on va définir une suite $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ d'approximations des éléments de la suite $(y(x_k))_{0 \leq k \leq n}$.

Pour $k = 0$, on pose $y_0 = y(x_0) = 1$.

En supposant construits $y_0, \ldots, y_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$, on écrit que :

$$y(x_k) = y\left(x_{k-1} + \frac{x}{n}\right) \backsimeq y(x_{k-1}) + \frac{x}{n}y'(x_{k-1}) = y(x_{k-1})\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

et avec $y(x_{k-1}) \backsimeq y_{k-1}$, on obtient l'approximation :

$$y(x_k) \backsimeq y_k = y_{k-1}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

La suite $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_k = y_{k-1}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \ \ (1 \leq k \leq n) \end{cases}$$

ce qui donne $y_k = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k$ et en particulier on a l'approximation :

$$y(x) = y(x_n) \backsimeq y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

6.3.2 La suite de fonctions $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\right)_{n\geq 1}$

Nous sommes donc amenés à étudier la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

et nous allons montrer dans ce paragraphe que cette suite converge vers une fonction f qui est l'unique solution du problème (6.4).

Pour $x=0$, cette suite est stationnaire sur 1.

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 6.1 *Pour tout réel x, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\,u_n(-x)=1.$$

Proof. Pour tout $n\geq 1$, on a :

$$1-u_n(x)\,u_n(-x)=1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n}=\frac{x^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{k}.$$

Pour tout $n>|x|$, on a $0<1-\dfrac{x^2}{n^2}\leq 1$ et :

$$|1-u_n(x)\,u_n(-x)|\leq\frac{x^2}{n^2}n=\frac{x^2}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

■

En notant E la fonction partie entière, on associe à tout réel x l'entier n_x défini par :

$$n_x=\begin{cases}1 \text{ pour } x\geq 0,\\ E(|x|)+1 \text{ pour } x<0\end{cases}$$

et on a $u_n(x)>0$ pour tout $n\geq n_x$.

Nous allons montrer dans ce qui suit que pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x)>0$. En utilisant le lemme précédent on voit qu'il suffit de montrer ce résultat pour $x>0$ ou pour $x<0$.

Lemme 6.2 *Pour tout entier $n_0\geq 1$ et tout entier $n\geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0,0]$.*

Proof. On se fixe un entier $n_0\geq 1$.

Pour tout $n\geq n_0$ et tout $x\in\,]-n_0,0]$, on a $n\geq n_0>-x$ et $u_n(x)>0$, cette inégalité étant également vérifiée pour $x>0$ et $n\geq 1$.

Pour $n \geq n_0$ la restriction de la fonction u_n à $]-n_0, +\infty[$ est dérivable à valeurs strictement positives avec $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \dfrac{n}{n+x}$ et :

$$\forall x \in]-n_0, +\infty[\,, \ \frac{u_{n+1}'(x)}{u_{n+1}(x)} - \frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{(n+x)(n+1+x)}.$$

En utilisant $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)' = \dfrac{u_{n+1}'u_n - u_{n+1}u_n'}{u_n^2}$, on en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x > 0, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) > 0, \\ \forall x \in]-n_0, 0[\,, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) < 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour $n \geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$. ∎

Lemme 6.3 *Pour tout réel x la suite $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ est à valeurs strictement positives et pour tout entier $n_0 \geq 1$, tout réel non nul x dans $]-n_0, +\infty[$, la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est strictement croissante.*

Proof. Par définition de n_x, on a $u_n(x) > 0$ pour tout réel x et tout entier $n \geq n_x$.

Pour x non nul dans $]-n_0, +\infty[$ le lemme précédent nous dit que :

$$\forall n \geq n_0, \ \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > \frac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)} = 1,$$

c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est strictement croissante. ∎

Remarque 6.1 *La croissance de la suite $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ peut aussi se montrer directement en utilisant l'inégalité de Bernoulli à savoir : $(1-a)^n > 1 - na$ pour $a < 1$ non nul.*

Pour $n \geq n_x$ *on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + x + n}{1 + x + n + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n^2 + (1+x)n + x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pour $x < 0$, *on a* $\frac{x}{(n+1)(n+x)} < 0$ *et pour* $x > 0$, $\frac{x}{(n+1)(n+x)} < 1$ *(c'est équivalent à* $n^2 + (1+x)n > 0$*), on peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :*

$$\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} > 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}$$

et donc :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{x}{n}\right) \frac{n}{n+x} = 1$$

Théorème 6.2 *Pour tout réel* x, *la suite* $(u_n(x))_{n \geq 1}$ *converge vers un réel* $f(x)$.
De plus on a $f(0) = 1$, $f(x) > 0$ *et* $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ *pour tout réel* x.

Proof. Pour $x = 0$ on a $u_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(0) = 1 = f(0).$$

Pour $x < 0$, on a $0 < 1 + \frac{x}{n} < 1$ et $0 < u_n(x) < 1$ pour tout $n \geq n_x$, c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ est bornée et comme par ailleurs elle est croissante à partir d'un certain rang n_0, on en déduit qu'elle est convergente. On note $f(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$. De la stricte croissance de $(u_n(x))_{n \geq n_0}$, on déduit que $f(x) > u_{n_0}(x) > 0$.

Enfin pour $x > 0$, on a :

$$u_n(x) = \frac{u_n(x)\, u_n(-x)}{u_n(-x)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{f(-x)}$$

(lemme 6.1), soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ■

Remarque 6.3 *De $f(x) f(-x) = 1$ pour tout réel x, on déduit que f n'est pas une fonction polynomiale. En effet si f est polynomiale de degré $n \geq 0$ (f n'est pas nulle), alors $f(x) f(-x)$ est polynomiale de degré $2n$ et constante, on a donc $n = 0$ et f est constante, ce qui est incompatible avec l'inégalité $f(x) > u_1(x) = 1 + x$ pour $x > 0$.*

Remarque 6.4 *Avec :*

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n(-x)},$$

on déduit que $f(x)$ est aussi limite de la suite $(v_n(x))_{n\geq n_{-x}}$ définie par :

$$\forall n \geq n_{-x},\ v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Pour x non nul, il existe un entier n_0 tel que $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante, $(v_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante et en conséquence :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n(x) < f(x) < v_n(x).$$

Lemme 6.4 *Pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$, on a :*

$$1 + x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Proof. Pour $n_0 = 1$ et $x \in \left]-1, +\infty\right[$ on a vu précédemment que la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ est strictement croissante et donc $u_1(x) = 1 + x \leq f(x)$.

Pour $x \in \left]-1, 1\right[$, $-x$ est aussi dans $\left]-1, 1\right[$ et on a $u_1(-x) = 1 - x \leq f(-x)$, ce qui donne $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$. ■

Lemme 6.5 *La fonction f est continue en* 0.

Proof. Du lemme précédent on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui signifie que f est continue en 0. ■

Lemme 6.6 *Pour tout suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel x, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = f(x)$.

Proof. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(x_n) = \frac{u_n(x_n)\, u_n(-x)}{u_n(-x)}$$

avec :

$$u_n(x_n)\, u_n(-x) = \left(\left(1+\frac{x_n}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = u_n(\varepsilon_n)$$

où :

$$\varepsilon_n = x_n - x - \frac{x x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Pour n assez grand, on a $\varepsilon_n \in \left]-1,+\infty\right[$ de sorte que la suite $(u_m(\varepsilon_n))_{m\geq 1}$ est croissante et donc :

$$u_1(\varepsilon_n) = 1 + \varepsilon_n \leq u_n(\varepsilon_n) \leq f(\varepsilon_n)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(\varepsilon_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\varepsilon_n) = 1$ (continuité de f en 0), ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = 1$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\, u_n(-x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$.

■

Théorème 6.5 *Pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ on a $f(x+y) = f(x) f(y)$.*

Proof. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x)\, u_n(y) = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x + y + \dfrac{xy}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} x + y$. On déduit alors du lemme précédent que :

$$f(x) f(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = f(x+y).$$

■

Corollaire 6.5.1 *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*

Proof. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ on a :

$$f(y) - f(x) = f(x+y-x) - f(x) = f(x)\,(f(y-x)-1) \underset{y\to x}{\to} 0$$

en utilisant la continuité en 0 de f. ■

Remarque 6.6 *La continuité de f peut aussi se montrer en utilisant le fait que f est convexe. En effet pour tout $n_0 \geq 1$ et tout $n \geq n_0$ la fonction u_n est convexe sur $]-n_0, +\infty[$ (sa dérivée seconde est positive sur cet intervalle), donc $f = \lim_{n \to +\infty} u_n$ est aussi convexe sur cet intervalle. Comme n_0 est quelconque, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$. Sachant qu'une fonction convexe sur un intervalle est continue sur l'intérieur, on déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

En utilisant le lemme de Dini, on peut montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact $[a, b]$.

Théorème 6.7 *Si $I = [a, b]$ est un intervalle réel compact, alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.*

Proof. On peut trouver un entier n_0 tel que $I = [a, b]$ soit contenu dans $]-n_0, +\infty[$ et pour tout x dans I la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est croissante. En se restreignant à I, on a donc une suite croissante $(u_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue f, le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme sur I. ■

Remarque 6.8 *Sachant qu'une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales est nécessairement polynomiale (exercice classique), on en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ne peut converger uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f puisque cette dernière n'est pas polynomiale.*

Théorème 6.9 *La fonction f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

Proof. Avec le lemme 6.4 on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

et donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$, ce qui signifie que f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. Puis avec :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - 1}{h}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, on déduit que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en x avec $f'(x) = f(x)$. Comme $f(0) = 1$, la fonction f est bien solution du problème de Cauchy.

Si y est une autre solution, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x) f(-x)$ est telle que $z' = 0$ avec $z(0) = 0$, c'est donc la fonction nulle et nécessairement $y(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$ pour tout réel x. ■

De ce résultat on déduit que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)} = f$ pour tout entier naturel n.

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction f, on déduit facilement par récurrence que, pour tout réel non nul a, on a $f(n \cdot a) = (f(a))^n$ pour tout entier naturel n, puis avec $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, on déduit que cette relation est valable pour tout entier relatif n. Si $r = \dfrac{p}{q}$ est un entier relatif, on a alors $f(r) = f\left(p\dfrac{1}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{q}\right)\right)^p$ et avec $f(1) = f\left(q\dfrac{1}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{q}\right)\right)^q$, on déduit que $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = (f(1))^{\frac{1}{q}}$ et $f(r) = (f(1))^{\frac{p}{q}} = (f(1))^r$.

En notant $e = f(1)$, on a donc $f(r) = e^r$ pour tout rationnel r, ce qui nous conduit à noter $f(x) = e^x$ pour tout réel x et la fonction ainsi définie est appelée fonction exponentielle réelle. On la note aussi $f(x) = \exp(x)$.

6.3.3 La suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Si y est solution du problème (6.4), elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $y^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel non nul x, la formule de Taylor à l'ordre n nous donne alors :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\theta x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y(\theta x)$$

avec $\theta \in]0, 1[$. Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on en déduit alors que $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, c'est-à-dire que y est limite de la suite de fonctions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Le lien entre cette suite et la suite $\left(\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ peut être précisé comme suit.

Lemme 6.7 *Pour tous $x > 0$ et n, p dans $\mathbb{N}^*$ on a :*

$$u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n+p}(x).$$

Proof. Avec

$$C_n^k = 0 \text{ et } \frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \leq \frac{1}{k!}$$

pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $u_n(x) \leq w_n(x)$ et avec

$$C_{n+p}^0 = 1,\ C_{n+p}^k = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n+p-j) > \frac{1}{k!}$$

pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $w_n(x) \leq u_{n+p}(x)$. ■

En particulier, pour $p = n^2$, on a :

$$u_{n+n^2}(x) < \left(1+\frac{x}{n^2}\right)^{n^2}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = u_{n^2}(x)\,u_n\left(\frac{x}{n}\right)$$

et de $u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n^2}(x)\,u_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(x) = e^x$ (on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\left(\dfrac{x}{n}\right) = e^0 = 1$), c'est-à-dire que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ pour tout réel $x > 0$, ce résultat étant encore vrai pour $x = 0$.

Si on se place maintenant sur une algèbre de Banach E, on a pour tout $z \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|w_n(z) - u_n(z)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)z^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)\|z\|^k \\ &\leq w_n(\|z\|) - u_n(\|z\|) \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

et donc $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}z^n$ pour tout $z \in E$ (ce qui montre au passage, en prenant $E = \mathbb{R}$, que ce résultat est vrai pour les réels négatifs).

6.3.4 Une définition du logarithme

Si on veut définir la fonction logarithme comme réciproque de l'exponentielle à partir d'une suite de fonctions, on part de l'équation $y = u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ où $y > 0$ et $n \geq 1$ sont donnés. Une solution de cette équation est $x = n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right)$.

On est donc ainsi amené à considérer la suite de fonctions $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ w_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),$$

la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ étant la fonction réciproque sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de la fonction $x \mapsto x^n$. On rappelle que cette fonction est indéfiniment dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Le résultat suivant nous sera utile.

Lemme 6.8 *Pour tout réel $x > 0$, on a* $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Proof. Avec $\sqrt[n]{1} = 1$ et $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, il suffit de montrer le résultat pour $x > 1$. Dans ce cas la suite $\left(\sqrt[n]{x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ($\sqrt[n+1]{x} < \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x < x^{\frac{n+1}{n}} = x\sqrt[n]{x}$ encore équivalent à $\sqrt[n]{x} > 1$) et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$, pour $\lambda \in]1, \ell[$ il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{x} > \lambda$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $x > \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim_{n \to +\infty} \lambda^n = +\infty$. ■

Théorème 6.10 *Pour tout réel $x > 0$ la suite $(w_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell(x)$ tel que $\ell(1) = 0$, $\ell(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\ell(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$.*

Proof. Pour $x = 1$, la suite est stationnaire sur 0.

En notant $\alpha_n(x) = w_n(x) - w_{n+1}(x)$, on définit une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \alpha_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - x^{\frac{1}{n+1}-1} = x^{-\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

La fonction α_n est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$, strictement croissante sur $]1, \infty[$ avec $\alpha_n(1) = 0$, il en résulte que $\alpha_n(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$.

La suite $(w_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante minorée par 0 pour tout $x > 1$, elle converge donc vers un réel $\ell(x) \geq 0$.

Si $x \in]0, 1[$, il s'écrit $x = \frac{1}{y}$ avec $y > 1$ et :

$$w_n(x) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{y}} - 1\right) = -\frac{w_n(y)}{\sqrt[n]{y}} \underset{n \to +\infty}{\to} \ell(x) = -\ell(y) \leq 0.$$

Pour tout $x \in]0, 1[$ la suite $(w_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant strictement décroissante à valeurs strictement négatives on a $\ell(x) < w_1(x) < 0$ et $\ell(t) = -\ell\left(\frac{1}{t}\right) > 0$ pour $t > 1$. ■

On définit donc une fonction ℓ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \ell(x) = \lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right).$$

Théorème 6.11 *La fonction ℓ est solution sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de l'équation fonctionnelle $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$.*

Proof. Pour x, y dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} w_n(xy) &= n\left(\sqrt[n]{xy} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\sqrt[n]{y} + n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right) \\ &= w_n(x)\sqrt[n]{y} + w_n(y) \end{aligned}$$

et en passant à la limite on a le résultat. ∎

On retrouve $\ell(1) = 0$ et $\ell\left(\frac{1}{x}\right) = -\ell(x)$.

Corollaire 6.11.1 *Pour tout réel x strictement positif et tout nombre rationnel r, on a $\ell(x^r) = r\ell(x)$.*

Proof. Avec l'équation fonctionnelle, on montre facilement par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ell(x^p) = p\ell(x).$$

En écrivant, pour tout entier $p \geq 1$, que $\ell(x) = \ell\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)$, on déduit que $\ell\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p}\ell(x)$ et il en résulte que pour tout rationnel positif $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\ell(x^r) = \ell\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p\ell\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q}\ell(x) = r\ell(x).$$

Enfin avec $\ell\left(\frac{1}{x}\right) = -\ell(x)$, on déduit que le résultat précédent est encore valable pour tout rationnel négatif. ∎

Lemme 6.9 *La fonction ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Proof. La croissance de ℓ résulte immédiatement de celle des w_n.

On peut aussi écrire pour $0 < x < y$ que :

$$0 < \ell\left(y\frac{1}{x}\right) = \ell(y) - \ell(x),$$

ce qui donne la stricte croissance. ∎

Lemme 6.10 *La fonction ℓ est continue en* 1.

Proof. Avec $0 < \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{n}\ell(2)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = 0$ et avec $\ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) = -\dfrac{1}{n}\ell(2) < 0$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut donc trouver un entier n_0 tel que $-\varepsilon < \ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) < \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Pour tout x dans le voisinage ouvert de 1, $I_\varepsilon = \left]2^{-\frac{1}{n_0}}, 2^{\frac{1}{n_0}}\right[$, on a du fait de la croissance de ℓ :

$$-\varepsilon < \ell\left(2^{-\frac{1}{n_0}}\right) < \ell(x) < \ell\left(2^{\frac{1}{n_0}}\right) < \varepsilon.$$

On a donc ainsi montré que ℓ est continue en 1 (on a $\ell(1) = 0$). ■

Théorème 6.12 *La fonction ℓ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Proof. Résulte de $\ell(x) - \ell(x_0) = \ell\left(\dfrac{x}{x_0}\right) - \ell(1)$. ■

Théorème 6.13 *La fonction ℓ est concave sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Proof. Résulte de la concavité des w_n. ■

On retrouve ainsi la continuité de ℓ. On peut en fait montrer très simplement, sans les considérations précédentes (excepté le lemme 6.8), que la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^{+,*}$ vers une fonction dérivable de dérivée égale à $1/x$.

Théorème 6.14 *La suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge sur $\mathbb{R}^{+,*}$ vers la primitive nulle en 1 de la fonction $x \mapsto 1/x$.*

Proof. Chaque fonction w_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et pour tout réel $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} w_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{x} = \dfrac{1}{x}$. De plus pour tout $R > 1$ et tout $x \in [1/R, R]$, on a :

$$\left| w_n'(x) - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} \left| \sqrt[n]{x} - 1 \right| \leq R(\sqrt[n]{R} - 1)$$

avec $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{R} - 1) = 0$, ce qui signifie que la suite $(w_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $1/x$ sur $[1/R, R]$. Comme de plus la suite $(w_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, on en déduit que la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[1/R, R]$ vers une fonction dérivable ℓ de dérivée égale à $1/x$. On a donc $\ell(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ pour tout $x \in [1/R, R]$. Ce résultat étant valable pour tout $R > 1$, il est vrai sur $\mathbb{R}^{+,*}$. ■

On retrouve donc ainsi la définition classique du logarithme et ses propriétés usuelles s'en déduisent.

6.3.5 Sur l'inégalité de Bernoulli

L'inégalité de Bernoulli peut aussi se déduire de celle de Cauchy en écrivant pour $a > -1$, $a \neq 0$:

$$1 + a = A_n (1, 1, \dots, 1 + na) > G_n (1, 1, \dots, 1 + na) = (1 + na)^{\frac{1}{n}}.$$

Plus généralement on a l'inégalité :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in (]-1, 0[)^n \cup (]0, +\infty[)^n$. En posant $x_k = 1 + a_k$, $D_n = (]0, 1[)^n \cup (]1, +\infty[)^n$, il s'agit de montrer que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in D_n,\ P_n (x) = \prod_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k + n - 1 > 0.$$

Avec $P_2 (x) = (x_1 - 1) (x_2 - 1) > 0$ pour tout $x \in D_2$ et :

$$P_{n+1} (x, x_{n+1}) = (x_{n+1} - 1) \left(\prod_{k=1}^{n} x_k - 1 \right) + P_n (x) > P_n (x)$$

pour tout $(x, x_{n+1}) \in D_{n+1}$ le résultat se déduit par récurrence sur $n \geq 2$.

6.3.6 Sur l'inégalité de Cauchy

Démonstration par récurrence

La démonstration de Cauchy peut se faire de manière plus rapide comme suit.

Pour $n = 2$, on a :

$$G_2^2 (x) = x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 = A_2^2 (x)$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x_1 = x_2$.

Pour $n = 2^p$ avec $p \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} G_{2^p}^{2^p} (x) &= \prod_{k=1}^{2^{p-1}} x_{2k-1} x_{2k} = \prod_{k=1}^{2^{p-1}} \left(\left(\frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_{2k-1} - x_{2k}}{2} \right)^2 \right) \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^{2^{p-1}} \left(\frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2} \right) \right)^2 = G_{2^{p-1}}^{2^p} (y) \end{aligned}$$

en posant $y_k = \dfrac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}$ pour tout k compris entre 1 et 2^{p-1}. En supposant que $G_{2^{p-1}}(y) \leq A_{2^{p-1}}(y)$, on obtient $G_{2^p}^{2^p}(x) \leq A_{2^{p-1}}^{2^p}(y)$ avec :

$$A_{2^{p-1}}(y) = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2} = A_{2^p}(x).$$

L'égalité $G_{2^p}(x) = A_{2^p}(x)$ équivaut à $x_{2k-1} = x_{2k}$ pour tout k compris entre 1 et 2^{p-1} et $G_{2^{p-1}}(y) = A_{2^{p-1}}(y)$, ce qui équivaut à dire que tous les y_k et donc tous les x_k sont égaux.
Ensuite pour n quelconque on peut trouver p tel que $n \leq 2^p$ et en définissant $y = (y_k)_{1 \leq k \leq 2^p}$ par $y_k = x_k$ si $1 \leq k \leq n$ et $y_k = A_n(x)$ si $k + 1 \leq k \leq 2^p$, de $G_{2^p}(y) \leq A_{2^p}(y)$, on déduit que :

$$G_n(x) = (G_n(x))^{\frac{n}{2^p}} (A_n(x))^{\frac{2^p - n}{2^p}} \leq \frac{n}{2^p} A_n(x) + \frac{2^p - n}{2^p} A_n(x) = A_n(x),$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les y_k, et donc tous les x_k, sont égaux.

Moyenne harmonique

En notant $H_n(x) = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}$ la moyenne harmonique des réels $x_i > 0$, on a $H_n(x) = \dfrac{1}{A_n(y)}$ où $y = \left(\dfrac{1}{x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ et de ce qui précède, on déduit que :

$$H_n(x) \leq G_n(x) \leq A_n(x)$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les x_i sont égaux.

En effet, on a :

$$H_n(x) = \frac{1}{A_n(y)} \leq \frac{1}{G_n(y)} = G_n(x) \leq A_n(x).$$

6.3.7 Généralisation de l'inégalité de Cauchy

De manière plus générale, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$, on définit les moyennes arithmétiques et géométriques par :

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k, \ G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{r_k}$$

où $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$ est tel que $\sum_{k=1}^{n} r_k = 1$. Bien entendu, la définition de G_n utilise le logarithme (naturellement définie comme primitive de $\frac{1}{x}$ nulle en 1) et l'exponentielle (inverse du logarithme). On a alors $G_n(x) \leq A_n(x)$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les x_i sont égaux.

Démonstration utilisant la concavité du logarithme

Une première démonstration (classique) peut se faire en utilisant la concavité de la fonction ln qui permet d'écrire :

$$\ln(G_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} r_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right) = \ln(A_n(x)),$$

ce qui équivaut, du fait de la croissance de la fonction exp, à $G_n(x) \leq A_n(x)$.

Démonstration par récurrence

On peut aussi procéder par récurrence comme suit.

Pour $n = 2$, on se donne $0 < x_1 < x_2$, $r_1 \in]0,1[$ et $r_2 = 1 - r_1$. Il s'agit alors de montrer l'inégalité $x_1^{r_1} x_2^{1-r_1} < r_1 x_1 + (1 - r_1) x_2$ qui est équivalente à $x_2^{1-r_1} - x_1^{1-r_1} < (1 - r_1)(x_2 - x_1) x_1^{-r_1}$. Le théorème des accroissements finis nous permet d'écrire que $x_2^{1-r_1} - x_1^{1-r_1} = (1 - r_1)(x_2 - x_1) x_3^{-r_1}$ avec $x_3 \in]x_1, x_2[$, ce qui donne le résultat ($x_1 < x_3 \Rightarrow x_1^{r_1} < x_3^{r_1}$). On a donc bien $G_2(x) < A_2(x)$ pour $x_1 \neq x_2$, l'égalité étant évidemment réalisée pour $x_1 = x_2$. Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 2$ et soit $r = (r_1, \ldots, r_{n+1})$ dans $(\mathbb{R}^{+,*})^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} r_k = 1$. Posons $s = \sum_{k=1}^{n} r_k$ et $r' = \frac{1}{s}(r_1, \ldots, r_n)$. On a $r' \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$ avec $\sum_{k=1}^{n} r'_k = 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in (\mathbb{R}^{+,*})^{n+1}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{r'_k}\right)^s x_{n+1}^{r_{n+1}} \leq s \prod_{k=1}^{n} x_k^{r'_k} + r_{n+1} x_{n+1} \\
&\leq s \sum_{k=1}^{n} r'_k x_k + r_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} r_k x_k,
\end{aligned}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il y a égalité pour le cas 2, ce qui équivaut à $\prod_{k=1}^{n} x_k^{r'_k} = x_{n+1}$ et égalité pour le cas n, ce qui équivaut à dire que tous les x_k sont égaux pour k compris entre 1 et n (hypothèse de récurrence), tous les x_k pour k compris entre 1 et $n+1$ sont donc égaux.

Une autre démonstration

Une autre démonstration (moins classique) est la suivante.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

Si $m = \min\limits_{1\leq k\leq} x_k$ et $M = \max\limits_{1\leq k\leq n} x_k$, on a $m = \prod\limits_{k=1}^{n} m^{r_k} \leq \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{r_k} \leq \prod\limits_{k=1}^{n} M^{r_k} = M$, il existe donc un entier k tel que $x_k \leq G_n(x) \leq x_{k+1}$. On a alors :

$$S = \sum_{j=1}^{k} r_j \int_{x_j}^{G_n(x)} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G_n(x)}\right) dt + \sum_{j=k+1}^{n} r_j \int_{G_n(x)}^{x_j} \left(\frac{1}{G_n(x)} - \frac{1}{t}\right) dt \geq 0,$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \int_{x_j}^{G_n(x)} \frac{1}{t} dt \geq \sum_{j=1}^{n} r_j \int_{x_j}^{G_n(x)} \frac{1}{G_n(x)} dt$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \left(\ln(G_n(x)) - \ln(x_j)\right) \geq \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{G_n(x) - x_j}{G_n(x)}$$

avec :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \frac{G_n(x) - x_j}{G_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} r_j - \frac{1}{G_n(x)} \sum_{j=1}^{n} r_j x_j = 1 - \frac{A_n(x)}{G_n(x)}$$

et :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \left(\ln(G_n(x)) - \ln(x_j)\right) = \ln(G_n(x)) - \ln\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{r_j}\right) = 0.$$

On a donc bien $G_n(x) \leq A_n(x)$.

L'égalité est réalisée si, et seulement si, $S = 0$, ce qui équivaut à dire que, pour tout j compris entre 1 et n, on a $\int_{x_j}^{G_n(x)} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G_n(x)}\right) dt = 0$ encore équivalent à $x_j = G_n(x)$.

Cette preuve provient de [2].

Démonstration par densité

On peut aussi procéder par densité comme suit.

À partir de l'inégalité $A'_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq G'_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$, on déduit que pour tout $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{Q}^{+,*})^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} r_k = 1$, on a :

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \geq G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{r_k}.$$

Il suffit en effet d'écrire après réduction au même dénominateur, pour tout k compris entre 1 et n, $r_k = \frac{p_k}{m}$ avec p_k, m dans $\mathbb{N}^*$ et de remarquer, en tenant compte de $\sum_{k=1}^{n} p_k = m$, que $A_n(x) = A'_m(y)$, $G_n(x) = G'_m(y)$ où y est tel que ses n_1 premières composantes sont toutes égales à x_1, les n_2 suivantes égales à x_2 et ainsi de suite.

Ensuite pour tout $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} r_k = 1$ on peut trouver une suite $\left(s^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(\mathbb{Q}^{+,*})^n$ qui converge vers r. On a alors $\lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} r_k = 1$ et la suite $\left(r^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} s_k^{(j)}} s^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $(\mathbb{Q}^{+,*})^n$ telle que $\sum_{k=1}^{n} r_k^{(j)} = 1$ pour tout entier j et qui converge vers r. Un passage à la limite nous donne alors l'inégalité souhaitée.

Cette méthode ne fournit que l'inégalité large.

Chapitre 7

CAPES externe 2005, épreuve 1

7.1 Énoncé

Notations et objet du problème

On désigne par :

$\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels ;*

$\mathbb{Z}$ *l'anneau des entiers relatifs ;*

$\mathbb{Q}$ *le corps des nombres rationnels ;*

$\mathbb{Q}^*$ *l'ensemble des nombres rationnels non nuls ;*

$\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels ;*

$\mathbb{R}^*$ [resp. $\mathbb{R}_+^*$] *l'ensemble des réels non nuls [resp. strictement positifs] ;*

$\mathbb{C}$ *le corps des nombres complexes ;*

$\mathbb{C}^*$ *l'ensemble des nombres complexes non nuls ;*

$\mathbb{Z}[x]$ *l'anneau des fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs.*

Pour tout entier naturel n, on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.

Si f est une fonction indéfiniment dérivable définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et k est un entier naturel non nul, on note $f^{(k)}$ la fonction dérivée d'ordre k de f. On utilise la convention habituelle, $f^{(0)} = f$.

Si I est un intervalle réel non réduit à un point et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}^*$, on rappelle que la dérivée logarithmique de f est la fonction $\dfrac{f'}{f}$.

La première partie de ce problème est consacrée à la démonstration de quelques résultats utiles pour la suite.

Dans la deuxième partie, à partir d'une caractérisation des sous groupes additifs de $\mathbb{R}$ (ils sont denses ou discrets), on déduit un critère d'irrationalité et on décrit une méthode permettant de prouver qu'un réel est irrationnel.

Cette méthode est utilisée dans la troisième partie pour montrer l'irrationalité de e^r pour tout nombre rationnel non nul r. Ce procédé permet également d'obtenir des approximations rationnelles de la fonction exponentielle.

Dans la quatrième partie on s'intéresse aux racines réelles des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants et en particuliers aux racines réelles des fonctions de Bessel d'indice entier.

Enfin dans la cinquième partie, on montre que les racines réelles non nulles des fonctions de Bessel d'indice entier sont irrationnelles en utilisant une méthode voisine de celle décrite dans la deuxième partie.

On rappelle la formule d'intégration par parties itérée : si a, b sont des réels tels que $a < b$, n un entier naturel non nul et f, g des fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles et admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n, alors :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\, g(t)\, dt = \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f^{(n-k)} g^{(k-1)}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t)\, g^{(n)}(t)\, dt.$$

– I – Résultats préliminaires

Pour cette partie, on désigne par p un entier naturel, par P une fonction polynomiale dans $\mathbb{Z}[x]$ non identiquement nulle, de degré p, et par n un entier naturel.

1. Soit Q la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \frac{x^n}{n!} P(x).$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $Q^{(k)}(0)$ est un entier relatif.

   (b) Montrer que pour tout entier k compris entre 0 et p, $\dfrac{Q^{(n+k)}(0)}{k!}$ est un entier relatif.

2. Soit R la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \frac{1}{n!}\left(x(1-x)P(x)\right)^n.$$

(a) Montrer que pour tout entier naturel k les quantités $R^{(k)}(0)$ et $R^{(k)}(1)$ sont des entiers relatifs.

(b) Montrer que la fonction polynomiale U définie par $U = R^{(n)}$ appartient à $\mathbb{Z}[x]$.

3. En reprenant les notations de **I.2**, où P dans $\mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ est de degré p, montrer que pour toute fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a :
$$\int_0^1 f(t)\, R^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t)\, R(t)\, dt.$$

– II – Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et critères d'irrationalité

On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbb{R}, +)$ est discret si pour tout compact K de $\mathbb{R}$, l'intersection $H \cap K$ est vide ou finie.

Pour tout réel θ, on note $H_\theta = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et θ. Il est défini par :
$$H_\theta = \left\{ p + q\theta \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

1. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont de la forme :
$$\alpha\mathbb{Z} = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\},$$
où α est un réel.

2. Soient H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et $K = H \cap \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que K admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que si α est strictement positif, alors α est dans K.

(c) Montrer que si α est strictement positif, alors H est discret.

(d) Montrer que si α est nul, alors H est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $H_\theta = \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n\theta - p_n \neq 0, \tag{7.1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0. \tag{7.2}$$

5. Montrer l'irrationalité du nombre $e = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$ en utilisant le résultat de la question **II.4.**

6. Pour cette question, on se donne un entier naturel p, une fonction polynomiale P dans $\mathbb{Z}[x]$ de degré p ne s'annulant pas sur $]0,1[$ et on lui associe les suites de fonctions polynomiales $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} U_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left(x(1-x)P(x)\right)^n, \\ L_n(x) = U_n^{(n)}(x). \end{cases}$$

On se donne également une fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on lui associe la suite de réels $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \int_0^1 f(t)\, L_n(t)\, dt.$$

(a) On suppose que la fonction f vérifie l'hypothèse suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1[,\quad f^{(n)}(t) \neq 0. \tag{H1}$$

Montrer alors que R_n est non nul pour tout entier naturel n.

(b) On suppose que la fonction f vérifie l'hypothèse $(H2)$ suivante : il existe un réel $\rho > 0$ tel que la suite $\left(\dfrac{\int_0^1 \left|f^{(n)}(t)\right| dt}{\rho^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Montrer que pour tout réel μ la suite $(\mu^n R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

(c) On suppose que la fonction f vérifie les hypothèses $(H1)$, $(H2)$ et l'hypothèse suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \frac{q_n\theta - p_n}{\alpha\lambda^n} \tag{H3}$$

où α, λ, θ sont des réels non nuls et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers relatifs.

Montrer alors que le réel θ est irrationnel.

– III – Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$

Pour cette partie, on désigne par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites de fonctions définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} U_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}, \\ L_n(x) = U_n^{(n)}(x) \end{cases}$$

et par $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = \int_0^1 e^{xt} L_n(t)\,dt.$$

1.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x non nul, $R_n(x)$ est non nul.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n il existe un unique couple (P_n, Q_n) de fonctions polynomiales appartenant à $\mathbb{Z}[x]$ de degré égal à n tel que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ R_n(x) = \frac{Q_n(x)\,e^x - P_n(x)}{x^{n+1}}.$$

   (c) Montrer que pour tout réel x on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x^n R_n(x)) = 0$.

   (d) Montrer que pour tout entier relatif non nul r, e^r est irrationnel.

2. Montrer que pour tout nombre rationnel non nul r, e^r est irrationnel.
3. Montrer que pour tout nombre rationnel r strictement positif et différent de 1, $\ln(r)$ est irrationnel.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $Q_n(0) \neq 0$ et que les parties régulières d'ordre $2n$ des développements limités au voisinage de 0 de e^x et $\dfrac{P_n}{Q_n}$ sont identiques (on peut utiliser **I.3**).
5. Montrer que pour tout réel x, $Q_{2n}(x)$ est non nul et :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = e^x.$$

6. Pour cette question, $n \in \{1, 2\}$.

(a) Calculer $\dfrac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$ pour ces deux valeurs de n.

(b) En déduire des approximations rationnelles du nombre e en précisant une majoration de l'erreur d'approximation.

– IV – Zéros des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

1. Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel compact avec $a < b$, α, β deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et f une solution sur I non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0.$$

Montrer que l'ensemble des zéros dans I de la fonction f est fini.

2. Soient I un intervalle réel non réduit à un point et f, g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que f et g ont même dérivée logarithmique sur I si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

3. Soient I un intervalle réel non réduit à un point, a un réel dans I, f une fonction continûment dérivable de I dans $\mathbb{C}^*$ et θ_0 un réel tel que $f(a) = |f(a)| e^{i\theta_0}$. Montrer qu'il existe une unique fonction θ continûment dérivable de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\theta(a) = \theta_0$ et $f(x) = |f(x)| e^{i\theta(x)}$ pour tout x dans I.

4. Pour cette question, α est une fonction continue de $I = [a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$, où a est un réel, et f une solution sur I, à valeurs réelles, non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha y = 0. \tag{7.3}$$

On désigne par r la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ r(x) = \sqrt{(f(x))^2 + (f'(x))^2}.$$

(a) Montrer que la fonction r est à valeurs strictement positives et continûment dérivable sur I.

(b) Montrer qu'il existe une fonction θ continûment dérivable et strictement décroissante de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I,\ \begin{cases} f(x) = r(x)\cos(\theta(x)), \\ f'(x) = r(x)\sin(\theta(x)). \end{cases}$$

(c) On suppose pour cette question et la suivante que la fonction α est minorée sur I par une constante réelle λ strictement positive. Montrer que la fonction θ réalise une bijection de I sur $]-\infty, \theta(a)]$.

(d) Montrer que l'ensemble des zéros de la fonction f dans l'intervalle I forme une suite infinie strictement croissante de réels qui tend vers l'infini.

5. Pour cette question p désigne un entier naturel et on s'intéresse aux zéros d'une solution non identiquement nulle de l'équation de Bessel d'indice p :

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right) y = 0. \tag{7.4}$$

(a) Soit f une solution réelle non identiquement nulle sur $I = \mathbb{R}_+^*$ de (7.4) et g la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \sqrt{x} f(x).$$

Montrer que g est solution sur I d'une équation différentielle de la forme (7.3) où la fonction α est à déterminer.

(b) Montrer que la série entière de terme général $\dfrac{1}{k!\,(p+k)!} x^k$, où k est un entier naturel, a un rayon de convergence infini et que la fonction J_p définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p I_p\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right),$$

où on a noté pour tout réel x :

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(p+k)!} x^k,$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (7.4).

(c) Montrer que l'ensemble des zéros dans $\mathbb{R}^+$ de la fonction J_p forme une suite de réels qui est strictement croissante à partir d'un certain rang et qui tend vers l'infini.

– V – Irrationalité des zéros des fonctions de Bessel d'indice entier

Pour cette partie, p est un entier naturel fixé et les fonctions I_p et J_p sont celles définies en **IV.5b.**

1.

(a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{d}{dx}\left(x^{p+r} I_p'(x)\right) = x^{p+r-1}\left(I_p(x) + (r-1) I_p'(x)\right).$$

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x t^p I_p(t)\, dt = x^{p+1} I_p'(x).$$

(c) Montrer que pour tout entier naturel non nul r, il existe deux fonctions polynomiales A_r et B_r appartenant à $\mathbb{Z}[x]$, de degrés respectifs $r-1$ et r telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x t^{p+r} I_p(t)\, dt = x^{p+1}\left(A_r(x) I_p(x) + B_r(x) I_p'(x)\right).$$

(d) Préciser les valeurs de $A_r(0)$ et $B_r(0)$ pour tout entier naturel non nul r.

(e) Montrer que si x est une racine réelle de la fonctions I_p alors x est strictement négatif et n'est pas racine de I_p'.

On désigne par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de fonctions polynomiales définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} U_n(x) = \dfrac{x^{n+p}(1-x)^n}{n!}, \\ L_n(x) = U_n^{(n)}(x) \end{cases}$$

et par $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = \int_0^1 I_p(xt) L_n(t)\, dt.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n appartenant à $\mathbb{Z}[x]$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ R_n(x) = \frac{P_n(x) I_p(x) + Q_n(x) I_p'(x)}{x^n},$$

avec $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, P_n est de degré inférieur ou égal à $n-1$, Q_n de degré inférieur ou égal à n, les valeurs $P_n(0)$ et $Q_n(0)$ étant non nulles.

3. Pour tout entier naturel n on désigne par φ_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \int_0^1 I_p^{(n)}(xt)\, U_n(t)\, dt.$$

   (a) Montrer que φ_n est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi_n(0)$ est non nul.

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x)\, I_p(x) + Q_n(x)\, I_p'(x) = (-1)^n x^{2n} \varphi_n(x).$$

   (c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{n!}.$$

   (d) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(P_n(x)\, I_p(x) + Q_n(x)\, I_p'(x)\right) = 0.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe une constante non nulle c_n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n-1}(x)\, Q_n(x) - P_n(x)\, Q_{n-1}(x) = c_n x^{2n-2}.$$

5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul x l'une des deux quantités $R_n(x)$ ou $R_{n-1}(x)$ est non nulle.

6. Montrer que les racines réelles de la fonction I_p sont toutes irrationnelles.

7. Montrer que si α est une racine réelle non nulle de la fonction de Bessel J_p, alors α^2 est irrationnel.

7.2 Corrigé

– I – Résultats préliminaires

1.

   (a) Le polynôme Q est de degré $n + p$, donc $Q^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier k strictement supérieur à $n + p$.
   Du fait que 0 est racine de multiplicité supérieure ou égale à n de Q, on déduit que $Q^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier k compris entre 0 et $n - 1$ (si $n > 0$).

Si $P(x)=\sum\limits_{j=0}^{p}a_jx^j$, les coefficients a_j, pour j compris entre 0 et p, étant entiers relatifs, alors :

$$Q(x)=\sum_{k=n}^{n+p}\frac{a_{k-n}}{n!}x^k=\sum_{k=n}^{n+p}\frac{Q^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

et pour k compris entre n et $n+p$ on a :

$$Q^{(k)}(0)=a_{k-n}\frac{k!}{n!}\in\mathbb{Z}.$$

(b) Pour k compris entre 0 et p, on a :

$$Q^{(n+k)}(0)=a_k\frac{(n+k)!}{n!}=a_kC_{n+k}^{n}k!$$

et donc $\dfrac{Q^{(n+k)}(0)}{k!}=a_kC_{n+k}^{n}\in\mathbb{Z}$.

2.

(a) Avec **I.1a**, on déduit que les $R^{(k)}(0)$ sont des entiers relatifs pour tout $k\in\mathbb{N}$ et avec

$$R_1(x)=R(1-x)=\frac{x^n}{n!}((1-x)P(1-x))^n$$

on déduit que les $R^{(k)}(1)=(-1)^kR_1^{(k)}(0)$ sont aussi des entiers relatifs.

(b) Le polynôme R est de degré $(p+2)n$, donc $U=R^{(n)}$ est de degré $(p+1)n$ et :

$$U(x)=\sum_{k=0}^{(p+1)n}\frac{U^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{(p+1)n}\frac{R^{(n+k)}(0)}{k!}x^k$$

avec $\dfrac{R^{(n+k)}(0)}{k!}\in\mathbb{Z}$ pour tout k compris entre 0 et $(p+1)n$ qui est le degré de $((1-x)P(x))^n$.

3. En utilisant la formule d'intégration par parties itérée, on a :

$$\int_0^1 f(t)R^{(n)}(t)\,dt=\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}R^{(n-k)}f^{(k-1)}\right]_0^1+(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)R(t)\,dt$$

et tenant compte du fait que 0 et 1 sont racines d'ordre au moins égal à n de R, on déduit que :

$$\int_0^1 f(t)\, R^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(t)\, R(t)\, dt.$$

– II – Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et critères d'irrationalité

1. Il est clair que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ est discret. En effet pour $\alpha = 0$ c'est évident et pour $\alpha \neq 0$ tout compact K de $\mathbb{R}$ est contenu dans un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p vérifiant $a \leq p\alpha \leq b$.
   Réciproquement si H est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel a dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ $(0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H)$ et $]0, a] \cap H$ est fini non vide, il admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$. De $\alpha \in H$ on déduit que $\alpha\mathbb{Z} \subset H$. De plus, pour tout $x \in H$ il existe un entier relatif k tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ $\left(k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$ et avec $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+$ on déduit du caractère minimal de α que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$. On a donc en définitive $H = \alpha\mathbb{Z}$.

2.
   (a) Si H est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ alors $K = H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide (si $a \in H$ alors $-a \in H$) minoré par 0, il admet donc une borne inférieure $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

   (b) Si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in K$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in K$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on suppose que $\alpha \notin H$). Pour la même raison, on peut trouver y dans K tel que $\alpha < y < x$. On a alors $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure α.

   (c) Avec la structure de groupe additif de H, on déduit que si $\alpha > 0$, alors $H = \alpha\mathbb{Z}$. En effet, $\alpha\mathbb{Z} \subset H$ du fait que α appartient au groupe H et pour tout x dans H, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \alpha\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $H \subset \alpha\mathbb{Z}$.

   (d) Si $\alpha = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe z dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$ et pour $n \in \left]\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right[\cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in H$.

3. Il revient au même de montrer que $H_\theta = \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est discret si, et seulement si, θ est rationnel.
   Si H_θ est discret il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $H_\theta = \alpha\mathbb{Z}$ et du fait que 1 et θ sont dans H_θ, on a $1 = p\alpha$, $\theta = q\alpha$ avec p, q dans $\mathbb{Z}^*$ ce qui entraîne $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\theta = q\alpha \in \mathbb{Q}$.
   Si $\theta = \dfrac{p}{q}$ est rationnel avec p et q entiers premiers entre eux dans $\mathbb{Z}$, on a :
   $$H_\theta = \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = (p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z})\,\frac{1}{q}$$
   et le théorème de Bézout nous dit que $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, ce qui donne $H_\theta = \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_θ est discret.
4. Si $\theta \in \mathbb{R}$ est irrationnel alors $H_\theta = \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et 0 est limite d'une suite de points de H_θ, c'est-à-dire qu'il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $q_n\theta - p_n \neq 0$ du fait que $\theta \notin \mathbb{Q}$.
   Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $q_n\theta - p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$. Si $\theta = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs on a alors $q_np - p_nq \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$, donc $|q_np - p_nq| \geq 1$ et :
   $$|q_n\theta - p_n| = \frac{1}{|q|}\,|q_np - p_nq| \geq \frac{1}{|q|},$$
   ce qui est en contradiction avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$. En conclusion $\theta \notin \mathbb{Q}$.
5. On pose :
   $$p_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\ q_n = n!$$
   et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$q_ne - p_n = n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)\cdots(n+k)}\right),$$
   avec :
   $$\forall k \geq 2,\ \frac{1}{(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{1}{k!}.$$
   On déduit donc que :
   $$0 < q_ne - p_n \leq \frac{1}{n+1}e \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$
   et l'irrationalité de e s'en déduit.

6.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a (question **I.3**) :

$$R_n = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t) \frac{(t(1-t)P(t))^n}{n!} dt,$$

la fonction intégrée étant continue et ne s'annulant jamais sur $]0,1[$, il en résulte que $R_n \neq 0$.

(b) En notant :

$$M = \sup_{t \in [0,1]} |t(1-t)P(t)|, \ \beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\int_0^1 \left|f^{(n)}(t)\right| dt}{\rho^n},$$

on a $M > 0$, $\beta > 0$ et :

$$|R_n| \leq \int_0^1 \left|f^{(n)}(t)\right| \frac{(t(1-t)|P(t)|)^n}{n!} dt \leq \beta \frac{(\rho M)^n}{n!},$$

ce qui entraîne :

$$|\mu^n R_n| \leq \beta \frac{(\rho\mu M)^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

(c) On a $q_n\theta - p_n = \alpha\lambda^n R_n \neq 0$ (hypothèses $(H1)$ et $(H3)$) avec $\lim\limits_{n \to +\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$ (hypothèse $(H2)$), ce qui entraîne $\theta \notin \mathbb{Q}$ (question **II.4**).

– III – Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$

On est dans la situation de **II.6** avec $P = 1$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, on note f_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_x(t) = e^{xt}$.

(a) La fonction f_x est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_x^{(n)}(t) = x^n e^{xt} \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. On déduit alors de **II.6a** que $R_n(x) \neq 0$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$x^{n+1} R_n(x) = \int_0^1 f_x^{(n+1)}(t) L_n(t) \, dt$$

et la formule d'intégration par parties itérée donne, en tenant compte de $L_n^{(n+1)} = 0$ (L_n est de degré n) :

$$\begin{aligned} x^{n+1} R_n(x) &= \left[\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} f_x^{(n+1-k)}(t) L_n^{(k-1)}(t) \right]_0^1 \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} e^{xt} L_n^{(k)}(t) \right]_0^1 \\ &= Q_n(x) e^x - P_n(x) \end{aligned}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k L_n^{(k)}(0) x^{n-k}, \\ Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k L_n^{(k)}(1) x^{n-k}. \end{array} \right.$$

On sait déjà depuis **I.2a** que les coefficients $L_n^{(k)}(0) = U_n^{(n+k)}(0)$ et $L_n^{(k)}(1) = U_n^{(n+k)}(1)$ sont entiers. Les polynômes P_n et Q_n sont donc bien à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de degré n.
Plus précisément avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k C_n^k}{n!} x^{n+k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{U_n^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} x^{n+k}, \\ U_n(1-x) = U_n(x), \end{array} \right.$$

on déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_n^{(k)}(0) = U_n^{(n+k)}(0) = \dfrac{(-1)^k (n+k)!}{n!} C_n^k = (-1)^k k! C_n^k C_{n+k}^n, \\ L_n^{(k)}(1) = U_n^{(n+k)}(1) = (-1)^{n+k} U_n^{(n+k)}(0) = (-1)^n k! C_n^k C_{n+k}^n, \end{array} \right.$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k! C_n^k C_{n+k}^n x^{n-k}, \\ Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k! C_n^k C_{n+k}^n (-1)^{n+k} x^{n-k} = P_n(-x). \end{array} \right.$$

Pour $n \geq 1$, $x = 0$, on a $P_n(0) = Q_n(0)$ et $Q_n(0) e^0 - P_n(0) = 0$, c'est-à-dire que le résultat est encore valable pour $x = 0$.
Il reste à montrer que les polynômes P_n, Q_n dans $\mathbb{Z}[x]$ tels que

$x^{n+1}R_n(x) = Q_n(x)e^x - P_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ sont uniques. Cela résulte du fait que si $Q_n(x)e^x - P_n(x) = 0$ alors :

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui entraîne $Q_n = 0$ et $P_n = 0$.

(c) Pour $x = 0$ et $n \geq 0$, on a $x^{n+1}R_n(x) = 0$.
Pour x non nul, on a :

$$\int_0^1 \left| f_x^{(n)}(t) \right| dt = |x|^n \int_0^1 e^{xt} dt = \underset{n \to +\infty}{O}(|x|^n).$$

L'hypothèse $(H2)$ est donc vérifiée et il en résulte que :

$$\lim_{n \to +\infty} (Q_n(x)e^x - P_n(x)) = \lim_{n \to +\infty} x^{n+1}R_n(x) = 0.$$

(d) Pour $r \in \mathbb{Z}^*$ on a :

$$r^{n+1}R_n(r) = Q_n(r)e^r - P_n(r)$$

avec $p_n = P_n(r) \in \mathbb{Z}$, $q_n = Q_n(r) \in \mathbb{Z}$, les hypothèses $(H1)$, $(H2)$ et $(H3)$ étant vérifiées, il en résulte que e^r est irrationnel.

2. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$. Si e^r est rationnel alors $e^p = (e^r)^q$ est rationnel avec $p \in \mathbb{Z}^*$, en contradiction avec ce qui précède. Donc e^r est irrationnel.
3. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$. Si $\ln(r) \in \mathbb{Q}$ alors $r = e^{\ln(r)}$ est irrationnel ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ.
4. On a :

$$Q_n(0) = P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!} \neq 0.$$

La fonction $\dfrac{P_n}{Q_n}$ est donc développable en série entière au voisinage de 0 et en écrivant que :

$$e^x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^{n+1}R_n(x)}{Q_n(x)}$$

avec :

$$R_n(x) = \int_0^1 e^{xt}U_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n x^n \int_0^1 e^{xt}U_n(t)\,dt,$$

on déduit que :

$$e^x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = x^{2n+1}\varphi_n(x)$$

avec φ_n développable en série entière au voisinage de 0. Il en résulte que les parties régulières d'ordre $2n$ des développements limités en 0 de e^x et $\frac{P_n}{Q_n}$ sont identiques.

5.

(a) On a $Q_n(0) = P_n(0) \neq 0$.

Pour $x > 0$, on a $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k! C_n^k C_{n+k}^n x^{n-k} > 0$ et donc pour $x < 0$, $Q_n(x) = P_n(-x) > 0$.

Pour $x > 0$, on a $Q_n(x) e^x = P_n(x) + x^{n+1} R_n(x)$ avec $P_n(x)$ et x^{n+1} strictement positifs et pour les entiers pairs :

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 e^{xt} t^{2n} (1-t)^{2n} dt > 0,$$

il en résulte que $Q_{2n}(x) > 0$.

On a donc bien $Q_{2n}(x) > 0$ pour tout réel x et tout entier naturel n (pour n impair $Q_n(x)$ peut s'annuler pour une valeur positive de x).

(b) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\left| e^x - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \right| = \frac{|x|^{4n+1}}{(2n)!} \frac{\int_0^1 e^{xt} t^{2n} (1-t)^{2n} dt}{Q_{2n}(x)}$$

avec :

$$0 < \int_0^1 e^{xt} t^{2n} (1-t)^{2n} dt \leq \frac{1}{4^{2n}} \int_0^1 e^{xt} dt = \frac{1}{4^{2n}} \frac{|e^x - 1|}{|x|},$$

ce qui donne :

$$\left| e^x - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \right| \leq \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{4} \right)^{2n} \frac{|e^x - 1|}{Q_{2n}(x)}.$$

Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} Q_{2n}(x) &= e^{-x} \left(P_{2n}(x) + x^{2n+1} R_{2n}(x) \right) > e^{-x} P_{2n}(x) \\ &\geq e^{-x} P_{2n}(0) = e^{-x} \frac{(4n)!}{(2n)!} \end{aligned}$$

et donc :

$$\left|e^x - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}\right| \leq \frac{1}{(4n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n} e^x\left(e^x - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Pour $x = -t < 0$, on a $Q_{2n}(x) = P_{2n}(t) \geq P_{2n}(0) = \dfrac{(4n)!}{(2n)!}$ et :

$$\left|e^x - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}\right| \leq \frac{1}{(4n)!}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{4n}\left(1 - e^x\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

6.

(a) L'utilisation du triangle de Pascal donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_2(x) & = & Q_2(-x) = x^2 + C_2^1 C_3^2 x + 2C_4^2 = x^2 + 6x + 12, \\ P_4(x) & = & Q_4(-x) = x^4 + C_4^1 C_5^4 x^3 + 2C_4^2 C_6^4 x^2 + 6C_4^3 C_7^4 x + 4! C_8^4, \\ & = & x^4 + 20x^3 + 180x^2 + 840x + 1680, \end{array}\right.$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \dfrac{x^2 + 6x + 12}{x^2 - 6x + 12}, \\ \dfrac{P_4(x)}{Q_4(x)} = \dfrac{x^4 + 20x^3 + 180x^2 + 840x + 1680}{x^4 - 20x^3 + 180x^2 - 840x + 1680}. \end{array}\right.$$

(b) En prenant $x = 1$, on obtient les approximations rationnelles suivantes du nombre $e \backsim 2.7182818284590452353$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{P_2(1)}{Q_2(1)} = \dfrac{19}{7} \backsim 2.7142857142857142857, \\ \dfrac{P_4(1)}{Q_4(1)} = \dfrac{2721}{1001} \backsim 2.7182817182817182817, \end{array}\right.$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} \left|e - \frac{19}{7}\right| \leq \dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 e\,(e-1) \leq \dfrac{1}{2^4 4!} 3 \cdot 2 = \dfrac{1}{64} \backsim 0.15625, \\ \left|e - \frac{2721}{1001}\right| \leq \dfrac{1}{8!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^8 3 \cdot 2 = \frac{1}{1720320} \backsim 5.812 \cdot 10^{-7}. \end{array}\right.$$

La série classique donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{k=0}^{4} \dfrac{1}{k!} \backsim 2.708333, \\ \sum\limits_{k=0}^{8} \dfrac{1}{k!} \backsim 2.718278769. \end{array}\right.$$

– IV – Zéros des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

1. Soit f une solution sur I de $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$. Si f a une infinité de zéros dans le compact I, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de zéros de f deux à deux distincts et qui converge vers un réel $x \in I$. Quitte à supprimer l'un des x_n, on peut supposer que $x_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de f, on a $f(x) = 0$ et par définition du nombre dérivé, on a $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = 0$, ce qui entraîne $f = 0$ puisque f est solution sur I d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (théorème de Cauchy-Lipschitz).
2. Si $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{g'}{g}$ sur I, alors $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2} = 0$ et $f = \lambda g$ sur I avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La réciproque est évidente.
3. La fonction $g = \dfrac{f}{|f|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans le cercle unité

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

et il s'agit de montrer qu'il existe une fonction θ de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\theta(a) = \theta_0$ et $g = e^{i\theta}$.
Si une telle fonction θ existe, on a alors nécessairement $g' = i\theta' g$, ce qui nous conduit à la définir par :

$$\forall x \in I,\ \theta(x) = \theta_0 - i\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt.$$

Une telle fonction est bien définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (la fonction g est $\mathcal{C}^1$ à valeurs non nulles).

Avec $|g|^2 = g\overline{g} = 1$, on a par dérivation $g'\overline{g} + g\overline{g}' = 0$ et $\dfrac{g'}{g} = -\overline{\dfrac{g'}{g}}$, ce qui implique que la fonction θ est à valeurs réelles.
De plus les fonctions g et $e^{i\theta}$ ayant même dérivée logarithmique sont proportionnelles et prenant la même valeur en a, elles sont égales. L'unicité a été prouvée avec l'analyse du problème.
4.
   (a) Si x_0 dans I est tel que $r(x_0) = 0$, on a alors $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ avec f solution sur I d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit alors que f est identiquement nulle. En conséquence pour f non identiquement nulle la fonction r ne s'annule jamais sur I et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle.

(b) Le théorème de relèvement (question **IV.3**) appliqué à la fonction $f + if'$ sur I nous assure de l'existence de la fonction continûment dérivable θ. De plus avec :

$$\begin{cases} f + if' = re^{i\theta} \\ f' - i\alpha f = f' + if'' = r'e^{i\theta} + i\theta' re^{i\theta} \end{cases}$$

on déduit que :

$$\theta' = (1 - \alpha) \frac{f}{r} e^{-i\theta} - 1 + i\frac{r'}{r},$$

ou encore en identifiant les parties réelles :

$$\theta' = (1 - \alpha) \cos^2(\theta) - 1 = -\alpha \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$

Considérant que la fonction α est à valeurs strictement positives, on en déduit que $\theta'(x)$ est strictement négatif pour tout x dans I, ce qui entraîne que la fonction θ est strictement décroissante sur I.

(c) Pour tout x dans I on a :

$$\theta(x) - \theta(a) = \int_a^x \theta'(t)\, dt = -\int_a^x \left(\alpha(t) \cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))\right) dt$$

et en posant $\mu = \min(1, \lambda)$, on a :

$$\theta(a) - \theta(x) \geq \mu \int_a^x \left(\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))\right) dt = \mu(x - a)$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = -\infty$. La fonction θ étant continue et strictement décroissante, on en déduit qu'elle réalise un homéomorphisme de I sur $]-\infty, \theta(a)]$.

(d) L'équation $f(x) = 0$ avec $x \in I$ équivaut à $\cos(\theta(x)) = 0$ (puisque $r(x) > 0$) encore équivalent à $\theta(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \theta(a)$. De ce qui précède on déduit alors que les zéros de f sont les :

$$x_k = \theta^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \left(k \in \mathbb{Z} \cap \left]-\infty, \frac{\theta(a)}{\pi} - \frac{1}{2}\right]\right)$$

et $\lim\limits_{k \to -\infty} x_k = +\infty$, la suite $(x_{-j})_{j \geq \frac{1}{2} - \frac{\theta(a)}{\pi}}$ étant strictement croissante.

5.

(a) On a :

$$\begin{cases} g' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} f + \sqrt{x} f' \\ g'' = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left(x^2 f'' + x f' - \dfrac{1}{4} f \right) = -\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left(x^2 - p^2 + \dfrac{1}{4} \right) f \end{cases}$$

c'est-à-dire que g est solution de l'équation différentielle :

$$z'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) z = 0.$$

(b) En utilisant le critère de d'Alembert, on vérifie facilement que la série entière de terme général $\dfrac{1}{k!\,(p+k)!} x^k$ a un rayon de convergence infini. On a alors :

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(p+k)!} \frac{x^{p+2k}}{2^{p+2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^{p+2k}$$

et en notant $K_p = x^2 J_p'' + x J_p' + \left(x^2 - p^2 \right) J_p$, on a :

$$\begin{aligned} K_p(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left((p+2k)(p+2k-1) + (p+2k) - p^2 \right) \alpha_k x^{p+2k} \\ &+ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^{p+2(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 4k(p+k) \alpha_k x^{p+2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^{p+2(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(4(k+1)(p+k+1) \alpha_{k+1} + \alpha_k \right) x^{p+2(k+1)} = 0 \end{aligned}$$

en utilisant :

$$\alpha_{k+1} = -\frac{1}{4(k+1)(p+k+1)} \alpha_k$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

(c) La fonction α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\alpha(x) = 1 - \dfrac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$ a pour limite 1 en $+\infty$, de sorte qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\alpha(x) \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in [a, +\infty[$. On déduit alors de **IV. 4** que la fonction $g = \sqrt{x} J_p$, et donc la fonction J_p, a pour zéros dans $[a, +\infty[$ une suite strictement croissante de réels qui tend vers l'infini.

– V – Irrationalité des racines des fonctions de Bessel d'indice entier

1.

(a) Pour $r \geq 1$, on a :

$$x^{p+r} I_p'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!\,(p+k)!} x^{k+p+r-1}$$

et :

$$\begin{aligned}
\left(x^{p+r} I_p'(x)\right)' &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+p+r-1}{(k-1)!\,(p+k)!} x^{k+p+r-2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+p+r-2}}{(k-1)!\,(p+k-1)!} + (r-1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+p+r-2}}{(k-1)!\,(p+k)!} \\
&= x^{p+r-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!\,(p+k-1)!} + (r-1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!\,(p+k)!} \\
&= x^{p+r-1} \left(I_p(x) + (r-1) I_p'(x)\right).
\end{aligned}$$

(b) Pour $r = 1$, l'identité précédente s'écrit :

$$\left(x^{p+1} I_p'(x)\right)' = x^p I_p(x)$$

et en intégrant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{p+1} I_p'(x) = \int_0^x t^p I_p(t)\, dt$$

(c) Pour $r \geq 1$, en intégrant l'identité :

$$\left(x^{p+r+1} I_p'(x)\right)' = x^{p+r} \left(I_p(x) + r I_p'(x)\right),$$

on obtient :

$$\int_0^x t^{p+r} I_p(t)\, dt = x^{p+r+1} I_p'(x) - r \int_0^x t^{p+r} I_p'(t)\, dt,$$

avec :

$$\int_0^x t^{p+r} I_p'(t)\, dt = x^{p+r} I_p(x) - (p+r) \int_0^x t^{p+r-1} I_p(t)\, dt,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{p+r} I_p(t)\, dt &= x^{p+r+1} I_p'(x) - r x^{p+r} I_p(x) \\ &\quad + r(p+r) \int_0^x t^{p+r-1} I_p(t)\, dt.\end{aligned}$$

Pour $r = 1$, cela donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{p+1} I_p(t)\, dt &= x^{p+2} I_p'(x) - x^{p+1} I_p(x) + (p+1) \int_0^x t^p I_p(t)\, dt \\ &= x^{p+2} I_p'(x) - x^{p+1} I_p(x) + (p+1) x^{p+1} I_p'(x) \\ &= x^{p+1} \left(A_1(x) I_p(x) + B_1(x) I_p'(x) \right),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} A_1(x) = -1, \\ B_1(x) = (p+1) + x. \end{cases}$$

En supposant le résultat acquis pour $r \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{p+r+1} I_p(t)\, dt &= x^{p+r+2} I_p'(x) - (r+1) x^{p+r+1} I_p(x) \\ &\quad + (r+1)(p+r+1) x^{p+1} \left(A_r(x) I_p(x) + B_r(x) I_p'(x) \right) \\ &= x^{p+1} \left(A_{r+1}(x) I_p(x) + B_{r+1}(x) I_p'(x) \right),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} A_{r+1}(x) = (r+1)\left((p+r+1) A_r(x) - x^r\right), \\ B_{r+1}(x) = (r+1)(p+r+1) B_r(x) + x^{r+1}, \end{cases}$$

la fonction A_{r+1} [resp. B_{r+1}] étant polynomiale à coefficients entiers relatifs de degré égal à k [resp. $k+1$].
On peut préciser que le coefficient dominant de A_r [resp. B_r] est égal à $-r$ [resp. 1].

(d) Avec $A_{r+1}(0) = (r+1)(p+r+1) A_r(0)$ et $A_1(0) = -1$, on déduit que le coefficient constant dans A_r est :

$$A_r(0) = -\frac{r!\,(p+r)!}{(p+1)!}$$

et avec $B_{r+1}(0) = (r+1)(p+r+1) B_r(0)$ et $B_1(0) = p+1$, que le coefficient constant dans B_r est :

$$B_r(0) = \frac{r!\,(p+r)!}{p!}.$$

(e) Il est clair que $I_p(x) > 0$ pour $x \geq 0$. Il en résulte que si x est une racine réelle de I_p alors $x < 0$.
Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^{-,*}$ tel que $I_p(x) = I'_p(x) = 0$. La fonction I_p étant solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\left(x^{p+1} y'(x)\right)' = x^p y(x),$$

on déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire que I_p est identiquement nulle sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et par continuité que $I_p(0) = 0$, ce qui est faux. En conséquence un tel x ne peut exister et les zéros de I_p sont simples.

2. La fonction L_n est polynomiale à coefficients entiers (question **I.1b**) de degré $n+p$. Plus précisément, on a :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n+p} \frac{L_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=p}^{n+p} \frac{P_n^{(n+k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(n+p+k)}(0)}{(p+k)!} x^{p+k}$$

puisque 0 est racine d'ordre $n+p$ de P_n, les coefficients $\dfrac{P_n^{(n+k)}(0)}{k!}$ étant entiers.
On peut aussi avoir par un calcul direct :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{p+n+k}^n x^{p+k}.$$

On a donc, en posant $\alpha_k = \dfrac{P_n^{(n+p+k)}(0)}{(p+k)!} = (-1)^k C_n^k C_{p+n+k}^n$ pour k compris entre 0 et n :

$$R_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r \int_0^1 I_p(xt)\, t^{p+r}\, dt.$$

Pour $n = 0$, on a $L_0(x) = U_0(x) = x^p$ et pour $x \neq 0$, le changement de variable $u = xt$ donne :

$$R_0(x) = \int_0^1 I_p(xt)\, t^p dt = \frac{1}{x^{p+1}} \int_0^x u^p I_p(u)\, du = I_p'(x)$$

(question **V.1b**). On pose donc $P_0(x) = 0$ et $Q_0(x) = 1$.
Pour $r \geq 0$, x non nul, le changement de variable $u = xt$ donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 I_p(xt)\, t^{p+r} dt &= \frac{1}{x^{p+r+1}} \int_0^x I_p(u)\, u^{p+r} du \\ &= \frac{1}{x^r}\left(A_r(x)\, I_p(x) + B_r(x)\, I_p'(x)\right)\end{aligned}$$

où $A_0(x) = 0$, $B_0(x) = 1$ et pour $r \geq 1$, A_r est une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré $r-1$, B_r est une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré r (questions **I.1b** et **I.1c**). On a donc, pour $n \geq 1$:

$$R_n(x) = \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{x^r} A_r(x)\right) I_p(x) + \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha_r}{x^r} B_r(x)\right) I_p'(x)$$

et en posant :

$$\begin{cases} P_n(x) = x^n \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{\alpha_r}{x^r} A_r(x) = \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r x^{n-r} A_r(x), \\ Q_n(x) = x^n \sum\limits_{r=0}^{n} \dfrac{\alpha_r}{x^r} B_r(x) = \sum\limits_{r=0}^{n} \alpha_r x^{n-r} B_r(x), \end{cases}$$

on définit deux fonctions polynomiales à coefficients entiers telles que :

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)\, I_p(x) + Q_n(x)\, I_p'(x)}{x^n}$$

avec P_n de degré au plus égal à $n-1$ et Q_n de degré au plus égal à n. En fait le coefficient dominant de Q_n est égal à $\sum\limits_{r=0}^{n} \alpha_r = L_n(1) = (-1)^n$ (le coefficient dominant de B_r est 1) et celui de P_n est égal $-\sum\limits_{r=1}^{n} r\alpha_r$ (le coefficient dominant de A_r est $-r$) et ce coefficient est non nul, puisque c'est l'opposé de la valeur en 1 de la dérivée de $\dfrac{L_n(x)}{x^p} = \sum\limits_{r=0}^{n} \alpha_k x^r$, soit :

$$\sum_{r=1}^{n} r\alpha_r = L_n'(1) - pL_n(1) = (-1)^n \left((n-1)\, p + n^2 + n\right).$$

Les valeurs en 0 de ces polynômes étant données par :

$$\begin{cases} P_n(0) = \alpha_n A_n(0) \neq 0 \\ Q_n(0) = \alpha_n B_n(0) \neq 0 \end{cases}$$

(question **V.1d**).

3.

(a) La fonction φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisqu'on on intègre sur un compact une fonction $\mathcal{C}^\infty$ des deux variables. De plus :

$$\varphi_n(0) = (-1)^n \int_0^1 I_p^{(n)}(0)\, U_n(0)\, dt \neq 0$$

puisque la fonction intégrée est continue strictement positive sur $]0,1[$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $P_n(x) I_p(x) + Q_n(x) I_p'(x) = x^n R_n(x)$. Pour $n = 0$, cela s'écrit $R_0(x) = I_p'(x)$ et c'est encore valable pour $x = 0$ ($R_0(0) = \displaystyle\int_0^1 I_p(0)\, t^p dt = \frac{1}{(p+1)!} = I_p'(0)$).
Pour $n \geq 1$, on a :

$$P_n(0) I_p(0) + Q_n(0) I_p'(0) = \frac{\alpha_n}{p!}\left(A_n(0) + \frac{1}{p+1} B_n(0)\right) = 0$$

(question **V.1d**). La relation est donc valable pour tout réel x.
D'autre part, avec n intégrations par parties successives, on a :

$$R_n(x) = \int_0^1 I_p(xt)\, U_n^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n x^n \int_0^1 I_p^{(n)}(xt)\, U_n(t)\, dt$$

(0 et 1 sont racines d'ordre n de U_n) et donc :

$$\begin{aligned} P_n(x) I_p(x) + Q_n(x) I_p'(x) &= (-1)^n x^{2n} \int_0^1 I_p^{(n)}(xt)\, U_n(t)\, dt \\ &= (-1)^n x^{2n} \varphi_n(x). \end{aligned}$$

(c) On a :

$$I_p^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!\,(p+k)!} x^{k-n}$$

ce qui entraîne :

$$\left| I_p^{(n)}(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} |x|^{k-n} = e^{|x|}$$

et :

$$\left|\varphi_n(x)\right| \leq \int_0^1 e^{|x|t}\frac{t^{n+p}(1-t)^n}{n!}dt \leq \frac{e^{|x|}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$$
$$\leq \frac{e^{|x|}}{n!}\frac{1}{4^n} \leq \frac{e^{|x|}}{n!}.$$

(d) Il en résulte :

$$\left|P_n(x)\,I_p(x)+Q_n(x)\,I_p'(x)\right| \leq \frac{e^{|x|}}{n!}\frac{x^{2n}}{4^n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P_n(x)\,I_p(x)+Q_n(x)\,I_p'(x)\right)=0$.
On n'est pas tout à fait dans la situation de **II.6b**, mais le raisonnement est analogue.

4. $S_n = P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}$ est un polynôme de degré au plus égal à $2n-2$ et en éliminant $I_p(x)$ dans le système :

$$\begin{cases} P_n(x)\,I_p(x)+Q_n(x)\,I_p'(x)=x^{2n}\varphi_n(x), \\ P_{n-1}(x)\,I_p(x)+Q_{n-1}(x)\,I_p'(x)=x^{2n-2}\varphi_{n-1}(x) \end{cases}$$

on obtient :

$$S_n(x)\,I_p'(x)=x^{2n-2}\left(P_{n-1}(x)\,x^2\varphi_n(x)-P_n(x)\,\varphi_{n-1}(x)\right).$$

Et avec $I_p'(0)\neq 0$, on peut écrire au voisinage de 0 :

$$S_n(x)=x^{2n-2}\frac{P_{n-1}(x)\,x^2\varphi_n(x)-P_n(x)\,\varphi_{n-1}(x)}{I_p'(x)},$$

ce qui entraîne que 0 est racine d'ordre au moins égal à $2n-2$ de S_n. Tenant compte du degré de S_n on a nécessairement $S_n(x)=c_nx^{2n-2}$ avec :

$$c_n=-\frac{P_n(0)\,\varphi_{n-1}(0)}{I_p'(0)}\neq 0.$$

5. Si $R_{n-1}(x)=R_n(x)=0$ alors :

$$\begin{cases} P_n(x)\,I_p(x)+Q_n(x)\,I_p'(x)=0 \\ P_{n-1}(x)\,I_p(x)+Q_{n-1}(x)\,I_p'(x)=0 \end{cases}$$

et si le déterminant de ce système $P_n(x)\,Q_{n-1}(x)-P_{n-1}(x)\,Q_n(x)$ est non nul alors $I_p'(x)=I_p(x)=0$, ce qui contredit le fait que I_p n'a que des racines simples. On a donc :

$$c_nx^{2n-2}=P_n(x)\,Q_{n-1}(x)-P_{n-1}(x)\,Q_n(x)=0$$

et $x=0$. En conclusion, pour x non nul, $R_{n-1}(x)$ et $R_n(x)$ ne peuvent être simultanément nuls.

6. Si $I_p(r) = 0$, alors $I'_p(r) \neq 0$ et l'inégalité établie en **V.3c** donne :

$$\left|P_n(r) I_p(r) + Q_n(r) I'_p(r)\right| = \left|Q_n(r) I'_p(r)\right| \leq \frac{e^{|r|}}{n!} \frac{r^{2n}}{4^n}.$$

Si de plus $r = \dfrac{p}{q}$ avec p entier strictement négatif et q entier naturel non nul, alors $Q_n(r) = \dfrac{p_n}{q^n}$ avec p_n entier relatif (Q_n est à coefficients entiers et de degré n) et l'inégalité précédente donne :

$$|p_n| \leq \frac{e^{|r|}}{\left|I'_p(r)\right|} \frac{1}{n!} \frac{1}{4^n} \left(\frac{p^2}{q}\right)^n$$

On déduit alors que la suite d'entiers $(p_n)_{n>0}$ a une limite nulle à l'infini, elle est donc constante égale à 0 à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad Q_n(r) = 0$$

et avec $R_n(r) = \dfrac{Q_n(r) I'_p(r)}{r^n}$, on déduit alors que :

$$\forall n \geq n_0, \quad R_n(r) = 0,$$

avec r non nul, ce qui contredit le résultat précédent. En conclusion I_p n'a pas de racine rationnelle.

7. Si α est racine de $J_p(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^p I_p\left(-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\right)$, alors $-\dfrac{\alpha^2}{4}$ est racine de I_p et α^2 est irrationnel.

Les passionnés pourront consulter [1], [4], [5], [18] et [24] pour des résultats supplémentaires.

Deuxième partie

ALGEBRE & GEOMETRIE

Chapitre 8

CAPES externe 1999, épreuve 2

8.1 Énoncé

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels ;
$\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs ;
$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Les lettres p et q désignant des nombres entiers relatifs, on note : $[\![p,q]\!]$ l'ensemble des nombres entiers relatifs compris (au sens large) entre les nombres p et q, autrement dit : $[\![p,q]\!] = \{m\ ;\ m \in \mathbb{Z}\ /\ p \leq m \text{ et } m \leq q\}$.

Par ailleurs, on note :

$\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$;
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

et, si (k,l) appartient à $[\![1,n]\!]^2$:

E_{kl} la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k-ième ligne et la l-ième colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

[0] [ag45e] v1.00

On rappelle que la famille $(E_{kl})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note enfin : $M = (m_{ij})$, ou $M = (m_{i,j})$ en cas d'ambiguïté, la matrice

$$M = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ij} E_{ij}.$$

La lettre K désignant un réel, on définit les ensembles :

- $L_K = \{M \ ; \ M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = K\}$;
- $L = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} L_K$;
- $C_K = \{M \ ; \ M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = K\}$;
- $C = \bigcup_{K\in\mathbb{R}} C_K$.

Une matrice $M = (m_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite matrice *magique* d'ordre n lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\left\{m_{ij} \ ; \ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right\} = [\![1,n^2]\!] \qquad \mathbf{P}_1$$

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad M \in L_K \cap C_K \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,n+1-k} = K \qquad \mathbf{P}_2$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des matrices appartenant à $L \cap C$ et des matrices magiques d'ordre n, avec, notamment, une construction de certaines d'entre elles dans le cas où n est impair.

Les cinq parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n, le réel K dont la propriété $\mathbf{P}_2$ affirme l'existence vaut nécessairement $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on note $K_n = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

PARTIE I : ETUDE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRES 2 ET 3

I.1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice magique d'ordre 2.

I.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice magique d'ordre 3.

I.2.a. Établir l'inclusion de l'ensemble $\{1,9\}$ dans l'ensemble $\{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$.

I.2.b. En déduire l'ensemble des matrices magiques d'ordre 3.

PARTIE II : ÉTUDE DE L'ESPACE VECTORIEL $L \cap C$

II.1.

II.1.a. Montrer que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par la famille de matrices $(E_{ij} - E_{in})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$. Préciser la dimension de L_0.

II.1.b. Soit K un réel. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0.

II. 1 .c. En déduire que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

II.2.

II.2.a. Montrer que, quelle que soit la matrice $M = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1} m_{ij}\,(E_{ij} - E_{in})$ appartenant à L_0, M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout j appartenant à $[\![1, n-1]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$.

II.2.b. En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (après avoir succinctement justifié que $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel).

II.3.

II.3.a. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

II.3.b. En déduire la dimension de l'espace $L \cap C$.

PARTIE III : EXEMPLE DE GROUPE OPÉRANT SUR L'ENSEMBLE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRE n

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ d'une part, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{v}$ d'autre part, soient colinéaires.

On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ qui laissent le carré $ABCD$ globalement invariant. On note Ω le point de $\mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{O\Omega} = -\dfrac{n+1}{2}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ et $\mathcal{R}'$ le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

III.1.

III.1.a. Soit f un élément de $\mathcal{I}$. Montrer qu'il existe un couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ appartenant à $\{-1, 1\}^2$ tel que, pour tout point N de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y)

dans le repère $\mathcal{R}$, les coordonnées (x', y') du point $f(N)$ dans le repère $\mathcal{R}$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \varepsilon_1 x \\ y' = \varepsilon_2 y, \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x' = \varepsilon_1 y \\ y' = \varepsilon_2 x. \end{array}\right.$$

Reconnaître toutes les isométries du plan $\mathcal{E}$ ainsi définies.

III.1.b. Soit N le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathcal{R}'$. Pour chaque élément f de $\mathcal{I}$, exprimer les coordonnées (X', Y') du point $f(N)$ dans le repère $\mathcal{R}'$ en fonction de X et de Y.

III.2. Soit f un élément de $\mathcal{I}$. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui, à un couple (s, t) de réels, associe le couple des coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$ de l'image par f^{-1} du point de coordonnées (s, t) dans ce même repère.

III.l.a. Montrer que, quel que soit le couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, le couple $\varphi(i, j)$ appartient à $[\![1, n]\!]^2$.

III.2.b. Soit Φ_f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à une matrice $M = (m_{ij})$, associe la matrice $\Phi_f(M) = (m'_{ij})$ vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $m'_{ij} = m_{kl}$, le couple (k, l) étant égal à $\varphi(i, j)$.

Montrer que l'application Φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble $\{\Phi_f \ ; \ f \in \mathcal{I}\}$. Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathcal{I}, \circ)$. (*Le symbole* $\circ$ *désigne la composition des applications.*)

III.4.

III.4.a. Vérifier que l'image d'une matrice magique d'ordre n quelconque par un élément de $\mathcal{F}$ quelconque est une matrice magique d'ordre n.

III.A.b. Soient f et g des éléments de $\mathcal{I}$. Montrer que, s'il existe une matrice magique M d'ordre n telle que $\Phi_f(M) = \Phi_g(M)$, alors $f = g$.

III.4.c. Montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre n est fini et que son cardinal est un multiple de 8.

PARTIE IV : ÉTUDE D'UN GROUPE ASSOCIÉ À CERTAINES PERMUTATIONS DE $[\![1, n]\!]$

Étant donnée une permutation quelconque σ de $[\![1, n]\!]$, on note A_σ la matrice (a_{ij}) appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = \delta_{\sigma(i), j}$, ce dernier symbole (dit « de Kronecker ») étant défini par la relation :

$$\delta_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{A_\sigma \,/\, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

IV. 1. Soient σ un élément de $\mathfrak{S}_n$ et $M = (m_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter le terme général de la matrice $A_\sigma M$, puis le terme général de la matrice MA_σ.

IV.2. Montrer que $(\mathcal{S}, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.
(*Le symbole* $\times$ *désigne la multiplication matricielle.*).3.

IV.3.a. Soit K un réel. Montrer que, pour toute matrice M appartenant à $L_K \cap C_K$ et toutes permutations σ et σ' de $[\![1, n]\!]$, $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K \cap C_K$.

IV.3.b. On note $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \sigma(n+1-k) = n+1-\sigma(k).$$

Soit σ un élément de $\mathfrak{I}_n$. Montrer que, si M est une matrice magique de taille n, alors $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ en est aussi une.

IV.4. On note $\mathcal{J}$ l'ensemble $\{A_\sigma \,/\, \sigma \in \mathfrak{I}_n\}$.

IV.4.a. Montrer que $(\mathcal{J}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}, \times)$.

IV.4.b. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{J}$.

PARTIE V : CONSTRUCTION DE MATRICES MAGIQUES D'ORDRE n IMPAIR

V.A. **Cas où n n'est pas multiple de 3**.

On suppose dans cette section V.A. que n *est un entier impair non multiple de* 3. On dit que deux entiers p et q sont congrus module n, et l'on note $p \equiv q \;\; (n)$, lorsque n divise $p - q$.

V.A.l. Montrer qu'il existe un entier m premier avec n tel que, pour tout quadruplet (i, j, k, l) appartenant à $\mathbb{Z}^4$,

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j \;\; (n) \\ l \equiv i + 2j \;\; (n) \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} i \equiv m(2k - l) \;\; (n) \\ j \equiv m(2l - k) \;\; (n). \end{cases}$$

Ainsi, pour tout couple (k, l) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, il existe un et un seul couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$ tel que :

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j \;\; (n) \\ l \equiv i + 2j \;\; (n). \end{cases}$$

On note alors $i = \alpha(k, l)$ et $j = \beta(k, l)$.

V.A.2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau quotient de $\mathbb{Z}$ par l'idéal $n\mathbb{Z}$ et, si x est élément de $\mathbb{Z}$, $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

V.A.2.a. Soient u et v deux entiers relatifs, u non nul. Montrer que, si u et n sont premiers entre eux, l'application $x \mapsto \dot{u}\dot{x} + \dot{v}$ est une bijection de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même.

V.A.2.b. En déduire que, pour tout l appartenant à $[\![1,n]\!]$, la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha(k,l)$ est constante (préciser sa valeur en fonction de n).

Soit $W = (w_{i,j})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$:

$$w_{i,j} = n(i-1) + j.$$

Soit $G = (g_{k,l})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (k,l) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$:

$$g_{k,l} = w_{\alpha(k,l),\beta(k,l)}.$$

V.A.3. Construire G dans le cas où $n = 5$.

Dans la suite, l'entier n n'est plus supposé égal à 5.

V.A.4.

V.A.4.a. Montrer que l'ensemble des coefficients de G est $[\![1,n^2]\!]$.

V.A.4.b. Montrer que G est une matrice magique d'ordre n.

V.A.5. Dans cette question, on établit une propriété supplémentaire de la matrice G. Si i appartient à $[\![1,n]\!]$, on note

$$E_i = \left\{(k,l)\ ;\ (k,l) \in [\![1,n]\!]^2\ /\ k-l \equiv i\ \ (n)\right\}.$$

V.A.5.a. Montrer que, pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{(k,l)\in E_i} g_{kl} = K_n$.

V.A.5.b. Déterminer n autres ensembles F_1, F_2, ..., F_n analogues aux ensembles E_1, E_2, ..., E_n tels que, pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{(k,l)\in F_i} g_{kl} = K_n$.

V.B. **Composition de deux matrices magiques. Cas où n est multiple de 3.**

Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 3.

A partir d'une matrice magique $A = (a_{kl})$ d'ordre p et d'une matrice magique $B = (b_{ij})$ d'ordre q, on considère la matrice carrée $D = (d_{uv})$ d'ordre pq vérifiant, pour tout (k,l) appartenant à $[\![1,p]\!]^2$ et tout (i,j) appartenant à $[\![1,q]\!]^2$, $d_{(i-1)p+k,(j-1)p+l} = a_{kl} + (b_{ij}-1)p^2$.

V.B.1. Construire D dans le cas particulier où les matrices A et B sont égales à $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

V.B.2. Montrer que, pour toutes matrices magiques A et B d'ordres respectifs p et q, D est une matrice magique d'ordre pq.

V.B.3. En déduire que, si n est un multiple de 3, l'ensemble des matrices magiques d'ordre n n'est pas vide.

8.2 Corrigé

Je noterai $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\} = [\![1, n]\!]$.

Question préliminaire. La somme de tous les coefficients de M est

$$nK = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n} m_{ij} = \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2\left(1+n^2\right)}{2}$$

d'où $K = \dfrac{n\left(1+n^2\right)}{2}$.

PARTIE I

I.1. Ici $K_2 = 5$. Si la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est magique, alors

$$a + c = b + d = a + b = c + d = 5$$

d'où $a = d$ et $b = c$ par soustraction.

On n'aura donc pas $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$, et cela contredit $\mathbf{P}_1$.

Autre solution : $K_2 = 5$ ne peut se décomposer qu'en $5 = 4 + 1$ ou $5 = 3 + 2$. S'il existait une matrice magique de taille 2, le nombre 5 serait décomposable de 4 façons différentes données par les lignes et les colonnes de la matrice. C'est absurde.

I.2.a. Les positions $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$ sont celles par lesquelles il ne passe que 2 lignes (au sens large : ligne, colonne ou diagonale montante ou descendante). Par toutes les autres positions, on peut faire passer au moins 3 lignes.

$$\underset{a_{12} \text{ : 2 lignes seulement.}}{\begin{pmatrix} * & \circledast & * \\ & * & \\ & * & \end{pmatrix}} \quad \underset{a_{11} \text{ : 3 lignes.}}{\begin{pmatrix} \circledast & * & * \\ * & * & \\ * & & * \end{pmatrix}} \quad \underset{a_{22} \text{ : 4 lignes.}}{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \circledast & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}.$$

---

[0] [ag45] v2.00

Si le coefficient 9 n'appartient pas à l'ensemble $X = \{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$, au moins trois lignes passeront par 9 et il faudra compléter les sommes du type $9 + ... + ... = 15$ au moins trois fois. C'est impossible puisqu'on trouve

$$\begin{aligned}
&9+1+5=15,\\
&9+2+4=15,\\
&9+3+3=15 \text{ à rejeter car contient deux chiffres 3.}
\end{aligned}$$

De la même façon, si $1 \in X$, il faut compléter $1 + ... + ... = 15$ au moins trois fois (avec des nombres différents et dans $\mathbb{N}_9$), et on trouve

$$\begin{aligned}
&1+9+5=15,\\
&1+8+6=15,\\
&1+7+7=15 \text{ à rejeter car le chiffre 7 est répété.}
\end{aligned}$$

On a prouvé l'inclusion $\{1, 9\} \subset X = \{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$.

I.2.b. On a nécessairement $a_{22} = 5$. Pour le voir, il suffit de faire la somme des coefficients des quatre "lignes" (deux diagonales, une ligne et une colonne) passant par a_{22} de deux façons différentes pour obtenir

$$4K_3 = 4a_{22} + 2K_3 + (K_3 - a_{22})$$

d'où $a_{22} = \frac{K_3}{3} = 5$.

Les matrices magiques de taille 3 seront donc de l'un des 4 types suivants :

$$(a)\ \begin{pmatrix} * & 9 & * \\ * & 5 & * \\ * & 1 & * \end{pmatrix};\ (b)\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 9 & 5 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix};\ (c)\ \begin{pmatrix} * & 1 & * \\ * & 5 & * \\ * & 9 & * \end{pmatrix};\ (d)\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 5 & 9 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Les pointillés dans $15 = 9 + ... + ...$ ne peuvent être complétés que de 2 façons différentes : soit en $15 = 9 + 5 + 1$, soit en $15 = 9 + 4 + 2$. Le cas (a) donnera donc les 2 sous-cas

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ * & 5 & * \\ * & 1 & * \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ * & 5 & * \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$$

que l'on complète facilement pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

On recommence avec les autres cas de figure pour finalement obtenir 8 matrices magiques. Ce sont

$$(a)\ \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix};\quad (b)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix};$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix};\quad (d)\ \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

PARTIE II

II.1.a. Dire que les matrices $M = (m_{ij})$ et $N = (n_{ij})$ appartiennent à L_0 revient à dire que $\sum_{j\in\mathbb{N}_n} m_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}_n} n_{ij} = 0$, et dans ce cas

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n \qquad \sum_{j\in\mathbb{N}_n} (m_{ij} + \lambda n_{ij}) = \sum_{j\in\mathbb{N}_n} m_{ij} + \lambda \sum_{j\in\mathbb{N}_n} n_{ij} = 0$$

montre que $M + \lambda N \in L_0$. Comme L_0 n'est pas vide (il contient la matrice nulle), on vient de prouver que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Toute matrice M de L_0 s'écrira

$$\begin{aligned} M &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2} m_{ij}E_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_{n-1}} m_{ij}E_{ij} + m_{in}E_{in} \right) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_{n-1}} m_{ij}E_{ij} + \left(- \sum_{j\in\mathbb{N}_{n-1}} m_{ij} \right) E_{in} \right) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_{n-1}} m_{ij} (E_{ij} - E_{in}). \end{aligned}$$

Ainsi le système $\mathcal{B} = (E_{ij} - E_{in})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_{n-1}}$ engendre L_0. On vérifie que $\mathcal{B}$ est libre en retournant à la définition. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_{n-1}} m_{ij} (E_{ij} - E_{in}) = 0 &\Rightarrow \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_{n-1}} m_{ij}E_{ij} - \sum_{i\in\mathbb{N}_n} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}_{n-1}} m_{ij} \right) E_{in} = 0 \\ &\Rightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_{n-1} \quad m_{ij} = 0 \end{aligned}$$

puisque les vecteurs E_{ij} font partie de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En conclusion $\mathcal{B}$ est une base de L_0 et $\dim L_0 = n(n-1)$.

Remarque : L'espace L_0 étant défini par n équations linéaires indépendantes (c'est donc l'intersection de n hyperplans vectoriels), sa dimension est $\dim L_0 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - n = n^2 - n$.

II.1.b. En notant $I_n = (I_{ij})$,

$$\begin{aligned} M \in L_K &\Leftrightarrow \forall i \quad \sum_{j \in \mathbb{N}_n} m_{ij} = K \\ &\Leftrightarrow \forall i \quad \sum_{j \in \mathbb{N}_n} (m_{ij} - K I_{ij}) = 0 \ \Leftrightarrow \ M - K I_n \in L_0. \end{aligned}$$

Remarque : Cela montre que L_K est l'espace affine de direction L_0 passant par $K I_n$.

II.1.c. Les équivalences

$$\begin{aligned} M \in L = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} L_K &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad M \in L_K \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad M - K I_n \in L_0 \quad \text{(d'après II.1.b)} \\ &\Leftrightarrow M \in \operatorname{Vect}(I_n) \oplus L_0 \quad (\text{car } I_n \notin L_0) \end{aligned}$$

montrent que $L = \operatorname{Vect}(I_n) \oplus L_0$ est un sous-espace vectoriel somme directe de deux sous-espaces vectoriels, et que $\dim L = 1 + \dim L_0 = n^2 - n + 1$.

II.2.a. L'écriture

$$M = \sum_{i \in \mathbb{N}_n,\ j \in \mathbb{N}_{n-1}} m_{ij} E_{ij} - \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_{n-1}} m_{ij} \right) E_{in}$$

nous dévoile les coefficients de la matrice M, et il est facile de voir que $M \in C_0$ équivaut aux deux conditions

1) $\forall j \in \mathbb{N}_{n-1} \quad \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$,

2) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_{n-1}} m_{ij} \right) = 0$.

La condition 2) est toujours vraie dès que la condition 1) est réalisée (permuter les sommes), donc

$$M \in C_0 \Leftrightarrow \left(\forall j \in \mathbb{N}_{n-1} \quad \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0 \right).$$

II.2.b. C_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par une preuve semblable à celle concernant L_0 en II.1.a), et $L_0 \cap C_0$ sera un sous-espace vectoriel comme intersection de deux sous-espaces vectoriels. Si $M \in L_0 \cap C_0$, on a vu que

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n-1} \quad m_{nj} = -\sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}$$

d'où

$$\begin{aligned} M &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\left(E_{ij} - E_{in}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(m_{nj}\left(E_{nj} - E_{nn}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}\left(E_{ij} - E_{in}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(-\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}\right)\left(E_{nj} - E_{nn}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}\left(E_{ij} - E_{in}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(-m_{ij}\left(E_{nj} - E_{nn}\right) + m_{ij}\left(E_{ij} - E_{in}\right)\right) \end{aligned}$$

et finalement

$$M = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}\left(E_{ij} + E_{nn} - E_{nj} - E_{in}\right).$$

Le système $\mathcal{B}' = \left(E_{ij} + E_{nn} - E_{nj} - E_{in}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_{n-1}^2}$ engendre donc $L_0 \cap C_0$. Nous allons montrer qu'il est libre, de sorte qu'il s'agira d'une base de $L_0 \cap C_0$ et que $\dim\left(L_0 \cap C_0\right) = (n-1)^2$. L'égalité

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}\left(E_{ij} + E_{nn} - E_{nj} - E_{in}\right) = 0$$

s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}E_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}\right)E_{nj} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}\right)E_{in} + \left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} m_{ij}\right)E_{nn} = 0$$

et entraîne bien $m_{ij} = 0$ pour tout couple (i,j) puisque $\left(E_{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.3.a.

$$\begin{aligned} M \in L \cap C \Leftrightarrow & \left(\exists K, K' \quad M \in L_K \cap C_{K'}\right) \\ & \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} K' = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} K \\ & \Rightarrow nK' = nK \Rightarrow K' = K. \end{aligned}$$

On a montré

$$M \in L \cap C \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad M \in L_K \cap C_K.$$

La réciproque est triviale.

II.3.b. On montrerait comme à la question II.1.b que $M \in C_K$ si et seulement si $M - KI_n \in C_0$. Compte tenu de la question précédente,

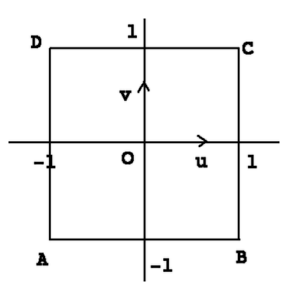
$$\begin{aligned} M \in L \cap C & \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad M \in L_K \cap C_K \\ & \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad M - KI_n \in L_0 \cap C_0 \\ & \Leftrightarrow M \in \operatorname{Vect}(I_n) \oplus \operatorname{Vect}(L_0 \cap C_0). \end{aligned}$$

Notons que la dernière somme de sous-espaces vectoriels est directe parce que $I_n \notin L_0 \cap C_0$. On déduit $L \cap C = \operatorname{Vect}(I_n) \oplus \operatorname{Vect}(L_0 \cap C_0)$ et

$$\dim(L \cap C) = 1 + \dim(L_0 \cap C_0) = 1 + (n-1)^2.$$

PARTIE III

III.1.a. Une isométrie f qui conserve le carré $ABCD$ est affine, donc transforme l'isobarycentre O des sommets A, B, C, D en l'isobarycentre $f(O)$ des images des points A, B, C, D par f. Comme ces images sont les points A, B, C, D, on aura $f(O) = O$.



Ainsi une application f de $\mathcal{I}$ sera soit une rotation de centre O, soit une réflexion par rapport à une droite qui passe par O.

• **Première solution :** Son expression analytique dans le repère $\mathcal{R}$ sera de la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $a^2+b^2 = 1$. Notons $A(-l,-l)$, $B(l,-l)$ etc comme sur le dessin ci-dessus. Dans le premier cas, f est décrit par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On a 4 cas possibles suivant $f(A) \in \{A, B, C, D\}$. Par exemple,

$$f(A) = A \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -l = -al + bl \\ -l = -bl - al \end{array} \right. \Rightarrow (a,b) = (1,0) \Rightarrow f = Id$$

$$f(A) = B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l = -al + bl \\ -l = -bl - al \end{array} \right. \Rightarrow (a,b) = (0,1) \Rightarrow f = r_{O,\pi/2}$$

où $r_{O,\pi/2}$ désigne la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ dans le plan $\mathcal{E}$ orienté par $\mathcal{R}$. Et ainsi de suite. On envisage en tout 8 cas et il est facile de voir que, réciproquement, toutes les isométries obtenues laissent bien le carré globalement invariant. On constate de cette façon que f est donnée par les 8 formules de l'énoncé.

• **Seconde solution :** Soit l la partie linéaire de f. On sait que l est une application orthogonale laissant invariant l'ensemble $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$. On aura donc

$$l(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{||\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}||} l(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{||\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}||} (\overrightarrow{Of(B)} + \overrightarrow{Of(C)}).$$

Le vecteur $l(\overrightarrow{u})$ n'est pas nul (puisque l est un automorphisme) et s'écrit comme la somme de deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Par suite $l(\overrightarrow{u}) \in \{\pm\overrightarrow{u}, \pm\overrightarrow{v}\}$ De la même manière $l(\overrightarrow{v}) \in \{\pm\overrightarrow{u}, \pm\overrightarrow{v}\}$. Comme $(l(\overrightarrow{u}), l(\overrightarrow{v}))$ est une base de $\mathcal{E}$, l'automorphisme l (et donc aussi f, puisque $f(O) = O$) sera de l'un des deux types décrits ci-dessous.

La réciproque est évidente : en effet, une application f du type **1** ou **2** est affine, admet O comme point fixe, et sa partie linéaire transforme une base orthonormale en une base orthonormale, donc est orthogonale.

• **Nature des isométries de $\mathcal{I}$:** On a trouvé deux types d'isométries :

$$\text{Type } \mathbf{1} \text{ de la forme } f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} : \left\{ \begin{array}{l} x' = \varepsilon_1 x \\ y' = \varepsilon_2 y \end{array} \right.$$

$$\text{Type } \mathbf{2} \text{ de la forme } g_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} : \left\{ \begin{array}{l} x' = \varepsilon_1 y \\ y' = \varepsilon_2 x \end{array} \right.$$

La matrice de $f_{-1,1}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est donc celle d'une réflexion. Comme $f_{-1,1}(A) = (l, -l) = B$, $f_{-1,1}$ sera la réflexion par rapport à la médiatrice de $[AB]$. En procédant de cette manière, on arrive aux conclusions suivantes :

$f_{1,1} = Id$,
$f_{-1,1}$ est la réflexion par rapport à la médiatrice de $[AB]$,
$f_{1,-1}$ est la réflexion par rapport à la médiatrice de $[BC]$,
$f_{-1,-1}$ est la symétrie par rapport à l'origine O,
$g_{1,1}$ est la réflexion par rapport à la première bissectrice (AC),
$g_{-1,1} = r_{O,\pi/2}$,
$g_{1,-1} = r_{O,3\pi/2}$,
$g_{-1,-1}$ est la réflexion par rapport à la seconde bissectrice (BD).

III.1.b. Les formules de changement de repère de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{n+1}{2} \\ -\frac{n+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - \frac{n+1}{2} \\ Y - \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}$$

où (x, y) sont les coordonnées de N dans $\mathcal{R}$ et (X, Y) les coordonnées de N dans $\mathcal{R}'$.

Si $f = f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \in \mathcal{I}$ est du type **1**, les coordonnées de $f(N)$ dans $\mathcal{R}$ seront

$$\left(\varepsilon_1 \left(X - \frac{n+1}{2}\right), \varepsilon_2 \left(Y - \frac{n+1}{2}\right)\right)$$

et dans $\mathcal{R}'$ elles seront

$$\left(\varepsilon_1 \left(X - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2}, \varepsilon_2 \left(Y - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2}\right). \tag{8.1}$$

Si $f = g_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \in \mathcal{I}$ est du type **2**, on trouve de la même façon que es coordonnées de $f(N)$ dans $\mathcal{R}'$ seront

$$\left(\varepsilon_1 \left(Y - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2}, \varepsilon_2 \left(X - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2}\right). \tag{8.2}$$

III.2.a. Si l'on note

$$\begin{array}{rccc} c: & \mathcal{E} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & N & \mapsto & c(N) \end{array}$$

la bijection qui à un point N associe ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$, on a

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (s,t) & \mapsto & c\left(f^{-1}\left(c^{-1}(s,t)\right)\right) \end{array}$$

soit $\varphi = c \circ f^{-1} \circ c^{-1}$.

Si $f = f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \in \mathcal{I}$ est du type **1**, on a d'après (8.1) et dans le repère $\mathcal{R}'$,

$$f : \begin{cases} X' = \varepsilon_1 \left(X - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2} \\ Y' = \varepsilon_2 \left(Y - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } f^{-1} : \begin{cases} X = \varepsilon_1 \left(X' - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2} \\ Y = \varepsilon_2 \left(Y' - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2} \end{cases} .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \varphi(i,j) &= c \circ f^{-1} \circ c^{-1}(i,j) \\ &= \left(\varepsilon_1 \left(i - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2}, \varepsilon_2 \left(j - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+1}{2}\right) = (i', j') . \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que $\varphi(i,j) = (i', j') \in \mathbb{N}_n^2$ dès que $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$. Prenons par exemple

$$i' = \begin{cases} i \text{ si } \varepsilon_1 = 1 \\ -i + (n+1) \text{ si } \varepsilon_1 = -1 \end{cases} .$$

Le nombre i' sera entier et compris entre 1 et n.

Le cas où $f = g_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \in \mathcal{I}$ est du type **2** se traite de façon identique.

III.2.b. On a

$$\begin{array}{llll} \Phi_f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M = (m_{ij}) & \mapsto & \Phi_f(M) = \left(m'_{ij}\right) = \left(m_{\varphi(i,j)}\right) = \left(m_{c \circ f^{-1} \circ c^{-1}(i,j)}\right) . \end{array}$$

Si $M = (m_{ij})$, $N = (n_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $M + \lambda N = Q = (q_{ij})$, alors

$$\begin{aligned} \Phi_f(M + \lambda N) &= \left(q'_{ij}\right) = \left(q_{\varphi(i,j)}\right) = \left(m_{\varphi(i,j)} + \lambda n_{\varphi(i,j)}\right) \\ &= \left(m_{\varphi(i,j)}\right) + \lambda \left(n_{\varphi(i,j)}\right) = \Phi_f(M) + \lambda \Phi_f(N) \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de Φ_f.

III.3. On va montrer que l'application

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathcal{I} & \to & \mathcal{F} \\ & f & \mapsto & \Phi_{f^{-1}} \end{array}$$

est une bijection et un homomorphisme pour les lois $\circ$. Comme $(\mathcal{I}, \circ)$ est un groupe, on en déduira que $(\mathcal{F}, \circ)$ est aussi un groupe par transport de structure, et l'on aura montré que φ est un isomorphisme de groupes.

- Tout d'abord φ est surjective par définition de $\mathcal{F}$.
- φ est un homomorphisme pour les loi $\circ$. En effet

$$\begin{cases} \varphi(f \circ g) = \Phi_{(f \circ g)^{-1}} = \Phi_{g^{-1} \circ f^{-1}} \\ \varphi(f) \circ \varphi(g) = \Phi_{f^{-1}} \circ \Phi_{g^{-1}} \end{cases}$$

et pour toute matrice $M = (m_{ij})$,

$$\begin{cases} \Phi_{g^{-1}\circ f^{-1}}(M) = \left(m_{c\circ(g^{-1}\circ f^{-1})^{-1}\circ c^{-1}(i,j)}\right) = \left(m_{c\circ f\circ g\circ c^{-1}(i,j)}\right) \\ \Phi_{f^{-1}}\circ\Phi_{g^{-1}}(M) = \Phi_{f^{-1}}\left(m_{c\circ(g^{-1})^{-1}\circ c^{-1}(i,j)}\right) \\ \qquad\qquad = \left(m_{c\circ(f^{-1})^{-1}\circ c^{-1}\circ c\circ(g^{-1})^{-1}\circ c^{-1}(i,j)}\right) \end{cases}$$

montre que $\Phi_{g^{-1}\circ f^{-1}}(M) = \Phi_{f^{-1}}\circ\Phi_{g^{-1}}(M)$. On a montré l'égalité

$$\varphi(f\circ g) = \varphi(f)\circ\varphi(g).$$

Remarque : Cette égalité s'écrit $\Phi_{g^{-1}\circ f^{-1}} = \Phi_{f^{-1}}\circ\Phi_{g^{-1}}$ soit encore

$$\Phi_{g\circ f} = \Phi_f\circ\Phi_g \text{ pour tout } f,g\in\mathcal{I}. \tag{8.3}$$

- φ est injective. En effet,

$$\begin{aligned}(\varphi(f) = \varphi(g)) &\Rightarrow \Phi_{f^{-1}} = \Phi_{g^{-1}} \Rightarrow \Phi_{f^{-1}}\circ\Phi_f = \Phi_{g^{-1}}\circ\Phi_f \\ &\Rightarrow \Phi_{f\circ f^{-1}} = \Phi_{f\circ g^{-1}} \Rightarrow Id = \Phi_{f\circ g^{-1}} \quad \text{d'après (8.3)} \\ &\Rightarrow \forall M = (m_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad M = \Phi_{f\circ g^{-1}}(M) \\ &\Rightarrow \forall M \quad \forall i,j \quad m_{i,j} = m_{c\circ g\circ f^{-1}\circ c^{-1}(i,j)}.\end{aligned}$$

En remplaçant les matrice M par des matrices $E_{kl} = (\delta_{ij}^{kl})_{ij}$ où δ_{ij}^{kl} est le symbole de Kronecker (i.e. $\delta_{ij}^{kl} = 1$ si $(i,j) = (k,l)$, et 0 sinon), on trouve

$$\forall k,l \quad \forall i,j \quad \delta_{i,j}^{kl} = \delta_{c\circ g\circ f^{-1}\circ c^{-1}(i,j)}^{kl}.$$

En faisant $(i,j) = (k,l)$, on trouve successivement

$$\forall k,l \quad 1 = \delta_{c\circ g\circ f^{-1}\circ c^{-1}(k,l)}^{kl}$$

$$\forall k,l \quad c\circ g\circ f^{-1}\circ c^{-1}(k,l) = (k,l)$$

$$\forall k,l \quad f^{-1}\circ c^{-1}(k,l) = g^{-1}\circ c^{-1}(k,l).$$

Les application affines f^{-1} et g^{-1} coïncide donc en chacun des trois points $c^{-1}(1,1)$, $c^{-1}(2,1)$ et $c^{-1}(1,2)$ qui ne sont pas alignés, donc coïncident partout. Par suite $f = g$.

III.4.a. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice magique et notons

$$\Phi_f(M) = \left(m'_{ij}\right) = \left(m_{\varphi(i,j)}\right).$$

Travaillons dans le cas où f est du type **1**, l'autre cas se traitant de façon similaire. D'après III.2.a :

$$\varphi(i,j) = \left(\varepsilon_1\left(i-\frac{n+1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}, \varepsilon_2\left(j-\frac{n+1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}\right) = \left(i',j'\right). \tag{8.4}$$

• $\varphi : \mathbb{N}_n^2 \to \mathbb{N}_n^2$ est bijective donc $\mathbf{P}_1$ sera encore vraie pour $\Phi_f(M)$.

• Montrons que $\Phi_f(M)$ vérifie $\mathbf{P}_2$. Compte tenu de (8.4),

$$\sum_{j=1}^n m'_{ij} = \sum_{j=1}^n m_{\varphi(i,j)} = \sum_{k=1}^n m_{i'k} = K_n.$$

On traiterait de même les sommes des coefficients des lignes. Pour les termes diagonaux, on écrit

$$\sum_{i=1}^n m'_{ii} = \sum_{i=1}^n m_{\varphi(i,i)}.$$

D'après (8.4),

$$\begin{aligned}\varphi(i,i) &= \left(\varepsilon_1\left(i-\frac{n+1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}, \varepsilon_2\left(i-\frac{n+1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}\right)\\ &= \left(i', \varepsilon_1\varepsilon_2\left(i'-\frac{n+1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n m'_{ii} = \sum_{i'=1}^n m_{\left(i',\varepsilon_1\varepsilon_2\left(i'-\frac{n+1}{2}\right)+\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Si $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, on trouve

$$\sum_{i=1}^n m'_{ii} = \sum_{i'=1}^n m_{(i',i')} = K_n.$$

Si par contre $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$, alors

$$\sum_{i=1}^n m'_{ii} = \sum_{i'=1}^n m_{(i',-i'+n+1)} = K_n$$

toujours d'après $\mathbf{P}_2$.

III.4.b. Notons $\mathrm{Mag}(n)$ l'ensemble des matrices magiques de taille n. On a

$$\begin{aligned}\Phi_f(M) = \Phi_g(M) &\Leftrightarrow \Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_f(M) = \Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g(M)\\ &\Leftrightarrow \Phi_{f \circ g^{-1}}(M) = \Phi_{g \circ g^{-1}}(M) \quad \text{d'après (8.3)}\\ &\Leftrightarrow \Phi_{f \circ g^{-1}}(M) = M.\end{aligned}$$

On répondra à la question si on prouve le lemme :

Lemme : Si $M \in \mathrm{Mag}(n)$ et $f \in \mathcal{I}$ vérifient $\Phi_f(M) = M$, alors $f = Id$.

preuve du lemme : Rappelons que $\Phi_f(M) = (m'_{ij}) = (m_{c\circ f^{-1}\circ c^{-1}(i,j)})$. Alors

$$\Phi_f(M) = M \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad m_{c\circ f^{-1}\circ c^{-1}(i,j)} = m_{ij}.$$

Les coefficients des matrices magiques M et $\Phi_f(M)$ sont tous distincts deux à deux par hypothèse, donc $m_{c\circ f^{-1}\circ c^{-1}(i,j)}$ ne peut être égal à m_{ij} que si les indices sont les mêmes, i.e.

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad c \circ f^{-1} \circ c^{-1}(i,j) = (i,j).$$

ou encore

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad f^{-1}\left(c^{-1}(i,j)\right) = c^{-1}(i,j).$$

Cela signifie que l'application affine f^{-1} coïncide en chacun des points $c^{-1}(i,j)$ qui ne sont pas tous alignés. Nécessairement $f = Id$.

III.4.c. L'ensemble $\mathrm{Mag}(n)$ est fini puisque les coefficients d'une matrice magique ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (les entiers compris entre 1 et n^2).

Le groupe $(\mathcal{I}, \circ)$ opère sur $\mathrm{Mag}(n)$ par la loi :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \times \mathrm{Mag}(n) & \to & \mathrm{Mag}(n) \\ (f, M) & \mapsto & \varphi(f)(M) = \Phi_{f^{-1}}(M). \end{array}$$

Si $M \in \mathrm{Mag}(n)$, notons H_M le sous-groupe d'isotropie de M dans $\mathcal{I}$. Si les orbites de $\mathrm{Mag}(n)$ suivant cette action de groupe sont $O_{M_1}, ..., O_{M_m}$, l'équation des classes s'écrit

$$\#\,\mathrm{Mag}(n) = \sum_{i=1}^{m} \#O_{M_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\#\mathcal{I}}{\#H_{M_i}} \tag{8.5}$$

(où, de façon générale, $\#E$ désigne le cardinal de l'ensemble E).

D'après III.4.b,

$$f \in H_M \Leftrightarrow f(M) = M \Rightarrow f = Id$$

donc $\#H_{M_i} = 1$ et (8.5) devient $\#\,\mathrm{Mag}(n) = m \times (\#\mathcal{I}) = 8m$. Le cardinal de $\mathrm{Mag}(n)$ sera bien un multiple de 8.

Rappel de cours : "Equation des classes".

On dit qu'un groupe $(G, .)$ opère sur un ensemble E s'il existe une application

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \to & E \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

avec

1) $\forall x \in E \quad ex = x$,
2) $\forall x \in E \quad \forall g, g' \in G \quad g(g'x) = (gg')x$.

Si $x \in E$, on appelle orbite de x suivant G l'ensemble

$$O_x = \{y \in E \,/\, \exists g \in G \quad y = gx\}.$$

L'orbite O_x n'est autre que la classe de x suivant la relation d'équivalence : y en relation avec x si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $y = gx$. Les classes O_x forment donc une partition de E. Supposons E fini. Alors le nombre de classes O_x est fini. Notons les O_{x_1}, ..., O_{x_m}. On a

$$\#E = \sum_{i=1}^{m} \#O_{x_i}. \tag{8.6}$$

Décomposons canoniquement l'application (ensembliste)

$$\begin{array}{ccc} G & \to & O_x \\ g & \mapsto & gx. \end{array}$$

On a

$$gx = g'x \Leftrightarrow (g')^{-1} gx = x \Leftrightarrow (g')^{-1} g \in H_x$$

où $H_x = \{g \in G \,/\, gx = x\}$ est le sous-groupe d'isotropie de x dans G (encore appelé stabilisateur de x). On vérifie facilement que H_x est un sous-groupe de G, et la relation $(g')^{-1} g \in H_x$ signifie simplement que g' et g sont en relation à gauche suivant ce sous-groupe. La décomposition canonique entraîne l'existence d'une bijection de G/H_x vers O_x rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \to & O_x \\ \downarrow & \nearrow & \\ G/H_x & & \end{array}$$

Ainsi $\#(G/H_x) = \#O_x$ et en reportant dans (8.6), on obtient l'équation des classes $\#E = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\#G}{\#H_{x_i}}$. (Pour approfondir : [25], chap.1 p.21).

PARTIE IV

IV.1.

$$A_\sigma M = (u_{ij}) \text{ avec } u_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(i)k} m_{kj} = m_{\sigma(i)j},$$
$$MA_\sigma = (v_{ij}) \text{ avec } v_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \delta_{\sigma(k)j} = m_{i\sigma^{-1}(j)}.$$

IV.2. Soient σ, ρ deux éléments dans $\mathfrak{S}_n$. La question précédente appliquée avec $M = A_\rho$ donne $A_\sigma A_\rho = (u_{ij})$ avec $u_{ij} = m_{\sigma(i)j}$ et $m_{ij} = \delta_{\rho(i),j}$. Par suite $u_{ij} = \delta_{\rho\circ\sigma(i),j}$ et $A_\sigma A_\rho = A_{\rho\circ\sigma}$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & (\mathfrak{S}_n, \circ) & \to & (\mathcal{S}, \times) \\ & \sigma & \mapsto & A_{\sigma^{-1}} \end{array}$$

est surjective par définition de $\mathcal{S}$. C'est un morphisme pour les lois $\circ$ et $\times$ puisque pour toutes permutations σ et ρ,

$$\Psi(\sigma \circ \rho) = A_{(\sigma\circ\rho)^{-1}} = A_{\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}} = A_{\sigma^{-1}} \times A_{\rho^{-1}} = \Psi(\sigma) \times \Psi(\rho).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(\sigma \circ \rho) = A_{(\sigma\circ\rho)^{-1}} = \left(\delta_{\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}(i)j}\right)_{i,j} \\ \Psi(\sigma) \times \Psi(\rho) = A_{\sigma^{-1}} \times A_{\rho^{-1}} \underset{\text{IV.1}}{=} \left(\left(A_{\rho^{-1}}\right)_{\sigma^{-1}(i)j}\right)_{i,j} = \left(\delta_{\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}(i)j}\right)_{i,j} \end{array} \right.$$

entraîne $\Psi(\sigma \circ \rho) = \Psi(\sigma) \times \Psi(\rho)$. Enfin ce morphisme est injectif car

$$\begin{aligned} (\Psi(\sigma) = \Psi(\rho)) &\Rightarrow A_{\sigma^{-1}} = A_{\rho^{-1}} \Rightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad \delta_{\sigma^{-1}(i)j} = \delta_{\rho^{-1}(i)j} \\ &\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n \quad 1 = \delta_{\rho^{-1}(i)\sigma^{-1}(i)} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n \quad \rho^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i) \\ &\Rightarrow \sigma = \rho. \end{aligned}$$

En conclusion, Ψ est un homorphisme bijectif pour les lois $\circ$ et $\times$. Comme $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe, l'ensemble $(\mathcal{S}, \times)$ sera structuré en groupe par transport de structure, et $\Psi : \mathfrak{S}_n \to \mathcal{S}$ devient un isomorphisme de groupes.

IV.3.a. Notons commodément $(M)_{ij}$ le coefficient de la matrice M situé à la i-ème ligne et j-ème colonne, et appliquons deux fois la question **IV.1**. On obtient $(A_\sigma M)_{ij} = m_{\sigma(i)j}$, et le (i,j)-ème coefficient de la matrice $A_\sigma M A_{\sigma'}$ sera

$$(A_\sigma M A_{\sigma'})_{ij} = ((A_\sigma M) A_{\sigma'})_{ij} = (A_\sigma M)_{i\sigma'^{-1}(j)} = m_{\sigma(i)\sigma'^{-1}(j)}.$$

Par suite

$$\sum_{j=1}^{n}\left(A_{\sigma}MA_{\sigma'}\right)_{ij}=\sum_{j=1}^{n}m_{\sigma(i)\sigma'^{-1}(j)}=\sum_{k=1}^{n}m_{\sigma(i)k}=K$$

entraîne $A_{\sigma}MA_{\sigma'}\in L_K$. On vérifierait de la même façon que $A_{\sigma}MA_{\sigma'}\in C_K$.

IV.3.b. On sait déjà que $A_{\sigma}MA_{\sigma^{-1}}\in L_K\cap C_K$. On a de plus

$$\sum_{i=1}^{n}\left(A_{\sigma}MA_{\sigma^{-1}}\right)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}m_{\sigma(i)\sigma(i)}=\sum_{k=1}^{n}m_{kk}=K,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(A_{\sigma}MA_{\sigma^{-1}}\right)_{i,n+1-i}=\sum_{i=1}^{n}m_{\sigma(i)\sigma(n+1-i)}=\sum_{i=1}^{n}m_{\sigma(i),n+1-\sigma(i)}=K,$$

de sorte que $A_{\sigma}MA_{\sigma^{-1}}\in \mathrm{Mag}\,(n)$.

IV.4.a. On va montrer que $(\mathfrak{I}_n,\circ)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_n,\circ)$, de sorte que l'on puisse écrire

$$\mathcal{J}=\{A_{\sigma}\,/\,\sigma\in\mathfrak{I}_n\}=\{A_{\sigma^{-1}}\,/\,\sigma\in\mathfrak{I}_n\}=\Psi\left(\mathfrak{I}_n\right)$$

et que $\mathcal{J}$ soit un sous-groupe comme l'image $\Psi\left(\mathfrak{I}_n\right)$ du sous-groupe $\mathfrak{I}_n$ par l'isomorphisme de groupes Ψ.

- L'ensemble $\mathfrak{I}_n$ n'est pas vide (il contient Id).
- Si $\rho,\sigma\in\mathfrak{I}_n$, alors

$$\rho\circ\sigma\left(n+1-i\right)=\rho\left(n+1-\sigma\left(i\right)\right)=n+1-\rho\circ\sigma\left(i\right)$$

montre que $\rho\circ\sigma\in\mathfrak{I}_n$.

- Si $\sigma\in\mathfrak{I}_n$, alors successivement

$$\begin{array}{ll}\forall i\in\mathbb{N}_n & \sigma\left(n+1-i\right)=n+1-\sigma\left(i\right)\\ \forall i\in\mathbb{N}_n & n+1-i=\sigma^{-1}\left[n+1-\sigma\left(i\right)\right]\\ \forall k\in\mathbb{N}_n & n+1-\sigma^{-1}\left(k\right)=\sigma^{-1}\left[n+1-k\right]\end{array}$$

d'où $\sigma^{-1}\in\mathfrak{I}_n$.

IV.4.b. La restriction

$$\begin{array}{rccc}\Psi|_{\mathfrak{I}_n}: & (\mathfrak{I}_n,\circ) & \to & (\mathcal{J},\times)\\ & \sigma & \mapsto & A_{\sigma^{-1}}\end{array}$$

est un isomorphisme de groupes, et dénombrer $\mathcal{J}$ revient donc à dénombrer $\mathfrak{I}_n$. Cherchons donc le nombre de permutations σ telles que

$$\forall i\in\mathbb{N}_n\quad \sigma\left(n+1-i\right)=n+1-\sigma\left(i\right). \tag{8.7}$$

Supposons n pair et notons $n = 2n'$. Une permutation σ de $\mathfrak{I}_n$ est entièrement connue si on la connaît sur la première moitié $\{1, 2, ..., n'\}$ de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ comme le montre le tableau ci-dessous

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & ... & n' & n'+1 & ... & 2n' \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n') & n+1-\sigma(n') & ... & n+1-\sigma(1) \end{array}\right).$$

Il y a n choix possibles pour $\sigma(1)$, mais une fois ce choix effectué, l'entier $\sigma(n) = n + 1 - \sigma(1)$ est déterminé. Il reste donc seulement $n - 2$ choix possibles pour $\sigma(2)$, et ainsi de suite. A la fin, il y aura $n - 2(n' - 1)$ choix possibles pour $\sigma(n')$ et la permutation σ sera déterminée. Il y aura donc

$$n(n-2)(n-4)...\left(n-2\left(n'-1\right)\right) = 2n'\left(2n'-2\right)...2 = 2^{n'}n'!$$

éléments dans $\mathfrak{I}_n$.

Supposons maintenant que n soit impair et notons $n = 2n' + 1$. Il y a maintenant un terme médian dans le tableau donnant σ, et c'est $n' + 1$.

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Terme médian} & & & \\ 1 & 2 & ... & n' & n'+1 & n'+2 & ... & 2n'+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n') & \sigma(n'+1) & n+1-\sigma(n'-1) & ... & n+1-\sigma(1) \end{array}\right).$$

La condition (8.7) vérifiée par σ donne $\sigma(n'+1) = 2n'+2-\sigma(n'+1)$ lorsque $i = n'+1$, d'où $\sigma(n'+1) = n'+1$. Le terme médian $n'+1$ est donc invariant par σ. A part l'élément $n' + 1$ qui ne peut être que l'image de $n' + 1$, le raisonnement est le même que dans le cas pair : il y a $2n'$ choix possibles pour $\sigma(1)$, mais une fois ce choix effectué, $\sigma(n) = n+1-\sigma(1)$ est déterminé. Il restera alors seulement $2n' - 2$ choix possibles pour $\sigma(2)$, etc. Il y aura finalement

$$2n'\left(2n'-2\right)\left(2n'-4\right)...\left(2n'-2\left(n'-1\right)\right) = 2^{n'}n'!$$

éléments dans $\mathfrak{I}_n$.

En conclusion, $\#\mathfrak{I}_n = 2^{n'}n'!$ dès que $n = 2n'$ ou $n = 2n'+1$. Si $[x]$ désigne la partie entière de x, on peut aussi écrire $\#\mathfrak{I}_n = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \times \left[\frac{n}{2}\right]!$.

PARTIE V

V.A.1. Désignons par $\dot{x}$ la classe de x modulo n. On résout un système dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a, par addition,

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{k} = 2\dot{i} + \dot{j} \\ \dot{l} = \dot{i} + 2\dot{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dot{k} - \dot{l} = 3\dot{i} \\ 2\dot{l} - \dot{k} = 3\dot{j} \end{cases}.$$

3 sera premier avec n (puisque c'est un nombre premier et qu'il ne divise pas n) et le théorème de Bezout nous assure l'existence d'un couple d'entiers relatifs (m, m') tels que $3m + nm' = 1$. En passant aux classes, on trouve $\dot{3}\,\dot{m} = \dot{1}$, autrement dit $\dot{3}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et d'inverse $\dot{m}$. Ainsi

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{i} = \dot{m}\left(2\dot{k} - \dot{l}\right) \\ \dot{j} = \dot{m}\left(2\dot{l} - \dot{k}\right). \end{cases}$$

V.A.2.a. L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \dot{x} & \mapsto & \dot{u}\dot{x} + \dot{v} \end{array}$$

est injective dès que $\operatorname{pgcd}(u, n) = 1$. En effet

$$\begin{aligned} \dot{u}\dot{x} + \dot{v} = \dot{u}\dot{y} + \dot{v} &\Leftrightarrow \dot{u}\left(\dot{x} - \dot{y}\right) = \dot{0} \Leftrightarrow n|u\,(x-y) \\ &\Rightarrow n|\,(x-y) \ \text{ (d'après le théorème de Gauss)} \\ &\Rightarrow \dot{x} = \dot{y}. \end{aligned}$$

L'injection f entre deux ensembles de même cardinal sera nécessairement bijective.

V.A.2.b. L'entier $\alpha(k, l)$ est l'unique représentant de la classe

$$\overbrace{\alpha(k,l)}^{\cdot} = \dot{m}(2\dot{k} - \dot{l}) = 2\dot{m}\dot{k} - \dot{m}\dot{l}$$

dans $\mathbb{N}_n$. Comme $\operatorname{pgcd}(m, n) = \operatorname{pgcd}(2, n) = 1$, on déduit $\operatorname{pgcd}(2m, n) = 1$ et l'on peut appliquer **V.A.2.a.** : l'application $f : \dot{k} \mapsto 2\dot{m}\dot{k} - \dot{m}\dot{l}$ est bijective. Les applications du diagramme commutatif suivant sont donc toutes bijectives

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \dot{k} & \mapsto & \overbrace{\alpha(k,l)}^{\cdot} = 2\dot{m}\dot{k} - \dot{m}\dot{l} \\ \uparrow\sim & & \uparrow\sim \\ k & \mapsto & \alpha(k,l) \\ \mathbb{N}_n & \to & \mathbb{N}_n \end{array}$$

Ainsi l'application $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$; $k \mapsto \alpha(k, l)$ est bijective et

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha(k,l) = \sum_{s=1}^{n} s = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De la même manière, $\sum\limits_{l=1}^{n}\alpha(k,l)=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta(k,l)=\sum\limits_{l=1}^{n}\beta(k,l)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

V.A.3. $G=(g_{kl})$ avec $g_{kl}=5(\alpha(k,l)-1)+\beta(k,l)$. L'inverse de $\dot{3}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est $\dot{m}=\dot{2}$ puisque $\dot{3}\times\dot{2}=\dot{1}$. Le calcul de $\alpha(k,l)$ et de $\beta(k,l)$ est alors facile :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{i}=\dot{2}(2\dot{k}-\dot{l})=4\dot{k}-2\dot{l}=\overbrace{\alpha(k,l)}^{\cdot}\\ \dot{j}=\dot{2}(2\dot{l}-\dot{k})=4\dot{l}-2\dot{k}=\overbrace{\beta(k,l)}^{\cdot}.\end{cases}$$

Tableau donnant $\alpha(k,l)$:

k \ l $\alpha(k,l)$	1	2	3	4	5
1	2	5	3	1	4
2	1	4	2	5	3
3	5	3	1	4	2
4	4	2	5	3	1
5	3	1	4	2	5

Tableau donnant $\beta(k,l)$:

k \ l $\beta(k,l)$	1	2	3	4	5
1	2	1	5	4	3
2	5	4	3	2	1
3	3	2	1	5	4
4	1	5	4	3	2
5	4	3	2	1	5

Par conséquent :

$$G=\begin{pmatrix}7&21&15&4&18\\5&19&8&22&11\\23&12&1&20&9\\16&10&24&13&2\\14&3&17&6&25\end{pmatrix}.$$

V.A.4.a. Notons $\operatorname{Coeff}(G)$ l'ensemble des coefficients de $G=(g_{kl})$. On va montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc}c: & \mathbb{N}_n^2 & \to & \operatorname{Coeff}(G)\\ & (k,l) & \mapsto & g_{kl}\end{array}$$

est injective et que $\operatorname{Coeff}(G)\subset\mathbb{N}_{n^2}$. Dans ce cas on pourra déduire

$$n^2=\#\operatorname{Im}c\leq\#\operatorname{Coeff}(G)\leq n^2,$$

soit $\operatorname{Coeff}(G)=\mathbb{N}_{n^2}$. On a

$$\left.\begin{array}{l}1\leq\alpha(k,l)\leq n\\1\leq\beta(k,l)\leq n\end{array}\right\}\Rightarrow 1\leq n(\alpha(k,l)-1)+\beta(k,l)\leq n(n-1)+n$$
$$\Rightarrow 1\leq g_{kl}\leq n^2$$

d'où $\operatorname{Coeff}(G)\subset\mathbb{N}_{n^2}$. L'injectivité se prouve ainsi : Si $g_{kl}=g_{k'l'}$, alors

$$n(\alpha(k,l)-1)+\beta(k,l)=n\left(\alpha\left(k',l'\right)-1\right)+\beta\left(k',l'\right)$$
$$n\left(\alpha(k,l)-\alpha\left(k',l'\right)\right)=\beta\left(k',l'\right)-\beta(k,l)$$

et n divisera $\beta(k',l') - \beta(k,l)$. Comme $0 \leq |\beta(k',l') - \beta(k,l)| \leq n-1$, cela entraîne $\beta(k',l') = \beta(k,l)$ et par conséquent $\alpha(k,l) = \alpha(k',l')$. Ces deux égalités entraînent à leur tour $(k',l') = (k,l)$ puisque $(\alpha(k,l), \beta(k,l))$ est l'unique solution dans $\mathbb{N}_n^2$ du système (S) de **V.A.1.**

V.A.4.b. Posons $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. D'après **V.A.2.b**, $\sum_{k=1}^{n} \alpha(k,l) = S$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} g_{kl} &= \sum_{k=1}^{n} \left(n\left(\alpha(k,l)-1\right) + \beta(k,l)\right) = (n+1)\,S - n^2 \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} - n^2 = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2} = K_n.\end{aligned}$$

De même $\sum_{l=1}^{n} g_{kl} = K_n$. Ensuite

$$\sum_{k=1}^{n} g_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \left(n\left(\alpha(k,k)-1\right) + \beta(k,k)\right).$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_n & \to & \mathbb{N}_n \\ k & \mapsto & \alpha(k,k) \end{array}$$

est bijective car l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \dot{k} & \mapsto & \overset{\cdot}{\overbrace{\alpha(k,k)}} = \dot{m}\dot{k} \end{array}$$

l'est d'après V.A.2.a (en effet $\operatorname{pgcd}(m,n) = 1$). Donc

$$\sum_{k=1}^{n} g_{kk} = (n+1)\,S - n^2 = K_n.$$

Enfin l'on aura toujours de la même façon

$$\sum_{k=1}^{n} g_{k,n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \left(n\left(\alpha(k,n+1-k)-1\right) + \beta(k,n+1-k)\right) = K_n$$

puisque les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_n & \to & \mathbb{N}_n \\ k & \mapsto & \alpha(k,n+1-k) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_n & \to & \mathbb{N}_n \\ k & \mapsto & \beta(k,n+1-k) \end{array}$$

sont bijectives. En effet, pour la première application, on vérifie que

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \dot{k} & \mapsto & \overset{\cdot}{\overbrace{\alpha\left(k,n+1-k\right)}} = \dot{m}(2\dot{k} - (\overset{\cdot}{\overbrace{n+1-k}})) = 3\dot{m}\dot{k} - \dot{m} \end{array}$$

est bijective d'après **V.A.2.a** puisque et $\operatorname{pgcd}(3m,n) = 1$. En conclusion $G \in \operatorname{Mag}(n)$.

V.A.5.a. On aura

$$\sum_{(k,l)\in E_i} g_{kk} = \sum_{(k,l)\in E_i} \left(n\left(\alpha\left(k,l\right)-1\right)+\beta\left(k,l\right)\right) = K_n$$

comme en V.A.4 si l'on montre que $\sum_{(k,l)\in E_i} \alpha\left(k,l\right) = S$, i.e. que l'application

$$\begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbb{N}_n \\ (k,l) & \mapsto & \alpha\left(k,l\right) \end{array}$$

est bijective. Cela revient à montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} E_i & \overset{u}{\to} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (k,l) & \mapsto & \overset{\cdot}{\overbrace{\alpha\left(k,l\right)}} \end{array}$$

est bijective. Pour tout $(k,l) \in E_i$,

$$\overset{\cdot}{\overbrace{\alpha\left(k,l\right)}} = \dot{m}(2\dot{k} - \dot{l}) = \dot{m}(2\dot{k} - \dot{k} + \dot{i}) = \dot{m}\dot{k} + \dot{m}\dot{i}$$

et $\operatorname{pgcd}(m,n) = 1$. Cela prouve que l'application v définie par $v\left(k\right) = \overset{\cdot}{\overbrace{\alpha\left(k,l\right)}}$ du diagramme commutatif ci-dessous est bijective (V.A.2.a) :

$$\begin{array}{ccc} E_i & \overset{u}{\to} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (k,l) & \mapsto & \overset{\cdot}{\overbrace{\alpha\left(k,l\right)}} = \dot{m}\dot{k} + \dot{m}\dot{i} \\ \downarrow_p & \nearrow_v & \\ \mathbb{N}_n & & \end{array}$$

Comme la première projection $p : E_i \to \mathbb{N}_n; (k,l) \mapsto k$ est aussi bijective (en effet, si $k \in \mathbb{N}_n$ il existe un et un seul $(k,l) \in E_i$ se projetant sur k, cela équivalant à $\dot{l} = \dot{k} - \dot{i}$), $u = v \circ p$ sera bien bijective comme composée de deux bijections.

V.A.5.b. On prends $F_i = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}_n^2 \,/\, k+l \equiv i \ (n)\right\}$ puisqu'alors

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N}_n & \stackrel{u}{\rightarrow} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k & \mapsto & \overbrace{\alpha\,(k,l)}^{\cdot} = \dot{m}(2\dot{k} - \dot{l}) = \dot{3}\dot{m}\dot{k} - \dot{m}\dot{i} \end{array}$$

est encore bijective puisque pgcd $(3m, n) = 1$. On peut raisonner comme en V.A.5.a.

V.B.1. $D = (d_{uv})_{u,v}$ avec $d_{3(i-1)+k,3(j-1)+l} = a_{kl} + 9\,(a_{ij} - 1)$. Il n'y a pas de difficulté pour ce type de calculs. On envisage tous les cas :

• Si $(i,j) = (1,1)$, $d_{k,l} = a_{kl} + 9\,(a_{11} - 1) = a_{kl} + 27$ et l'on trouve la sous-matrice $D_{11} = (d_{uv})_{\substack{1\leq u\leq 3\\ 1\leq v\leq 3}}$ de D, soit

$$D_{11} = \begin{pmatrix} 31 & 30 & 35 \\ 36 & 32 & 28 \\ 29 & 34 & 33 \end{pmatrix}.$$

• Si $(i,j) = (1,2)$, $d_{k,3+l} = a_{kl} + 9\,(a_{12} - 1) = a_{kl} + 18$, d'où la sous-matrice $D_{12} = (d_{uv})_{\substack{1\leq u\leq 3\\ 4\leq v\leq 6}}$ de D, soit

$$D_{12} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 26 \\ 27 & 23 & 19 \\ 20 & 25 & 24 \end{pmatrix}.$$

Et ainsi de suite. Finalement, on regroupe ces matrices pour obtenir

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Pendant les 5 heures d'épreuve, il serait peu rentable de se lancer dans le calcul systématique de tous les coefficients de D, du moins tant que d'autres parties du problème "abordables par le candidat" restent à traiter. Dans ce cas, on se contente de donner le calcul de quelques coefficients, par exemple ceux des sous-matrices D_{11} et D_{12} ci-dessus. Comme nous avons ici plus de temps (!), écrivons un programme qui calcule tous les coefficients de D sur Maple.

Programme pour Maple :

```
>a[1,1] :=4 ; a[1,2] :=3 ; a[1,3] :=8 ; a[2,1] :=9 ; a[2,2] :=5 ;a[2,3] :=1 ;
a[3,1] :=2 ; a[3,2] :=7 ; a[3,3] :=6 ;
>for i from 1 to 3 do
>for j from 1 to 3 do
```

```
>for k from 1 to 3 do
>for l from 1 to 3 do
>u :=(i-1)*3+k ; v :=(j-1)*3+l ;
>b[u,v] :=a[k,l]+9*(a[i,j]-1) ;
>print (u,v,b[u,v]) ;
>od ; od ; od ; od ;
```

On trouve :

1, 1, 31	1, 2, 30	1, 3, 35	2, 1, 36	2, 2, 32	2, 3, 28
3, 1, 29	3, 2, 34	3, 3, 33	1, 4, 22	1, 5, 21	1, 6, 26
2, 4, 27	2, 5, 23	2, 6, 19	3, 4, 20	3, 5, 25	3, 6, 24
1, 7, 67	1, 8, 66	1, 9, 71	2, 7, 72	2, 8, 68	2, 9, 64
3, 7, 65	3, 8, 70	3, 9, 69	4, 1, 76	4, 2, 75	4, 3, 80
5, 1, 81	5, 2, 77	5, 3, 73	6, 1, 74	6, 2, 79	6, 3, 78
4, 4, 40	4, 5, 39	4, 6, 44	5, 4, 45	5, 5, 41	5, 6, 37
6, 4, 38	6, 5, 43	6, 6, 42	4, 7, 4	4, 8, 3	4, 9, 8
5, 7, 9	5, 8, 5	5, 9, 1	6, 7, 2	6, 8, 7	6, 9, 6
7, 1, 13	7, 2, 12	7, 3, 17	8, 1, 18	8, 2, 14	8, 3, 10
9, 1, 11	9, 2, 16	9, 3, 15	7, 4, 58	7, 5, 57	7, 6, 62
8, 4, 63	8, 5, 59	8, 6, 55	9, 4, 56	9, 5, 61	9, 6, 60
7, 7, 49	7, 8, 48	7, 9, 53	8, 7, 54	8, 8, 50	8, 9, 46
9, 7, 47	9, 8, 52	9, 9, 51			

En regroupant les résultats, on obtient

$$D = \begin{pmatrix} 31 & 30 & 35 & 22 & 21 & 26 & 67 & 66 & 71 \\ 36 & 32 & 28 & 27 & 23 & 19 & 72 & 68 & 64 \\ 29 & 34 & 33 & 20 & 25 & 24 & 65 & 70 & 69 \\ 76 & 75 & 80 & 40 & 39 & 44 & 4 & 3 & 8 \\ 81 & 77 & 73 & 45 & 41 & 37 & 9 & 5 & 1 \\ 74 & 79 & 78 & 38 & 43 & 42 & 2 & 7 & 6 \\ 13 & 12 & 17 & 58 & 57 & 62 & 49 & 48 & 53 \\ 18 & 14 & 10 & 63 & 59 & 55 & 54 & 50 & 46 \\ 11 & 16 & 15 & 56 & 61 & 60 & 47 & 52 & 51 \end{pmatrix}.$$

V.B.2. Les premiers indices de $(i-1)\,p+k$ sont parcourus de cette façon lorsque i décrit $\mathbb{N}_q$ et k décrit $\mathbb{N}_p$:

$$\underbrace{1, 2, ..., p}_{i=1}, \underbrace{p+1, p+2, ..., 2p}_{i=2}, ..., \underbrace{(q-1)\,p+1, (q-1)\,p+2, ..., qp}_{i=q}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{pq} d_{uv} &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} d_{(i-1)p+k,(j-1)p+l} \qquad (8.8)\\ &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}\left(a_{kl}+(b_{ij}-1)\,p^2\right) \qquad (8.9)\\ &= \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{kl}\right)+p^2\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(b_{ij}-1)\\ &= q\left(\sum_{k=1}^{p} a_{kl}\right)+p^3\sum_{i=1}^{q}(b_{ij}-1)\,.\end{aligned}$$

Comme l et j sont fixés et que A et B sont magiques,

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{pq} d_{uv} &= qK_p+p^3\left(K_q-q\right)=qK_p+p^3K_q-p^3q\\ &= q\frac{p\left(p^2+1\right)}{2}+p^3\frac{q\left(q^2+1\right)}{2}-p^3q=\frac{pq\left(p^2q^2+1\right)}{2}=K_{pq}.\end{aligned}$$

On montrerait de même que $\sum_{v=1}^{pq} d_{uv}=K_{pq}$. D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{pq} d_{uu} &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} d_{(i-1)p+k,(i-1)p+k}=\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}\left(a_{kk}+(b_{ii}-1)\,p^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{kk}\right)+p^2\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(b_{ii}-1)\end{aligned}$$

et l'on retrouve les mêmes calculs qu'en (8.8). Compte tenu de $\sum_{k=1}^{p} a_{kk}=K_p$ et $\sum_{i=1}^{q} b_{ii}=K_q$, on trouve encore $\sum_{u=1}^{pq} d_{uu}=K_{pq}$. La dernière vérification est du même gabarit :

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{pq} d_{u,pq+1-u} &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} d_{(i-1)p+k,pq+1-(i-1)p-k} \\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} d_{(i-1)p+k,(q-i)p+p+1-k} \\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} \left(a_{k,p+1-k} + (b_{i,q+1-i} - 1)\, p^2\right) \\
&= q\left(\sum_{k=1}^{p} a_{k,p+1-k}\right) + p^3 \sum_{i=1}^{q} (b_{i,q+1-i} - 1) \\
&= qK_p + p^3 K_q - p^3 q = K_{pq}.
\end{aligned}$$

Il reste maintenant seulement à vérifier que tous les coefficients d_{uv} de D sont distincts. On a

$$\begin{aligned}
d_{uv} = d_{u'v'} &\Leftrightarrow d_{(i-1)p+k,(j-1)p+l} = d_{(i'-1)p+k',(j'-1)p+l'} \\
&\Leftrightarrow a_{kl} + (b_{ij} - 1)\, p^2 = a_{k'l'} + (b_{i'j'} - 1)p^2 \\
&\Leftrightarrow a_{kl} - a_{k'l'} = \left((b_{ij} - 1) - (b_{i'j'} - 1)\right) p^2.
\end{aligned}$$

Donc p^2 divise $a_{kl} - a_{k'l'}$. Comme $a_{kl}, a_{k'l'} \in \mathbb{N}_{p^2}$ entraîne $|a_{kl} - a_{k'l'}| < p^2$, on aura nécessairement $a_{kl} = a_{k'l'}$. D'où $b_{ij} = b_{i'j'}$. On en déduit

$$(k, l, i, j) = \left(k', l', i', j'\right)$$

soit $(u, v) = (u', v')$.

Par ailleurs, il est facile de voir que $d_{uv} \in \mathbb{N}_{p^2q^2}$ pour tout (u, v), et l'on peut affirmer que la matrice D est magique.

V.B.3. On écrit $n = 3^k q$ avec $\operatorname{pgcd}(3, q) = 1$. La partie V nous donne au moins une matrice magique Q de taille q. La partie I nous fournit une matrice magique A de taille 3, et le procédé ci-dessus permet de construire successivement des matrices magiques de tailles $3q$, $3q^2$, ..., $3^k q$.

Chapitre 9

CAPES externe 2000, épreuve 2

9.1 Énoncé

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3 et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ son espace vectoriel associé. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée $||\overrightarrow{u}||$. La distance de deux points A et B de $\mathcal{E}$ est notée AB, soit $AB = ||\overrightarrow{AB}||$.

Si $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on repérera un point M par un triplet de ses coordonnées sphériques (r, φ, θ) dans $[0, +\infty[\times[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi[$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{i} = r\cos\varphi\cos\theta \\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{j} = r\cos\varphi\sin\theta \\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{k} = r\sin\varphi, \end{array} \right.$$

ou en d'autres termes tout triplet $(0, \varphi, \theta)$ est un triplet de coordonnées sphériques de O ;

tout triplet $\left(\lambda, \frac{\pi}{2}, \theta\right)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{k}$ avec $\lambda > 0$;

tout triplet $\left(-\lambda, -\frac{\pi}{2}, \theta\right)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{k}$ avec $\lambda < 0$;

enfin si M n'appartient pas à la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$, alors si on désigne par m la projection orthogonale de M sur le

[0] [ag48e] v1.01

plan passant par O et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, φ est une mesure en radians comprise strictement entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ de l'angle $(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$ et θ est une mesure en radians appartenant à $[0, 2\pi[$ de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{Om})$.

Étant donnés deux points X et Y de $\mathcal{E}$, on note $[XY]$ le segment d'extrémités X et Y et si X et Y sont distincts, on note $\mathcal{D}_{(X,Y)}$ la droite passant par X et Y.

On rappelle qu'étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C et D, on appelle tétraèdre de sommets A, B, C et D l'enveloppe convexe de ces quatre points, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles. On note $T = ABCD$ ce tétraèdre.

Un point X de $T = ABCD$ est dit extrémal si pour tout couple de points Y et Z de T, on a :

si X est le milieu du segment $[YZ]$, alors $Y = Z$.

On rappelle que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets. Les arêtes du tétraèdre $T = ABCD$ sont les segments d'extrémités deux sommets. Un tétraèdre est régulier si toutes ses arêtes sont de même longueur.

On désigne par vol, l'application de $\mathcal{E}^4$ dans $\mathbb{R}^+$ qui au quadruplet de points (A, B, C, D) associe le nombre :

$$\mathrm{vol}(A, B, C, D) = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| \qquad (1)$$

On rappelle que le nombre $V = \mathrm{vol}(A, B, C, D)$ est le volume du tétraèdre $T = ABCD$.

Soit $\{A, B, C, D\}$ un ensemble de cardinal 4. On note Σ le groupe des permutations de cet ensemble. Une permutation ρ appartenant à Σ pourra être notée $[(A, B, C, D) \mapsto (\rho(A), \rho(B), \rho(C), \rho(D))]$ ou en utilisant la notation usuelle en produit de cycles. On désigne par τ la transposition de A et de B, on notera $\tau = [(A, B, C, D) \mapsto (B, A, C, D)]$ ou encore $\tau = (AB)$; on désigne par σ le cycle qui à B associe C, à C associe D, à D associe B et qui laisse A fixe, on notera $\sigma = [(A, B, C, D) \mapsto (A, C, D, B)]$ ou encore $\sigma = (BCD)$; on notera id l'application identique de Σ, soit $id = [(A, B, C, D) \mapsto (A, B, C, D)]$.

La première partie du problème a pour but de caractériser des plans parta-geant un tétraèdre quelconque en deux parties dont les volumes sont $1/8$ *et* $7/8$ *du volume de ce tétraèdre. Les trois autres parties sont consacrées au tétraèdre régulier. La deuxième partie étudie la caractérisation d'un tétraèdre régulier par les projections orthogonales de ses sommets sur une droite. La* *troisième partie étudie quelques aspects du groupe des isométries d'un tétraèdre régulier et de fonctions définies sur une sphère invariante par ce groupe. Enfin la dernière partie est une application de la géométrie du tétraèdre à la description d'une expérience aléatoire.*

Les diverses parties du problème sont dans une large mesure indépendantes et peuvent être traitées indépendamment les unes des autres, dans l'ordre que le candidat souhaitera.

I. A PROPOS DU TETRAEDRE QUELCONQUE

On suppose donnés A, B , C et D, quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$.

1. a. Montrer que les points A, B, C et D sont deux à deux distincts. Quel est l'ordre du groupe Σ ?

b. Expliciter les permutations suivantes à l'aide de cycles :

$$\tau^2, \sigma^3, \tau\sigma, (\tau\sigma)^4, \sigma\tau\sigma^2, \sigma^2\tau\sigma, \tau\sigma\tau\sigma^2\tau, \tau\sigma^2\tau\sigma\tau, \tau\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma.$$

c. Montrer que σ et τ engendrent Σ.

d. Déduire de c. que pour toute permutation ρ appartenant à Σ

$$\mathrm{vol}\,(\rho(A), \rho(B), \rho(C), \rho(D)) = \mathrm{vol}\,(A, B, C, D).$$

e. Peut-on déduire le résultat précédent de ce que $\mathrm{vol}\,(A, B, C, D)$ est le volume du tétraèdre $ABCD$?

2. Soit H_A le projeté orthogonal de A sur le plan passant par B, C et D. Montrer à partir de (1) que le volume du tétraèdre T peut aussi s'écrire :

$$V = \mathrm{vol}\,(A, B, C, D) = \frac{1}{3} AH_A \times \mathrm{aire}\,(BCD)$$

où $\mathrm{aire}\,(BCD)$ désigne l'aire du triangle BCD.

3. Soit λ un réel strictement compris entre 0 et 1 et soit L le barycentre de A et H_A affectés des masses λ et $1-\lambda$. Montrer que le plan P passant par L et perpendiculaire à $\mathcal{D}_{(A,H_A)}$ coupe les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. On désigne les points d'intersections correspondants par S_B, S_C et S_D. L'intersection du tétraèdre T et du demi-espace limité par P et contenant A est le tétraèdre $AS_BS_CS_D$. Soit v_1 le volume de cette intersection et soit v_2 le volume de l'intersection du tétraèdre T avec le demi-espace limité par P et contenant B.

a. Déterminer la valeur λ_1 de λ telle que $v_1 = \dfrac{V}{8}$.

b. Déterminer la valeur λ_2 de λ telle que $v_2 = \dfrac{V}{8}$.

4. a. Montrer qu'il existe un couple unique de points (I, J) tel que I appartienne à $\mathcal{D}_{(A,B)}$, que J appartienne à $\mathcal{D}_{(C,D)}$, que $\mathcal{D}_{(I,J)}$ soit perpendiculaire à $\mathcal{D}_{(A,B)}$ et que $\mathcal{D}_{(I,J)}$ soit perpendiculaire à $\mathcal{D}_{(C,D)}$.

b. Soit μ un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et soit M le barycentre de I et de J affectés des masses μ et $1-\mu$. Montrer que le plan Q passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{D}_{(I,J)}$ coupe les arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[BD]$; on note ces intersections respectivement U_{AC}, U_{AD}, U_{BC} et U_{BD}. Montrer que $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ est un parallélogramme.

c. Dans cette question $\mu = \dfrac{1}{3}$. Dessiner sans commentaire les deux figures planes obtenues par projections orthogonales des arêtes du tétraèdre T et des côtés du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ d'une part sur le plan Q, d'autre part sur le plan passant par A, B et J (on supposera que $\mathcal{D}_{(C,D)}$ et $\mathcal{D}_{(A,B)}$ ne sont pas orthogonales).

d. On suppose de nouveau μ quelconque dans $]0,1[$. Exprimer l'aire du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ en fonction de μ, et de l'aire W d'un parallélogramme $U_1U_2U_3U_4$ tel que $\overrightarrow{U_1U_2} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{U_2U_3} = \overrightarrow{CD}$.

e. Exprimer le volume V du tétraèdre $T = ABCD$ en fonction de W et de la distance IJ .

f. On désigne par v_3 le volume de l'intersection de T avec le demi-espace limité par Q et contenant les points C et D. Déterminer la fonction polynomiale f de degré 3, qui s'annule en 0 et qui est telle que les équations en μ dans $]0,1[$:

$$f(\mu) + \frac{1}{8} = 0 \qquad (2)$$

et $v_3 = \dfrac{V}{8}$ soient équivalentes. Montrer que (2) admet une solution unique μ_0 dans l'intervalle $]0,1[$.

g. Vérifier que $f(1-\mu_0) + \dfrac{7}{8} = 0$. Pourquoi pouvait-on prévoir ce résultat ?

h. On définit les fonctions réelles de variable réelle g et h par $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{8}$ et $h(x) = \dfrac{32x^3 - 24x^2 - 1}{48x(x-1)}$, et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n . Montrer que g et g' sont décroissantes sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ_0. Calculer u_1 et u_2. Montrer que $0,22 < \mu_0$. Donner une valeur approchée de μ à 2.10^{-3} près.

i. Montrer que h'' est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$, calculer à la calculatrice une valeur approchée de $h''(0,2)$ et vérifier que $h''(0,2) < 5$. Montrer que pour n

entier naturel, on a :

$$(u_{n+1} - \mu_0) < 5\,(u_n - \mu_0)^2 .$$

Montrer que u_4 est une approximation de μ_0 à 10^{-7} près et que u_5 est une approximation de μ_0 à 10^{-13} près.

II. IMAGES PAR PROJECTIONS ORTHOGONALES D'UN TETRAEDRE RÉGULIER

Dans la suite du problème on ne considère que des tétraèdres réguliers.

II. A. **Projection orthogonale d'un tétraèdre régulier sur une droite.**

1. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit A, B, C et D les points qui ont pour coordonnées respectives dans ce repère $(0, 0, 3)$, $(2\sqrt{2}, 0, -1)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{6}, -1)$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1)$.

a. Montrer que le tétraèdre $T = ABCD$ est régulier. Quel est son volume V ?

b. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon 1, de coordonnées sphériques $(1, \varphi, \theta)$. On projette orthogonalement sur la droite $\mathcal{D}_{(O,M)}$ les sommets A, B, C et D du tétraèdre T respectivement en A', B', C' et D'. On choisit sur la droite $\mathcal{D}_{(O,M)}$ le repère d'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{OM}$. On note t_A, t_B, t_C et t_D les abscisses des points A', B', C' et D' dans ce repère $(O, \overrightarrow{OM})$. Vérifier que :

$$\begin{cases} t_A = 3\sin\varphi \\ t_B = -\sin\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta \\ t_C = -\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta - \sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta \\ t_D = -\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta + \sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta. \end{cases}$$

Un calcul élémentaire mais un peu long qu'on ne demande pas d'effectuer montre que

$$3(A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2) - 2(\overline{A'B'}.\overline{A'C'} + \overline{A'B'}.\overline{A'D'} + \overline{A'C'}.\overline{A'D'})$$

est un nombre indépendant de φ et de θ.

c. La forme quadratique q_0 définie par :

$$q_0\,(\beta, \gamma, \delta) = 3(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 2\,(\gamma\delta + \delta\beta + \beta\gamma)$$

est-elle définie positive ?

2. Soit $T = ABCD$ un tétraèdre régulier quelconque d'arête de longueur l. Soit Δ' une droite quelconque et A', B', C', D' les projetés orthogonaux de A,

B, C, D sur Δ'. On va montrer qu'il existe une forme quadratique unique q telle que :

$$l^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}).$$

a. Déduire de la question précédente qu'il existe une telle forme quadratique q. (On pourra choisir une unité de longueur telle que l soit égal à $2\sqrt{6}$ fois cette unité et un repère judicieux et utiliser le résultat de la question précédente pour montrer tout d'abord le résultat dans le cas où Δ' passe par le centre du tétraèdre).

b. On suppose que q est une forme quadratique telle que

$$l^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}).$$

i. Pourquoi la formule $l^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$ a-t-elle un sens indépendamment du choix d'une orientation de Δ' ?

ii. Déduire du fait que T est régulier qu'il existe un nombre réel k tel que pour tous α, β et γ réels, on ait :

$$q(\alpha, \beta, \gamma) = k\left[3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\right].$$

iii. Déterminer k. On pourra considérer le cas où Δ' est la droite passant par A et B.

c. Montrer que :

$$2l^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2.$$

II. B. **Projection orthogonale d'un tétraèdre régulier sur un plan.**

Soit $T = ABCD$ un tétraèdre régulier quelconque d'arête de longueur l. Soit Π_1 un plan quelconque et A_1, B_1, C_1 et D_1 les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Π_1. Soit Δ' une droite orthogonale à Π_1, et A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Δ'.

1. Montrer que :

$$4l^2 = A_1B_1^2 + A_1^2C_1^2 + A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + B_1D_1^2 + C_1D_1^2$$

(on pourra considérer la droite Δ' orthogonale à Π_1 ou introduire deux droites Δ'_1 et Δ'_2 orthogonales incluses dans Π_1).

2. Dans cette question on ne demande que des dessins sans aucune justification. On choisit le centimètre comme unité de longueur. On suppose que les points A', B', C' et D' de la droite Δ' sont tous distincts et vérifient :

$$A'B' = B'C' = C'D' = 4.$$

a. Dessiner la disposition des points A', B', C' et D' sur la droite Δ'. Dessiner en vraie grandeur la figure obtenue par projection orthogonale des arêtes de T dans le plan Π_1.

b. Soit M' un point de Δ'. Dessiner sur la figure dans le plan Π_1 de la question précédente la projection orthogonale de la section du tétraèdre avec le plan orthogonal à Δ' passant par M', pour les cinq positions suivantes de M' : M'_1 milieu de $[A'B']$, $M'_2 = B'$, M'_3 milieu de $[B'C']$, $M'_4 = C'$ et M'_5 milieu de $[C'D']$.

3. Soit A', B', C' et D' quatre points d'une droite Δ'. On suppose qu'au moins deux d'entre eux sont distincts. On cherche les tétraèdres réguliers $T = ABCD$ tels que A se projette orthogonalement sur Δ' en A', B en B', C en C' et D en D'. On définit le nombre positif l par :

$$2l^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2.$$

a. Déduire de la relation précédente que :

(i) $l^2 \geq A'B'^2$

et que :

(ii) $\dfrac{1}{l^2}\left(\dfrac{\overline{A'B'} + \overline{B'C'}}{2}\right)^2 \leq \dfrac{3}{4}\left(1 - \dfrac{A'B'^2}{l^2}\right).$

b. Montrer que s'il existe un tétraèdre régulier $T = ABCD$ tel que A se projette orthogonalement sur Δ' en A', B en B', C en C' et D en D', il est unique à une isométrie près appartenant à un groupe que l'on précisera.

c. Montrer que l'on peut faire les choix successifs suivants :

(i) choisir un point A du plan orthogonal à Δ', passant par A' ;

(ii) choisir un point B du plan orthogonal à Δ', passant par B' , tel que $AB = l$;

(iii) choisir un point C du plan orthogonal à Δ', passant par C' , tel que $CA = CB = l$;

(iv) choisir un point D du plan orthogonal à Δ', passant par D' , tel que $DA = DB = DC = l$.

Conclure.

III. SYMÉTRIES DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER

On utilise les notations de la partie II.A.1. et celles de l'introduction : on rappelle que le repère est supposé orthonormé et que dans la question II.A.1.a. on a montré que le tétraèdre $T = ABCD$ est régulier.

1. Soit ρ appartenant à Σ. Montrer qu'il existe une isométrie de $\mathcal{E}$ unique, notée t, telle que $f(A) = \rho(A)$, $t(B) = \rho(B)$, $t(C) = \rho(C)$ et $t(D) = \rho(D)$. On désigne par ψ l'application qui à ρ associe t. L'application ψ est-elle un homomorphisme de groupes ? L'application ψ est-elle injective, surjective, bijective ?

2. Montrer que $\Sigma' = \psi(\Sigma)$ est l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ qui conservent globalement le tétraèdre T.

3. Pour toute permutation ρ de Σ, on note L_ρ la matrice, relativement à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, de l'isométrie vectorielle $\overrightarrow{\psi(\rho)}$ associée à $\psi(\rho)$.

a. Vérifier que :

$$L_\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\psi(\tau)$ est une réflexion ; préciser par rapport à quel plan. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L_τ ?

b. Déterminer L_σ. Montrer que $\psi(\sigma)$ est une rotation ; préciser pour cette rotation : son axe, ses axes orientés, ses angles orientés et leurs mesures. Quelles sont les valeurs propres réelles ou complexes et les vecteurs propres réels ou complexes de la matrice L_σ ?

c. On désigne par ρ_3 la permutation de $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_3(A) = B$, $\rho_3(B) = C$, $\rho_3(C) = D$ et $\rho_3(D) = A$, soit $\rho_3 = (ABCD)$. Montrer que l'image du milieu M_{AC} du segment $[AC]$ par $\psi(\rho_3)$ est le milieu M_{BD} du segment $[BD]$, point symétrique de M_{AC} par rapport à O.

Montrer que la restriction de $\psi(\rho_3)$ au plan médiateur du segment $[M_{AC}M_{BD}]$ est une rotation d'angle de mesure $\pi/2$. En déduire les valeurs propres de L_{ρ_3} et le polynôme caractéristique de L_{ρ_3}. Montrer que $L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma$; écrire explicitement la matrice L_{ρ_3} puis retrouver son polynôme caractéristique.

d. On désigne par ρ_4 la permutation de $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_4(A) = C$, $\rho_4(B) = D$, $\rho_4(C) = A$ et $\rho_4(D) = B$, soit $\rho_4 = (AC)(BD)$. Décrire la transformation géométrique $\psi(\rho_4)$. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice L_{ρ_4} ? Il n'est pas demandé d'écrire explicitement la matrice L_{ρ_4}.

4. On trace sur la sphère Ω circonscrite au tétraèdre $ABCD$ tous les grands cercles passant par deux sommets du tétraèdre (un grand cercle est un cercle inclus dans la sphère et centré au centre de la sphère ou encore l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre de la sphère). On appellera points simples les points communs à deux tels grands cercles et points triples les points communs à trois tels grands cercles. Dénombrer le nombre de points simples et le nombre de points triples. Quelles sont les coordonnées sphériques des points simples ?

5. On repère tout point M de Ω par ses coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$.

a. Montrer que M appartient au grand cercle passant par C et D si et seulement si : $\sqrt{2}\tan\varphi - \cos\theta = 0$.

b. Écrire pour chacun des grands cercles Γ de Ω passant par deux sommets de T une relation (R_Γ) entre φ et θ telle que pour tout point M de coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$, M appartient à Γ si et seulement si $((R_\Gamma)$ est vérifiée.

c. Dessiner dans le rectangle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ du plan (φ, θ) la courbe d'équation : $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta)\right)$. Cette courbe est appelée l'image dans le plan (φ, θ) du grand cercle de Ω passant par C et D. Dessiner sur le même schéma pour chaque grand cercle Γ de Ω passant par deux sommets de T, son image dans le plan (φ, θ), c'est-à-dire la courbe du plan (φ, θ) d'équation (R_Γ). Indiquer sur votre schéma les points (φ, θ) tels que $(3, \varphi, \theta)$ soient les coordonnées sphériques des points simples de la question précédente.

d. On désigne par F l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à chaque point M de Ω associe la distance ON où N est l'intersection du segment $[OM]$ avec la frontière de T. Les lignes de niveau de F sont des cercles ou des réunions d'arcs de cercles. Donner l'allure dans le plan (φ, θ) des images des courbes de niveaux $F(M) = 1,5$, $F(M) = 2,5$ et $F(M) = \sqrt{3}$.

IV QUESTION COMPLÉMENTAIRE

Soit a une longueur. Nous appellerons tétraèdres rectangles d'hypoténuse a les tétraèdres dont une face est un triangle équilatéral de côtés de longueur a et dont les autres faces sont des triangles isocèles rectangles. Le sommet opposé à la face équilatérale d'un tétraèdre rectangle sera appelé son sommet principal.

1. Soit $T = ABCD$ un tétraèdre régulier dont les arêtes ont pour longueur $2a$, montrer que les milieux M_{AB}, M_{AC}, M_{AD}, M_{BC}, M_{BD} et M_{CD} des arêtes AB, AC, AD, BC, BD et CD sont les sommets d'un octaèdre régulier

d'arêtes de longueur a (on admettra qu'un octaèdre est régulier si et seulement si toutes ses arêtes sont de même longueur). Soit O le centre de T, montrer que les tétraèdres $OM_{AB}M_{AC}M_{AD}$, $OM_{AB}M_{BC}M_{BD}$, $OM_{AC}M_{BC}M_{CD}$, $OM_{AD}M_{BD}M_{CD}$, $OM_{AB}M_{AC}M_{BC}$, $OM_{AB}M_{AD}M_{BD}$, $OM_{AC}M_{AD}M_{CD}$ et $OM_{BC}M_{BD}M_{CD}$ sont des tétraèdres rectangles d'hypoténuse a.

2. On dispose de 8 tétraèdres rectangles de même hypoténuse a et de 4 tétraèdres réguliers d'arêtes de cette même longueur a. Ces 12 tétraèdres ont initialement toutes leurs faces bleues. On les assemble face contre face de façon à former un tétraèdre régulier d'arête de longueur $2a$ (on admet que pour cela, il est nécessaire et suffisant de placer côte à côte les tétraèdres rectangles, leurs sommets principaux étant confondus, obtenant ainsi un octaèdre régulier, et de placer ensuite les tétraèdres réguliers d'arêtes de longueur a en vis-à-vis de faces non adjacentes de cet octaèdre. Remarquez que quand on sait pour une face de l'octaèdre si à la fin des manipulations elle est visible ou non, on le sait pour chacune des autres). On peint alors les faces externes visibles en rouge, puis on démonte ce tétraèdre en ses 12 constituants que l'on mélange. On les assemble ensuite de nouveau au hasard sans tenir compte des couleurs pour former un nouveau tétraèdre d'arête de longueur $2a$. On cherche la probabilité p pour que ce nouveau tétraèdre ait lui aussi toutes ses faces entièrement rouges.

a. Donner un modèle probabiliste de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus. Justifier en détail votre choix de l'univers Θ et de la probabilité P.

b. Soit A l'événement dont on cherche la probabilité. Décrire explicitement A comme sous-ensemble de Θ.

c. Calculer p.

9.2 Corrigé

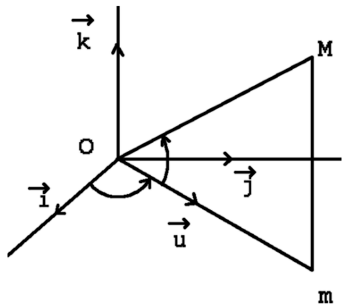


Fig. 1

Si l'on pose $\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$, on obtient bien

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r(\cos\varphi\,\overrightarrow{u}_\theta + \sin\varphi\,\overrightarrow{k})\\ &= r\cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i} + r\cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j} + r\sin\varphi\,\overrightarrow{k}\,.\end{aligned}$$

I.1.a. Si deux des points A, B, C, D étaient confondus, les quatre points seraient coplanaires et c'est exclus par hypothèse. Le groupe Σ est d'ordre $4! = 24$.

I.1.b. On a $\tau = (AB)$ et $\sigma = (BCD)$, donc $\tau^2 = Id$, $\sigma^3 = Id$, $\tau\sigma = (AB)\,(BCD) = (ABCD)$, $(\tau\sigma)^4 = Id$ et :

$$\begin{aligned}&\sigma\tau\sigma^2 = \sigma\,(ABCD)\,\sigma = (BCD)\,(ABCD)\,(BCD) = (AC)\,,\\ &\sigma^2\tau\sigma = \sigma^2\,(ABCD) = (BCD)\,(BCD)\,(ABCD) = (AD)\,,\\ &\tau\sigma\tau\sigma^2\tau = \tau\,(AC)\,\tau = (AB)\,(AC)\,(AB) = (BC)\,,\\ &\tau\sigma^2\tau\sigma\tau = \tau\,(AD)\,\tau = (AB)\,(AD)\,(AB) = (BD)\,,\\ &\tau\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma = (BC)\,\sigma = (BC)\,(BCD) = (CD)\,.\end{aligned}$$

I.1.c. Les transpositions engendrent Σ et toute transposition est produit de τ et σ d'après la question précédente. On peut rappeler pourquoi les transpositions engendrent Σ : tout d'abord toute permutation s'écrit comme un produit de cycles. Ensuite tout cycle est produit de transpositions d'après les calculs $(LMNK) = (LK)\,(LN)\,(LM)$ et $(LMN) = (LN)\,(LM)$, ou encore, si l'on préfère, $(LMNK) = (LM)\,(MN)\,(NK)$ et $(LMN) = (LM)\,(MN)$, où L, M, N, K désignent les lettres A, B, C, D dans un ordre quelconque.

I.1.d. Tout revient à prouver l'égalité

$$\mathrm{vol}\,(\rho\,(A)\,,\rho\,(B)\,,\rho\,(C)\,,\rho\,(D)) = \mathrm{vol}\,(A,B,C,D)$$

[0] [ag48] v2.03

lorsque ρ est égal à τ ou σ. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\sigma(A),\sigma(B),\sigma(C),\sigma(D)) = \operatorname{vol}(A,C,D,B) &= \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right| = \operatorname{vol}(A,B,C,D)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\tau(A),\tau(B),\tau(C),\tau(D)) = \operatorname{vol}(B,A,C,D) &= \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right| = \operatorname{vol}(A,B,C,D).\end{aligned}$$

I.1.e. Oui. Le volume du tétraèdre est indépendant de l'ordre de ses sommets.

I.2. Le déterminant est pris dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ et $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ n'est autre que le produit mixte $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$. On aura

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{BH_A}+\overrightarrow{H_AA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{H_AA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})\right|\end{aligned}$$

puisque $\overrightarrow{BH_A}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ sont liés, puis $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{H_AA}.(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD})|$.

Comme $\overrightarrow{H_AA}$ et $(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD})$ sont colinéaires, on trouve

$$V = \frac{H_AA}{6}||\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}|| = \frac{1}{3}AH_A \times \operatorname{aire}(BCD).$$

I.3.a. Le plan P partage l'espace en deux demi-espaces ouverts E_A (contenant A) et E_{H_A} (contenant H_A). Comme le plan (BCD) passe par H_A en étant parallèle à la frontière P, les trois points B, C et D appartiendront à E_{H_A}. Si $A \in E_A$ et $B \in E_{H_A}$, alors $[AB]$ coupe la frontière P en un point S_B. L'existence des autres points S_C et S_D est assurée de la même manière. Comme $\overrightarrow{AL} = (1-\lambda)\overrightarrow{AH_A}$, le Théorème de Thalès montre que $\overrightarrow{AS_B} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS_C} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS_D} = (1-\lambda)\overrightarrow{AD}$. Donc

$$v_1 = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AS_B},\overrightarrow{AS_C},\overrightarrow{AS_D})\right| = \frac{1}{6}(1-\lambda)^3\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right| = (1-\lambda)^3 V.$$

On aura $v_1 = V/8$ si et seulement si $(1-\lambda)^3 = 1/8$, i.e. $\lambda = 1/2$.

Remarque : La projection p sur la droite (AB) parallèlement au plan (BCD) nous offre une seconde méthode pour prouver que S_B appartient au segment $[AB]$. En effet, $L \in [AH_A]$ et l'image du segment $[AH_A]$ par p est le segment $[p(A)\, p(H_A)]$. Ainsi $p(L) \in [p(A)\, p(H_A)]$, et il suffit de constater que $p(L) = S_B$, $p(A) = A$ et $p(H_A) = B$ pour obtenir $S_B \in [AB]$.

I.3.b. Compte tenu de la question précédente,

$$v_2 = \frac{V}{8} \;\Leftrightarrow\; v_1 = \frac{7V}{8} \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)^3 V = \frac{7V}{8} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}.$$

I.4.a. On nous demande de démontrer le Théorème de la perpendiculaire commune :

Théorème : Si les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires, il existe une et une seule droite orthogonale à (AB) et à (CD) qui coupe (AB) en un point I et (CD) en un point J.

preuve : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{CD}$. Ce vecteur $\overrightarrow{u}$ dirige la droite vectorielle orthogonale au plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})^{\perp}$.

- **Analyse :** Si une telle droite Δ existe, alors

$$\Delta \subset \Pi_{AB} \cap \Pi_{CD}$$

où Π_{AB} (resp. Π_{CD}) désigne le plan affine passant par A (resp. C) et de direction $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u})$ (resp. $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{u})$). En effet, Δ est orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{\Delta} = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$, et $\Delta \cap (AB) = \{I\}$ de sorte que

$$\Delta = I + \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}) \subset I + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}) = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}) = \Pi_{AB}.$$

On vérifierait de même l'inclusion $\Delta \subset \Pi_{CD}$.

Comme Π_{AB} n'est pas parallèle à Π_{CD} (sinon $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{u})$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ seraient colinéaires, ce qui est absurde), on a $\dim\,(\Pi_{AB} \cap \Pi_{CD}) = 1$ et nécessairement

$$\Delta = \Pi_{AB} \cap \Pi_{CD}.$$

On a prouvé l'unicité de Δ.

- **Synthèse :** Réciproquement, posons $\Delta = \Pi_{AB} \cap \Pi_{CD}$. Alors :

- Δ est une droite.

- Δ est orthogonale à (AB) puisque $\overrightarrow{\Delta} = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$.

- Δ coupe (AB) en un point I : en effet, les droites Δ et (AB) sont orthogonales et coplanaires (dans Π_{AB}) donc sécantes.

- On montrerait de la même façon que Δ est orthogonale à (CD) et coupe (CD) en un point J.

En conclusion Δ vérifie bien les conditions du Théorème.

I.4.b. ▶ Montrons l'existence des points U_{AC}, U_{BC}, U_{BD} et U_{AD}. On a

$$(\overrightarrow{AB})\perp(\overrightarrow{IJ}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}) \subset (\overrightarrow{IJ})^{\perp} = \overrightarrow{Q}$$

et de la même façon $(\overrightarrow{CD}) \subset \overrightarrow{Q}$. Les droites (AB) et (CD) sont donc faiblement parallèles à Q.

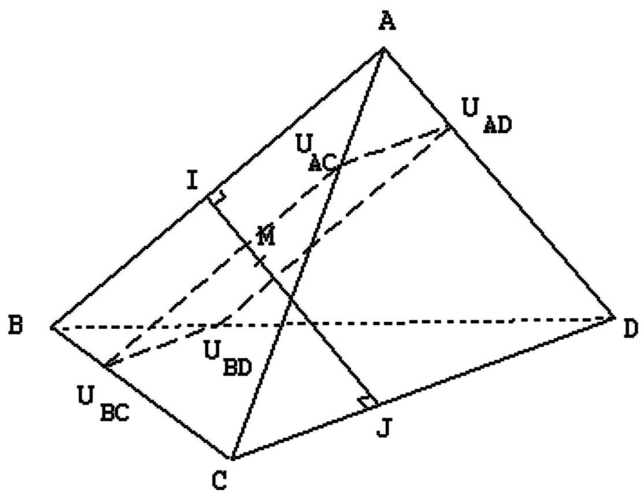


Fig. 2

Le plan Q partage l'espace en deux demi-espaces ouverts E_I (contenant I) et E_J (contenant J). Comme (AB) est parallèle à la frontière Q et contient I, on aura $(AB) \subset E_I$. De même $(CD) \subset E_J$. Comme $A \in E_I$ et $C \in E_J$, le segment $[AC]$ coupera la frontière Q en un point U_{AC}. On montrerait de même que les points U_{BC}, U_{BD}, U_{AD} existent.

▶ Montrons que $U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD}$ est un parallélogramme. Comme (CD) est faiblement parallèle à Q, le plan (ACD) coupe Q suivant une droite $(U_{AC}U_{AD})$ parallèle à (CD). De même $(U_{BC}U_{BD})$ est parallèle à (CD), et on obtient $(U_{AC}U_{AD}) \,//\, (U_{BC}U_{BD})$ par transitivité.

On obtiendrait de même $(U_{AC}U_{BC}) \,//\, (U_{AD}U_{BD})$.

Remarque : Donnons une autre preuve de l'existence des points U_{AC}, U_{BC}, U_{BD} et U_{AD} qui n'utilise pas le partage de l'espace par un plan. On montre les points a) et b) suivants :

a) (AC) coupe Q en un point U_{AC},

b) $U_{AC} \in [AC]$.

Le point a) se montre par l'absurde : si (AC) était parallèle au plan Q, on aurait
$$(\overrightarrow{AC}) \subset \overrightarrow{Q} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$
d'où $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Cela signifie que les points A, B, C et D sont coplanaires, et c'est absurde. Le point b) se montre alors en projetant la relation vectorielle $\mu\overrightarrow{MI} + (1-\mu)\,\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{0}$ sur (AC) parallèlement au plan Q. On obtient
$$\mu\overrightarrow{U_{AC}A} + (1-\mu)\,\overrightarrow{U_{AC}C} = \overrightarrow{0},$$
c.à.d. $U_{AC} \in [AC]$.

I.4.c. Attention : Dans cette question et dans les figures qui suivent je prime les projetés des points de l'espace qui n'appartiennent pas à la base de la projection.

On a $\overrightarrow{IM} = (1-\mu)\,\overrightarrow{IJ}$, donc $\overrightarrow{AU_{AD}} = (1-\mu)\,\overrightarrow{AD}$ par projection orthogonale sur la droite (AD), et l'on a des identités similaires concernant U_{AC}, U_{BC} et U_{BD} (cf. Fig. 2). Ici $\mu = \frac{1}{3}$, donc $\overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AU_{AD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, etc.

- Projection orthogonale sur Q :

On trace le parallélogramme $U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD}$ puis on choisit un point A' et l'on place D' tel que $\overrightarrow{A'D'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A'U_{AD}}$. On place ensuite le point C' tel que $\overrightarrow{A'C'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A'U_{AC}}$, puis B' défini par $\overrightarrow{C'B'} = 3\overrightarrow{C'U_{BC}}$. On est alors assuré (en utilisant une homothétie et le parallélisme de $(C'D')$, $(U_{AC}U_{AD})$ et $(U_{BC}U_{BD})$) que la droite $(B'D')$ passe par U_{BD} et que $\overrightarrow{D'B'} = 3\overrightarrow{D'U_{BD}}$ (voir Fig. 3).

- Projection orthogonale sur (ABJ) :

La Fig. 4 montre des droites (AB) et $(C'D')$ perpendiculaires à (IJ) dans le plan (ABJ). Le parallélogramme $U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD}$ se projette en un parallélogramme aplati $U'_{AC}U'_{BC}U'_{BD}U'_{AD}$.

Remarque : Si l'affirmation $(AB) \perp (IJ)$ est triviale, l'orthogonalité des droites $(C'D')$ et (IJ) dans le plan (ABJ) provient du calcul
$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JD'} = \overrightarrow{IJ}.(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DD'}) = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DD'} = 0.$$
Les produits scalaires sont nuls puisque $(IJ) \perp (JD)$ par hypothèse, et puisque (DD'), orthogonale au plan (ABJ), est orthogonale à toute droite de ce plan, et en particulier à (IJ) (voir Fig. 4 bis).

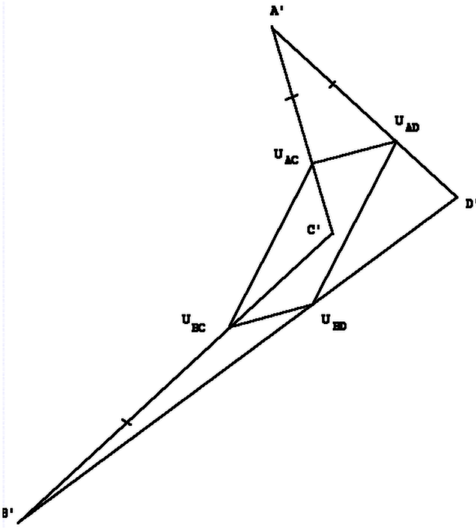


Fig. 3

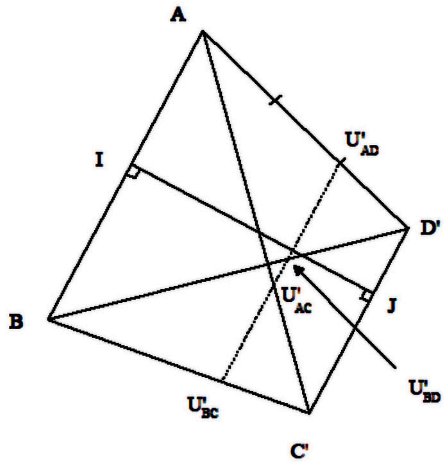


Fig. 4

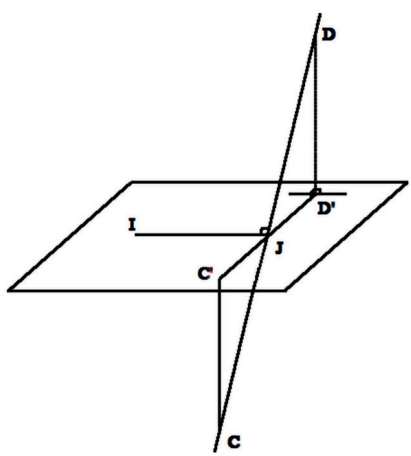


Fig. 4 bis

I.4.d. On a $W = ||\overrightarrow{U_1U_2} \wedge \overrightarrow{U_2U_3}|| \; = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}||$ et

$$\text{aire}\,(U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD}) = ||\overrightarrow{U_{AC}U_{BC}} \wedge \overrightarrow{U_{AC}U_{AD}}||.$$

On a $\overrightarrow{JM} = \mu\overrightarrow{JI}$ donc, par projection,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{CU_{AC}} = \mu\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{CU_{BC}} = \mu\overrightarrow{CB} \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{U_{AC}U_{BC}} = \mu\overrightarrow{AB}.$$

De même $\overrightarrow{IM} = (1-\mu)\,\overrightarrow{IJ}$ entraîne

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AU_{AD}} = (1-\mu)\,\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AU_{AC}} = (1-\mu)\,\overrightarrow{AC} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{U_{AC}U_{AD}} = (1-\mu)\,\overrightarrow{CD}\,.$$

En reportant,

$$\begin{aligned} \text{aire}\,(U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD}) &= ||\overrightarrow{U_{AC}U_{BC}} \wedge \overrightarrow{U_{AC}U_{AD}}|| \\ &= \mu\,(1-\mu)\,||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|| = \mu\,(1-\mu)\,W. \end{aligned}$$

I.4.e. Comme le déterminant est une forme multilinéaire alternée,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| \\ &= \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})| = \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})| \\ &= \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD})|. \end{aligned}$$

On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$ et l'on sait que $\overrightarrow{IJ}$ appartient à $\text{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})^{\perp}$ et que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JC}$ appartient à $\text{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. Par conséquent

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{IJ}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD})| = \frac{1}{6}IJ\,||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|| = \frac{1}{6}IJ \times W.$$

I.4.f. Les questions I.4.d et I.4.e donnent

$$\text{aire}\,(U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD}) = \mu\,(1-\mu)\,W = \mu\,(1-\mu)\,\frac{6V}{IJ}.$$

Prenons $t = JM$ comme variable déterminant la position de M sur le segment $[IJ]$. On a $\overrightarrow{JM} = \mu\overrightarrow{JI}$, donc $t = \mu IJ$, et aussi

$$\text{aire}\,(U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD}) = \frac{t}{IJ}\left(1 - \frac{t}{IJ}\right)\frac{6V}{IJ} = \left(IJ \times t - t^2\right)\frac{6V}{IJ^3}.$$

Le volume $v_3\,(\mu) = v_3\,(t)$ sera

$$\begin{aligned} v_3\,(\mu) &= \int_0^t \text{aire}\,(U_{AC}U_{BC}U_{BD}U_{AD})\;dx = \frac{6V}{IJ^3}\int_0^t \left(IJ \times x - x^2\right)\,dx \\ &= \frac{6V}{IJ^3}\left(IJ \times \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) = 6V\left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^3}{3}\right) = \left(3\mu^2 - 2\mu^3\right)V. \end{aligned}$$

Par suite

$$v_3\,(\mu) = \frac{V}{8} \;\Leftrightarrow\; 3\mu^2 - 2\mu^3 = \frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; 2\mu^3 - 3\mu^2 + \frac{1}{8} = 0.$$

On pose $f(\mu) = 2\mu^3 - 3\mu^2$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(\mu) = 6\mu^2 - 6\mu = 6\mu(\mu - 1)$$

sera strictement négative pour $\mu \in]0,1[$. La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $[0,1]$, et réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f(1), f(0)] = [-1, 0]$. Il existera donc un unique réel $\mu_0 \in]0,1[$ tel que $f(\mu_0) = -1/8$.

I.4.g. Dans le tétraèdre $ABCD$, le rôle des points I et J est interchangeable. Par conséquent, si M est placé sur $[IJ]$ de sorte que le volume de l'intersection de T et du demi-espace de frontière Q contenant C et D soit $v_3(\mu_0) = V/8$, le volume de l'intersection de T et du demi-espace de frontière Q contenant A et B sera $7V/8$, et le rôle symétrique joué par les points de I et J permet d'affirmer que $v_3(1-\mu_0) = 7V/8$. L'expression de v_3 obtenue en I.4.f donne alors

$$f(1-\mu_0) + \frac{7}{8} = 2(1-\mu_0)^3 - 3(1-\mu_0)^2 + \frac{7}{8} = 0.$$

On retrouve bien sûr ce résultat par un calcul direct :

$$\begin{aligned} f(1-\mu_0) + \frac{7}{8} &= 2(1-\mu_0)^3 - 3(1-\mu_0)^2 + \frac{7}{8} \\ &= 2\left(1 - 3\mu_0 + 3\mu_0^2 - \mu_0^3\right) - 3\left(1 - 2\mu_0 + \mu_0^2\right) + \frac{7}{8} \\ &= 3\mu_0^2 - 2\mu_0^3 - \frac{1}{8} = 0. \end{aligned}$$

I.4.h. • On a $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{8}$ donc $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \leq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. La fonction g est bien décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On a $g''(x) = 12x - 6 = 6(2x-1) \leq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ de sorte que g' soit aussi décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

• On remarque que

$$h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

et l'on reconnait la méthode de Newton. On a

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x$$

de sorte que trouver le zéro μ_0 de g revienne à trouver le point fixe de h. $u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)}$ est l'abscisse de l'intersection de l'axe des x et de la tangente à $y = g(x)$ en u_0 (en effet, la tangente à $y = g(x)$ en u_0 admet l'équation

$Y = g'(u_0)(X - u_0) + g(u_0))$. Comme g' décroît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la fonction g est concave sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et l'on aura

$$\frac{g(u_0) - g(\mu_0)}{u_0 - \mu_0} \geq g'(u_0).$$

On aura donc simultanément (compte tenu de $g(u_0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$) :

$$\left\{\begin{array}{l} g(u_0) \geq g'(u_0)(u_0 - \mu_0) \text{ donc } g'(u_0) < 0 \\ u_1 - u_0 = -\dfrac{g(u_0)}{g'(u_0)} < 0 \end{array}\right. \Rightarrow u_1 < u_0.$$

La concavité de g signifie que la courbe de g est sous n'importe quelle de ses tangentes, et cela entraîne en particulier $g(u_1) \leq 0$. L'inégalité de concavité $g(u_0) \geq g'(u_0)(u_0 - \mu_0)$ et la connaissance du signe de $g'(u_0)$ permet aussi d'écrire

$$-\frac{g(u_0)}{g'(u_0)} \geq -u_0 + \mu_0, \quad \text{i.e. } \mu_0 \leq u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)} = u_1$$

et de conclure à l'encadrement $\mu_0 \leq u_1 < u_0$.

Le pas suivant nous donne u_2 : si $g(u_1) = 0$, alors $u_2 = u_1 = \mu_0$. Si $g(u_1) < 0$, alors on réitère ce que nous avons fait ci-dessus en remplaçant u_0 par u_1, et l'on trouve encore $u_2 < u_1$.

Dans tous les cas, on obtient une suite décroissante strictement et pouvant devenir stationnaire à partir d'un certain rang. Compte tenu du graphique de g ci-dessous, la suite (u_n) sera stritement décroissante.

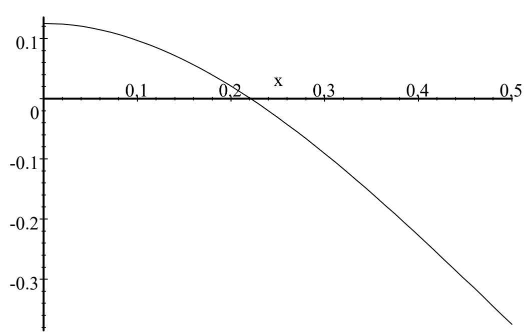


Fig. 5

Etant minorée par 0, elle convergera vers une limite l qui s'obtient en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = h(u_n)$. On trouve $l = h(l)$ donc $l = \mu_0$. En conclusion, la suite (u_n) est décroissante et converge vers μ_0.

• On trouve $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = h(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}$ et $u_2 = h(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{2}{9} \simeq 0,2222$.

Comme $g\,(0,22) \simeq 1,096 \times 10^{-3} > 0$, la racine μ_0 de g vérifiera

$$0,22 < \mu_0 < u_2 \leq 0,223.$$

Si nous approximons μ_0 par le milieu $0,2215$ de l'intervalle $[0,22; 0,223]$, nous obtiendrons

$$|\mu_0 - 0,2215| \leq 0,0015 \leq 2.10^{-3}.$$

En conclusion, $0,2215$ est une valeur approchée de μ_0 à 2.10^{-3} près.

I.4.i. • On rappelle que $h\,(x) = x - \dfrac{g\,(x)}{g'\,(x)}$. On calcule :

$$\begin{aligned} h'\,(x) &= \frac{1}{48}\frac{32x^4 - 64x^3 + 24x^2 + 2x - 1}{x^2\,(x-1)^2} = \frac{g\,(x)\,g''\,(x)}{(g'\,(x))^2} \\ h''\,(x) &= \frac{1}{24}\frac{8x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3\,(x-1)^3} \\ h'''\,(x) &= -\frac{1}{8}\frac{8x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{x^4\,(x-1)^4} \end{aligned}$$

et l'on admettra ici que $h'''\,(x) \leq 0$ dès que $x \in]0, \frac{1}{2}]$. Ainsi h'' est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$. On calcule $h''\,(0,2) \simeq 4,6387 < 5$. La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$h\,(u_n) = h\,(\mu_0) + h'\,(\mu_0)\,(u_n - \mu_0) + \frac{h''\,(\xi)}{2}\,(u_n - \mu_0)^2$$

pour un certain $\xi \in]\mu_0, u_n[$. On a $h'\,(x) = \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2}$ donc $h'\,(\mu_0) = 0$ et l'égalité ci-dessus devient

$$u_{n+1} - \mu_0 = \frac{h''\,(\xi)}{2}\,(u_n - \mu_0)^2\,.$$

Comme h'' décroît, on aura $h''\,(\xi) \leq h''\,(\mu_0) \leq h''\,(0,22) \leq h''\,(0,2) < 5$ et donc

$$u_{n+1} - \mu_0 < 5\,(u_n - \mu_0)^2\,.$$

• On a vu que $u_2 - \mu_0 \leq 3.10^{-3}$ en I.4.h. La relation que l'on vient d'établir entraîne donc $u_3 - \mu_0 < 5\,(u_2 - \mu_0)^2 \leq 45 \times 10^{-6}$, puis

$$u_4 - \mu_0 < 5\,(u_3 - \mu_0)^2 \leq 5 \times \left(45 \times 10^{-6}\right)^2 = 10125 \times 10^{-12} \leq 0,2 \times 10^{-7}$$

et

$$u_5 - \mu_0 < 5\,(u_4 - \mu_0)^2 \leq 5 \times \left(0,2 \times 10^{-7}\right)^2 = 0,2 \times 10^{-14} \leq 10^{-14}.$$

II.A.1.a. Les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires puisque le plan (BCD) admet l'équation $z = -1$ et puisque la côte de D est $z = 3$. On a

$$\begin{cases} AB^2 = (2\sqrt{2})^2 + (3+1)^2 = 24 \\ AC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 + (3+1)^2 = 24, \end{cases}$$

et l'on vérifierait de même que $AD^2 = BC^2 = BD^2 = CD^2 = 24$. Le tétraèdre T est donc régulier d'arête $2\sqrt{6}$.

On a

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{AC} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - \sqrt{6}\,\overrightarrow{j} - 4\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{AD} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{6}\,\overrightarrow{j} - 4\,\overrightarrow{k}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} V = \mathrm{vol}\,(A,B,C,D) &= \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| \\ &= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \\ -4 & -8 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{6}\sqrt{6}\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

II.A.1.b. Par hypothèse

$$\overrightarrow{OM} = \cos\varphi\,\overrightarrow{u}_\theta + \sin\varphi\,\overrightarrow{k} = \cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j} + \sin\varphi\,\overrightarrow{k}$$

est de norme 1. On sait que, si N est un point de coordonnées (x,y,z) dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, son projeté orthogonal N' sur (OM) est caractérisé par

$$\overrightarrow{ON'} = (\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM})\,\overrightarrow{OM}.$$

L'abscisse t_N de N' sur la droite (OM) est donc $t_N = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}$. On vérifie :

$$\begin{cases} t_A = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = 3\sin\varphi \\ t_B = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM} = -\sin\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta \\ t_C = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM} = -\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta - \sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta \\ t_D = \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OM} = -\sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta + \sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta. \end{cases}$$

II.A.1.c. On utilise la méthode de Gauss.

$$\begin{aligned}
q_0(\beta,\gamma,\delta) &= 3\beta^2 - 2\beta(\gamma+\delta) + 3\gamma^2 + 3\delta^2 - 2\gamma\delta \\
&= 3\left[\beta^2 - \frac{2}{3}\beta(\gamma+\delta)\right] + 3\gamma^2 + 3\delta^2 - 2\gamma\delta \\
&= 3\left[\left(\beta - \frac{\gamma+\delta}{3}\right)^2 - \frac{(\gamma+\delta)^2}{3^2}\right] + 3\gamma^2 + 3\delta^2 - 2\gamma\delta \\
&= 3\left(\beta - \frac{\gamma+\delta}{3}\right)^2 - \frac{(\gamma+\delta)^2}{3} + 3\gamma^2 + 3\delta^2 - 2\gamma\delta \\
&= 3\left(\beta - \frac{\gamma+\delta}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\gamma^2 - \delta^2 - 2\gamma\delta + 9\gamma^2 + 9\delta^2 - 6\gamma\delta\right) \\
&= 3\left(\beta - \frac{\gamma+\delta}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(8\gamma^2 + 8\delta^2 - 8\gamma\delta\right) \\
&= 3\left(\beta - \frac{\gamma+\delta}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\gamma^2 + \delta^2 - \gamma\delta\right) \\
&= 3\left(\beta - \frac{\gamma+\delta}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}\left[\left(\gamma - \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4}\right] + \frac{8\delta^2}{3}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$q_0(\beta,\gamma,\delta) = 3\left(\beta - \frac{\gamma+\delta}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(\gamma - \frac{\delta}{2}\right)^2 + 2\delta^2.$$

La signature de q_0 est $(3,0)$ et q_0 sera définie positive.

Autre solution plus rapide : L'écriture

$$q_0(\beta,\gamma,\delta) = (\beta-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

de $q_0(\beta,\gamma,\delta)$ comme somme de carrés montre immédiatement que $q_0(\beta,\gamma,\delta)$ est ≥ 0 pour tout (β,γ,δ), et que l'égalité $q_0(\beta,\gamma,\delta) = 0$ entraîne la nullité de β, γ et δ.

II.A.2.a. • Cas où Δ' passe par le centre du tétraèdre : on peut toujours choisir une unité de longueur telle que $l = 2\sqrt{6}$ et placer l'origine O du repère au centre du tétraèdre. D'après II.A.1.b la quantité $q_0(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$ est indépendante du choix de φ et θ, i.e. du choix de M sur la sphère unité.

Prenons $\varphi = 0$ et $\theta = 0$, autrement dit $M = M_0(1,0,0)$. On aura

$$(t_A, t_B, t_C, t_D) = (0, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}),$$

en calculant au point $M_0\,(1,0,0)$, et donc

$$\begin{aligned} q_0(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'}) &= q_0\,(t_B - t_A, t_C - t_A, t_D - t_A) \\ &= q_0(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 48. \end{aligned}$$

Comme T est d'arête $l = 2\sqrt{6}$, on trouve

$$\frac{1}{2}q_0(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'}) = 24 = l^2.$$

• Cas où Δ' ne passe pas par le centre du tétraèdre : On note Δ_0 la droite passant par le centre O du tétraèdre T et parallèle à Δ'. On note A_0, B_0, C_0, D_0 les projetés orthogonaux de A, B, C, D sur Δ_0. La projection vectorielle associée à la projection affine orthogonale de l'espace sur Δ' est identique à la projection vectorielle associée à la projection affine orthogonale de l'espace sur Δ_0. Par suite, et pour une même orientation des droites parallèles Δ_0 et Δ', on obtient $(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'}) = \left(\overline{A_0B_0},\overline{A_0C_0},\overline{A_0D_0}\right)$, donc

$$\frac{1}{2}q_0(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'}) = \frac{1}{2}q_0\left(\overline{A_0B_0},\overline{A_0C_0},\overline{A_0D_0}\right) = l^2$$

en appliquant le cas précédent.

• Conclusion : La forme quadratique $q = \dfrac{1}{2}q_0$ satisfait bien l'égalité

$$q(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'}) = l^2$$

pour toute droite Δ'.

II.A.2.b.i. La forme quadratique q est un polynôme homogène de degré 2, donc $q_0\,(\beta,\gamma,\delta) = q_0\,(-\beta,-\gamma,-\delta)$ et $q_0(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'})$ ne dépend pas du choix de l'orientation sur Δ'.

II.A.2.b.ii. Par hypothèse, q vérifie $q(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'}) = l^2$ pour toute droite Δ'. On va écrire cette égalité pour chacune des droites contenant les arêtes du tétraèdre puis utiliser les égalités obtenues pour déterminer les six constantes a, b, c, d, e, f où l'on pose

$$q\,(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz.$$

Si $\Delta' = (AB)$, le projeté C' sur (AB) est donné par

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||^2}\overrightarrow{AB} = \cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\,\overrightarrow{AB} = \cos\frac{\pi}{3}\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

qui implique $\overline{AC'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. On a redémontré que C' est le milieu de $[AB]$, ce qui se voit aussi sur la Fig. 6 en écrivant que C et D appartiennent au plan médiateur de $[AB]$ (en effet, C et D sont à égale distance des extrémités du segment $[AB]$), en notant I le milieu de $[AB]$, puis en déduisant que (IC) est orthogonal à (AB). On obtient de la même manière $\overline{AD'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. En remplaçant dans $q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'}) = l^2$, on trouve

$$q(\overline{AB}, \overline{AC'}, \overline{AD'}) = l^2 \ \Rightarrow \ q\left(l, \frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) = l^2 \ \Rightarrow \ q\,(2,1,1) = 4. \qquad (a1)$$

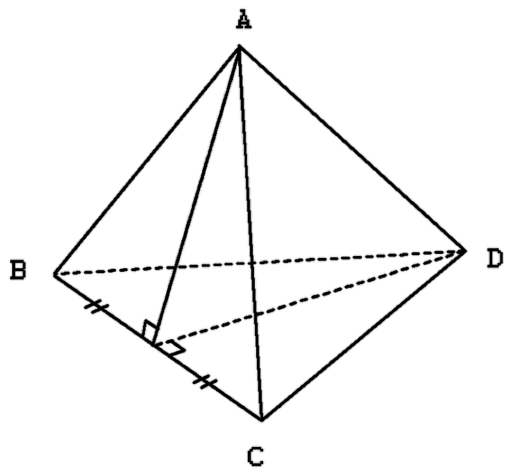


Fig. 6

En projetant sur (AC), puis sur (AD), on obtient de même

$$\begin{cases} q\,(1,2,1) = 4 & (a2) \\ q\,(1,1,2) = 4. & (a3) \end{cases}$$

Projetons maintenant sur (BC) : on obtient

$$l^2 = q(\overline{A'B}, \overline{A'C}, \overline{A'D'}) = q(-\frac{1}{2}\overline{BC}, \frac{1}{2}\overline{BC}, 0) = \frac{l^2}{4}q\,(-1,1,0)$$

soit

$$q\,(-1,1,0) = 4. \qquad (a4)$$

En recommençant avec (BD) et (CD), on trouve

$$\begin{cases} q\,(-1,0,1) = 4 & (a5) \\ q\,(0,-1,1) = 4. & (a6) \end{cases}$$

On obtient finalement le système de 6 équations à 6 inconnues :

$$\begin{cases} 4a+b+c+4d+4e+2f=4 & (a1) \\ a+4b+c+4d+2e+4f=4 & (a2) \\ a+b+4c+2d+4e+4f=4 & (a3) \\ a+b-2d=4 & (a4) \\ a+c-2e=4 & (a5) \\ b+c-2f=4 & (a6) \end{cases}$$

Les trois dernières équations donnent

$$2d=a+b-4, \quad 2e=a+c-4 \quad 2f=b+c-4 \qquad (a7)$$

et l'on remplace dans les trois premières équations pour obtenir

$$\begin{cases} 4a+b+c+(2a+2b-8)+(2a+2c-8)+(b+c-4)=4 \\ a+4b+c+(2a+2b-8)+(a+c-4)+(2b+2c-8)=4 \\ a+b+4c+(a+b-4)+(2a+2c-8)+(2b+2c-8)=4 \end{cases}$$

soit, après simplification,

$$(a8) \qquad \begin{cases} 2a+b+c=6 \\ a+2b+c=6 \\ a+b+2c=6. \end{cases}$$

On résout $(a8)$ en écrivant par exemple

$$(a8) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c=6 \\ 3b+c=6 \\ b+3c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c=6 \\ 3b+c=6 \\ 8c=6 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{2}.$$

En reportant en $(a7)$, on obtient $d=e=f=-\frac{1}{2}$. La réciproque est triviale. En conclusion, on obtient bien

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}z^2-xy-xz-yz \\ &= \frac{1}{2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(xy+xz+yz\right)\right]. \end{aligned}$$

II.A.2.b.iii. On a déjà obtenu $k=1/2$.

II.A.2.c. L'identité $q(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'})=l^2$ s'écrit

$$3(A'B'^2+A'C'^2+A'D'^2)-2(\overline{A'B'}.\overline{A'C'}+\overline{A'B'}.\overline{A'D'}+\overline{A'C'}.\overline{A'D'})=2l^2. \quad (b1)$$

Comme

$$\begin{aligned}B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2 &= (\overline{B'A'} + \overline{A'C'})^2 + (\overline{B'A'} + \overline{A'D'})^2 + (\overline{C'A'} + \overline{A'D'})^2 \\ &= 2(A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2) \\ &\quad - 2(\overline{A'B'}.\overline{A'C'} + \overline{A'B'}.\overline{A'D'} + \overline{A'C'}.\overline{A'D'})\end{aligned}$$

entraîne

$$\begin{aligned}&-2(\overline{A'B'}.\overline{A'C'} + \overline{A'B'}.\overline{A'D'} + \overline{A'C'}.\overline{A'D'}) = \\ &\qquad B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2 - 2(A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2),\end{aligned}$$

il suffit de remplacer dans $(b1)$ pour obtenir

$$A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2 = 2l^2.$$

II.B.1. La projection de $\overrightarrow{AB}$ sur Π_1 (resp. Δ') est $\overrightarrow{A_1B_1}$ (resp. $\overrightarrow{A'B'}$) de sorte que $\overrightarrow{AB}$ se décompose en $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A'B'}$ dans la somme directe orthogonale $\overrightarrow{\Pi_1} \oplus \overrightarrow{\Delta}'$. Le Théorème de Pythagore donne alors

$$l^2 = AB^2 = A_1B_1^2 + A'B'^2.$$

En additionnant les 6 égalités de ce style écrites avec les arêtes de T, et compte tenu de **II.A.2.c.**, on obtient

$$6l^2 = A_1B_1^2 + A_1^2C_1^2 + A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + B_1D_1^2 + C_1D_1^2 + 2l^2$$

soit $4l^2 = A_1B_1^2 + A_1^2C_1^2 + A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + B_1D_1^2 + C_1D_1^2$ comme demandé.

II.B.2.a. On a

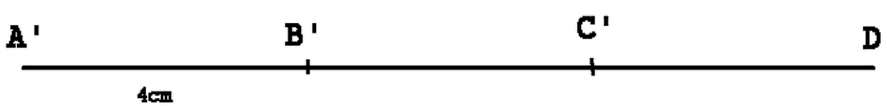


Fig. 7

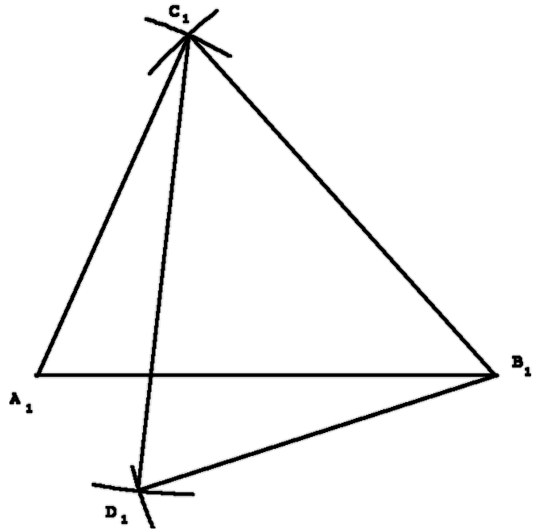
La question **II.A.2.c**. donne

$$\begin{aligned}2l^2 &= A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2 \\ &= 4^2 + 8^2 + 12^2 + 4^2 + 8^2 + 4^2 = 320\end{aligned}$$

donc $l = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \simeq 12,65$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} l^2 = AB^2 = A_1B_1^2 + A'B'^2 \Rightarrow A_1B_1^2 = 160 - 16 = 144 \\ l^2 = BC^2 = B_1C_1^2 + B'C'^2 \Rightarrow B_1C_1^2 = 160 - 16 = 144 \\ l^2 = CD^2 = C_1D_1^2 + C'D'^2 \Rightarrow C_1D_1^2 = 160 - 16 = 144 \\ l^2 = AC^2 = A_1C_1^2 + A'C'^2 \Rightarrow A_1C_1^2 = 160 - 64 = 96 \\ l^2 = BD^2 = B_1D_1^2 + B'D'^2 \Rightarrow B_1D_1^2 = 160 - 64 = 96 \\ l^2 = AD^2 = A_1D_1^2 + A'D'^2 \Rightarrow A_1D_1^2 = 160 - 144 = 16 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_1B_1 = 12 \\ B_1C_1 = 12 \\ C_1D_1 = 12 \\ A_1C_1 \simeq 9,8 \\ B_1D_1 \simeq 9,8 \\ A_1D_1 = 4. \end{array}\right.$$

Ces égalités permettent de tracer la Fig. 8 ci-dessous :



II.B.2.b. • Si $M' = M'_1$ est milieu de $[A'B']$, notons U, V et W les intersections du plan passant par M'_1 et perpendiculaire à Δ' et des droites (AB), (AC) et (AD). On peut supposer que Π_1 passa par A, i.e. que $A = A'$ puisque seules les projections sur Π_1 nous intéressent. La Fig. 9 montre comment utiliser Thalès et obtenir

$$AU = \frac{AB}{2}; \quad AV = \frac{AC}{4}; \quad AW = \frac{AD}{6}.$$

La projection sur Π_1 conserve les rapports donc

$$A_1U_1 = \frac{A_1B_1}{2}; \quad A_1V_1 = \frac{A_1C_1}{4}; \quad A_1W_1 = \frac{A_1D_1}{6},$$

et ce sont les points que nous avons représentés dans la Fig. 10.

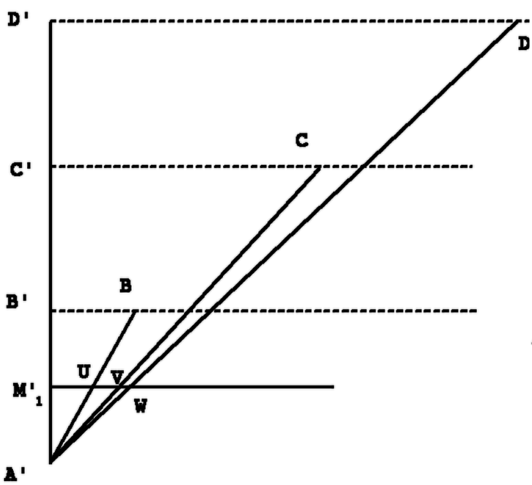


Fig. 9

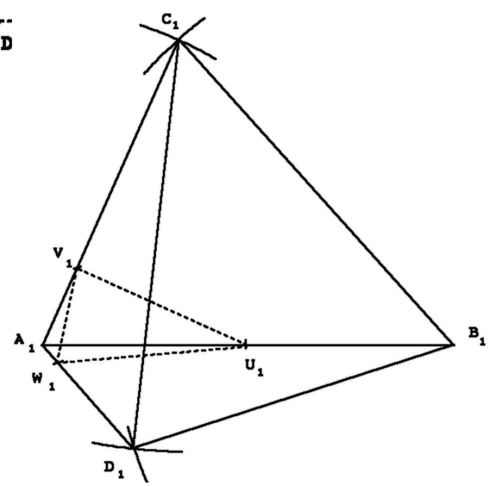


Fig. 10

Les quatre autres tracés sont faits dans la Fig. 11.

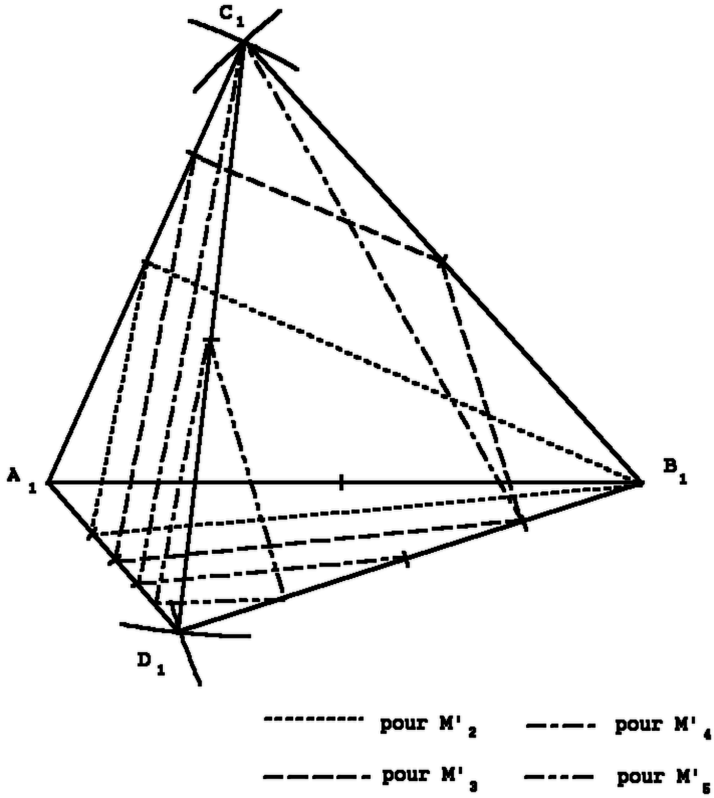


Fig. 11

II.B.3.a. Choisissons A' comme origine de Δ' et notons b, c, d les abscisses de B', C', D'. On a

$$\begin{aligned} 2l^2 &= b^2 + c^2 + d^2 + (c-b)^2 + (d-b)^2 + (d-c)^2 \\ &= 3\left(b^2 + c^2 + d^2\right) - 2\left(bc + bd + cd\right) = q_0\left(b, c, d\right) \end{aligned}$$

et b, c, d jouent des rôles symétriques dans $q_0\left(b, c, d\right)$, si bien que l'on puisse écrire $q_0\left(b, c, d\right) = q_0\left(c, d, b\right)$. On a

$$(i) \;\Leftrightarrow\; l^2 \geq A'B'^2 \;\Leftrightarrow\; q_0\left(c, d, b\right) \geq 2b^2$$

et la dernière inégalité est évidente si l'on écrit, comme en II.A.1.c :

$$q_0\left(c, d, b\right) = 3\left(c - \frac{d+b}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(d - \frac{b}{2}\right)^2 + 2b^2.$$

On a

$$(ii) \Leftrightarrow \frac{1}{4l^2}(2c-b)^2 \leq \frac{3}{4}\left(1-\frac{b^2}{l^2}\right) \Leftrightarrow (2c-b)^2 \leq 3\left(l^2-b^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 4c^2+4b^2 \leq 3l^2+4bc \Leftrightarrow 8c^2+8b^2 \leq 3q_0(b,c,d)+8bc.$$

Compte tenu de II.A.1.c,

$$\begin{aligned}(ii) &\Leftrightarrow 8c^2+8b^2 \leq 9\left(b^2+c^2+d^2\right)-6(bc+bd+cd)+8bc \\ &\Leftrightarrow 0 \leq b^2+c^2+9d^2+2bc-6bd-6cd \\ &\Leftrightarrow 0 \leq b^2+2b(c-3d)+c^2+9d^2-6cd=(b+c-3d)^2.\end{aligned}$$

II.B.3.b. Si les deux tétraèdres $T=ABCD$ et $T_0=A_0B_0C_0D_0$ sont solutions, les points A_0, B_0, C_0, D_0 forment un repèe affine et

$$\begin{aligned}(AB,AC,AD,BC,BD,CD) &= (A_0B_0,A_0C_0,A_0D_0,B_0C_0,B_0D_0,C_0D_0) \\ &= (l,...,l).\end{aligned}$$

Un Théorème classique montrent alors qu'il existe une unique isométrie f de l'espace qui transforme resp. A_0, B_0, C_0, D_0 en A, B, C, D. On notera que si $T=ABCD$ est solution, alors l'image de T par n'importe quelle rotation d'axe parallèle à Δ' et passant par le centre de gravité de T, sera encore solution.

II.B.3.c. • (i) et (ii) : Le choix de A ne pose pas de problème. La distance du point A au plan $B'+\overrightarrow{\Pi}_1$ est égale à $A'B'$ et sera inférieur à $AB=l$ d'après le II.B.3.a. (i). Cela permet de choisir un point B dans le cercle intersection de la sphère $S(A,l)$ de centre A et de rayon l, et du plan $B'+\overrightarrow{\Pi}_1$. Par rotation, on peut même se ramener au cas où les points A, A', B, B' sont coplanaires, ce que l'on a représenté à la Fig. 12.

• (iii) : On suppose que les points A, A', B, B' sont coplanaires et l'on se réfère à la Fig. 12. Le plan $I+(\overrightarrow{AB})^{\perp}$ coupe le plan $C'+\overrightarrow{\Pi}_1$ en une droite $\mathcal{D}$. Soient I_1 le projeté orthogonal du milieu I de $[AB]$ sur $C'+\overrightarrow{\Pi}_1$, et T le projeté orthogonal de I sur $\mathcal{D}$. Le point T sera aussi le projeté de I_1 sur $\mathcal{D}$ d'après le Théorème des trois perpendiculaires. Il s'agit de trouver un point C tel que

$$(*) \quad \begin{cases} AC=BC=l \\ C \in C'+\overrightarrow{\Pi}_1. \end{cases}$$

On a

$$(*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} IC = l\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ C \in C' + \overrightarrow{\Pi}_1 \text{ et } (IC) \perp (AB) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} IC^2 = \dfrac{3}{4}l^2 \\ C \in \mathcal{D} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_1C^2 + II_1^2 = \dfrac{3}{4}l^2 \\ C \in \mathcal{D}. \end{array} \right.$$

Comme $II_1 = I'C'$, on aura

$$(*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_1C^2 = \dfrac{3}{4}l^2 - I'C'^2 \\ C \in \mathcal{D}. \end{array} \right.$$

Cette dernière condition sera réalisée si et seulement si le cercle de centre I_1 et de rayon $\sqrt{\frac{3}{4}l^2 - I'C'^2}$ coupe la droite $\mathcal{D}$. Comme la distance de I_1 à $\mathcal{D}$ est I_1T, cela se traduit par l'inégalité $I_1T \leq I_1C$, soit

$$I_1T^2 \leq \frac{3}{4}l^2 - I'C'^2.$$

Le lemme ci-dessous donne

$$I_1T^2 = \frac{I'A'^2.I'C'^2}{\frac{l^2}{4} - I'A'^2}$$

de sorte que la condition devienne successivement

$$\frac{I'A'^2.I'C'^2}{\frac{l^2}{4} - I'A'^2} \leq \frac{3}{4}l^2 - I'C'^2$$

$$0 \leq \frac{3}{4}l^2 - I'C'^2 - 3I'A'^2$$

$$I'C'^2 \leq \frac{3}{4}l^2 - 3I'A'^2$$

$$\frac{1}{l^2}\left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4} - \frac{3}{l^2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{l^2}\left(\frac{\overline{A'C'} + \overline{B'C'}}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}\left(1 - A'B'^2\right).$$

On reconnait (ii) de II.B.3.a. qui est bien vérifiée.

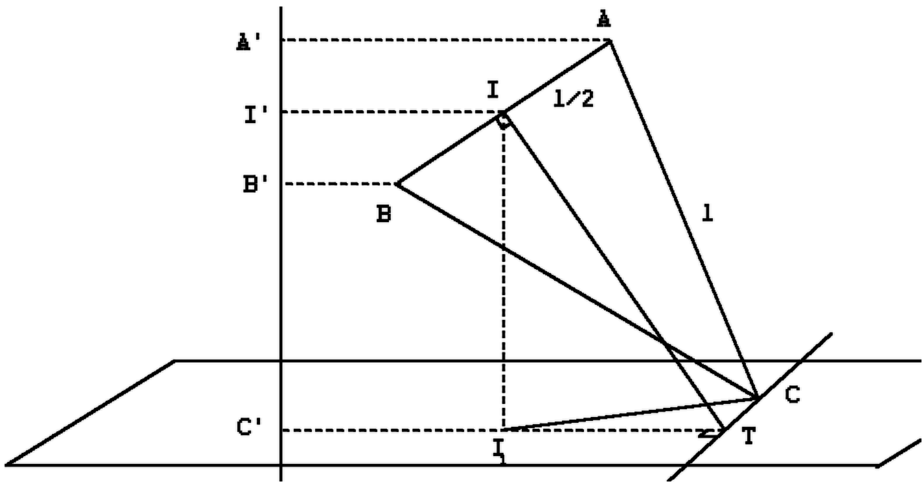


Fig. 12

Lemme : Avec les notations ci-dessus, $I_1T^2 = \dfrac{I'A'^2.I'C'^2}{\dfrac{l^2}{4} - I'A'^2}$.

preuve du lemme : On est dans le plan I_1IT. On choisit I_1 comme origine, (I_1T) et (I_1I) comme axes de coordonnées, et l'on pose $I\,(0, y_I)$, et $A\,(x_A, y_A)$. Alors $B\,(x_B, y_B)$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x_A+x_B}{2} = 0 \\ \frac{y_A+y_B}{2} = y_I \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_B = -x_A \\ y_B = 2y_I - y_A. \end{array}\right.$$

On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IT}.\overrightarrow{AB} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_T \\ -y_I \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_T \\ -y_I \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2x_A \\ 2\,(y_I - y_A) \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x_Ax_T - 2y_I\,(y_I - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_T = -\frac{y_I\,(y_I - y_A)}{x_A}. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$IA^2 = \frac{l^2}{4} \Rightarrow x_A^2 + (y_A - y_I)^2 = \frac{l^2}{4} \Rightarrow x_A^2 = \frac{l^2}{4} - (y_A - y_I)^2\,.$$

En reportant,

$$x_T^2 = \frac{y_I^2\,(y_I - y_A)^2}{x_A^2} = \frac{y_I^2\,(y_I - y_A)^2}{\frac{l^2}{4} - (y_A - y_I)^2}$$

d'où

$$I_1T^2 = \frac{I'C'^2(\overline{C'I'} - \overline{C'A'})^2}{\frac{l^2}{4} - (\overline{C'A'} - \overline{C'I'})^2} = \frac{I'A'^2.I'C'^2}{\frac{l^2}{4} - I'A'^2}. \blacksquare$$

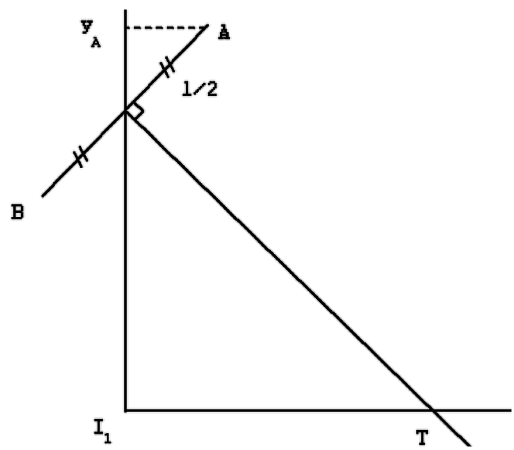


Fig. 13

• (iv) : Si $ABCD$ est un tétraèdre régulier et si Ω représente l'isobarycentre des points A, B, C, il est facile de vérifier que $A\Omega = l/\sqrt{3}$ et que la hauteur ΩD du tétraèdre vaut $\Omega D = l\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Nous avons déjà construit le triangle équilatéral ABC. Pour terminer la construction, nous allons supposer que montrer successivement que :

(P1) : La droite $\Omega + \left(\mathrm{Vec}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)^{\perp}$ coupe le plan $D' + \overrightarrow{\Pi}_1$ en un (unique) point D.

(P2) : On a l'égalité $\Omega D = \dfrac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (*)$.

Muni de **(P1)** et **(P2)** il sera alors facile d'utiliser le Théorème de Pythagore pour obtenir

$$AD^2 = A\Omega^2 + \Omega D^2 = \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = l^2$$

soit $AD = l$, puis d'obtenir $BD = CD = l$ de la même façon.

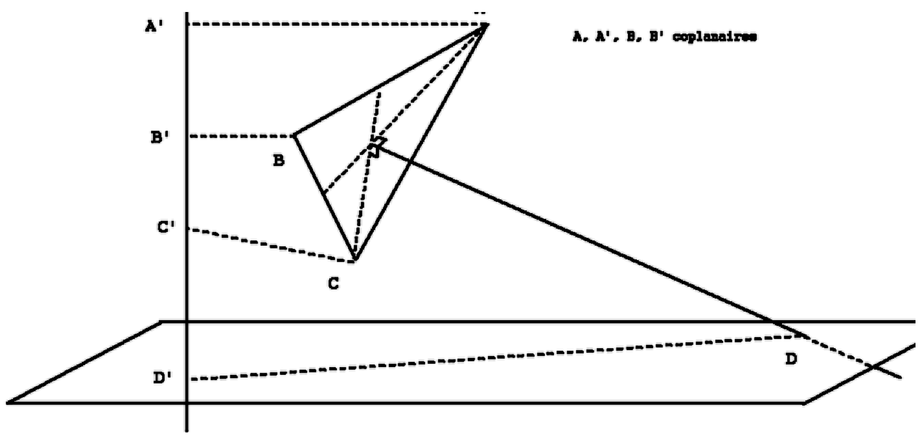


Fig. 14

Preuve de (P1) : Supposons par l'absurde que **(P1)** soit faux. Le plan $\mathrm{Vec}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est alors perpendiculaire à $D' + \overrightarrow{\Pi}_1$. On s'est placé dans l'hypothèse où les points A, A', B, B' sont coplanaires, donc (AB) sera parallèle à Δ'. Cela entraîne $A'B'^2 = AB^2 = l^2$ et l'inégalité (ii) de **II.B.3.a.** devient

$$\frac{1}{l^2}\left(\frac{\overline{A'C'} + \overline{B'C'}}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}\left(1 - \frac{A'B'^2}{l^2}\right) = 0$$

d'où $\overline{A'C'} + \overline{B'C'} = 0$. Le point C' est alors le milieu de $[A'B']$. La relation

$$2l^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2$$

devient alors

$$2l^2 = l^2 + \frac{l^2}{4} + A'D'^2 + \frac{l^2}{4} + (\overline{B'A'} + \overline{A'D'})^2 + (\overline{C'A'} + \overline{A'D'})^2.$$

En posant $X = \overline{A'D'}$ et en supposant $\overline{A'B'} = l > 0$, on obtient

$$\frac{l^2}{2} = X^2 + \left(l^2 - 2lX + X^2\right) + \left(\frac{l^2}{4} - lX + X^2\right) \Leftrightarrow X^2 - lX + \frac{l^2}{4} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{l}{2}.$$

Dans ce cas $X = \overline{A'D'} = \frac{l}{2} = \overline{A'C'}$ signifie que $D' = C'$, et l'on est dans le cas où $D' = C'$ est le milieu de $[A'B']$. En fait deux des 4 points A', B', C', D' sont distincts par hypothèse, et rien ne nous empêche de supposer $D' \neq C'$ dès le départ, pour que l'on obtienne une absurdité.

Preuve de (P2) : Posons $\overrightarrow{\Omega D} = \lambda \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, soit

$$\begin{pmatrix} x_D - x_\Omega \\ y_D - y_\Omega \\ d - \omega \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ c \end{pmatrix}$$

où $\omega = \frac{b+c}{3}$ est l'abscisse de l'isobarycentre de Ω' sur Δ'.On peut supposer $x_A = y_A = 0$ quitte à changer Δ' pour une droite parallèle (i.e. prendre A sur Δ'). On peut aussi supposer que $x_B = x_A$ en choisissant un premier axe de repère convenable (voir le choix de B et A dans la partie (ii) ci-dessus). On aura alors $x_B = x_A = y_A = 0$ et

$$\begin{pmatrix} x_D - x_\Omega \\ y_D - y_\Omega \\ d - \omega \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ y_B \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ c \end{pmatrix}.$$

On aura

$$\Omega D = |\lambda| \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = |\lambda| \, l^2 \left| \sin \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right| = |\lambda| \, l^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'où

$$\Omega D^2 = \frac{3}{4} \lambda^2 l^4 = \frac{3}{4} \left(\frac{d - \omega}{y_B x_C} \right)^2 l^4 = \frac{3}{4} \frac{(d - \omega)^2}{y_B^2 x_C^2} l^4.$$

On aura

$$(*) \Leftrightarrow \Omega D^2 = \frac{2l^2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \frac{(d - \omega)^2}{y_B^2 x_C^2} l^4 = \frac{2l^2}{3} \Leftrightarrow (d - \omega)^2 \, l^2 = \frac{8}{9} y_B^2 x_C^2. \qquad (c1)$$

On sait que ABC est équilatéral de côté l, donc

$$\begin{cases} AB^2 = y_B^2 + b^2 = l^2 & (c2) \\ AC^2 = x_C^2 + y_C^2 + c^2 = l^2 & (c3) \\ BC^2 = x_C^2 + (y_C - y_B)^2 + (c - b)^2 = l^2. & (c4) \end{cases}$$

$(c2) + (c3) - (c4)$ donne $2 y_B y_C + 2bc = l^2$, d'où

$$y_C^2 = \frac{\left(l^2 - 2bc\right)^2}{4 y_B^2}. \qquad (c5)$$

$(c2)$ entraîne $y_B^2 = l^2 - b^2$, et en reportant dans $(c5)$, on trouve

$$y_C^2 = \frac{\left(l^2 - 2bc\right)^2}{4 \left(l^2 - b^2\right)}. \qquad (c6)$$

En reportant dans $(c3)$, on obtient

$$x_C^2 = l^2 - c^2 - y_C^2 = l^2 - c^2 - \frac{\left(l^2 - 2bc\right)^2}{4 \left(l^2 - b^2\right)}. \qquad (c7)$$

En remplaçant les valeurs de x_C^2 et y_B^2 obtenues en fonction de b, c, d en $(c2)$ et $(c7)$ dans $(c1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(*) \Leftrightarrow (d-\omega)^2 l^2 &= \frac{8}{9}\left(l^2-b^2\right)\left(l^2-c^2-\frac{\left(l^2-2bc\right)^2}{4\left(l^2-b^2\right)}\right) \\
\Leftrightarrow (d-\omega)^2 l^2 &= \frac{2}{9}\left(4\left(l^2-b^2\right)\left(l^2-c^2\right)-\left(l^2-2bc\right)^2\right) \\
\Leftrightarrow (d-\omega)^2 l^2 &= \frac{2}{9}\left(3l^4-4b^2l^2-4c^2l^2+4bcl^2\right) \\
\Leftrightarrow 9\left(d-\frac{b+c}{3}\right)^2 &= 6l^2-8b^2-8c^2+8bc,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow (3d-b-c)^2 = 6l^2-8b^2-8c^2+8bc \\
&\Leftrightarrow 9d^2+b^2+c^2-6bd-6cd+2bc = 6l^2-8b^2-8c^2+8bc \\
&\Leftrightarrow 6l^2 = 9b^2+9d^2+9c^2-6bd-6bc-6cd \\
&\Leftrightarrow 2l^2 = 3\left(b^2+d^2+c^2\right)-2\left(bd+bc+cd\right).
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie par hypothèse, et permet de conclure.

Conclusion générale de cette question : On a la relation

$$2l^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2$$

entre quatre points A', B', C', D' d'une droite Δ' (dont deux au moins sont distincts) si et seulement si il existe au moins un tétraèdre $T = ABCD$ tel que A se projette orthogonalement en A', B en B', C en C', et D en D'.

III.1. • Existence et unicité de t : Dans cette question, primons les images par ρ, donc posons $\rho(A) = A'$, $\rho(B) = B'$ etc. Comme $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère affine, on sait qu'il existe une unique application affine t telle que

$$(t(A), t(B), t(C), t(D)) = \left(A', B', C', D'\right).$$

Cette application transforme A en $\rho(A)$ et sa partie linéaire $l = L(t)$ est l'unique application linéaire qui transforme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ formant une base respectivement en $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{A'D'}$.

Pour conclure, il suffit maintenant de vérifier que l'application affine t est une isométrie, autrement dit que sa partie linéaire l conserve la norme.

Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, il existe des réels x, y, z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$. On a

$$l(\overrightarrow{u}) = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'} + z\overrightarrow{A'D'}$$

et

$$\begin{aligned}||l(\overrightarrow{u})||^2 &= l(\overrightarrow{u}).l(\overrightarrow{u}) \\ &= x^2||\overrightarrow{A'B'}||^2 + y^2||\overrightarrow{A'C'}||^2 + z^2||\overrightarrow{A'D'}||^2 \\ &\qquad + 2xy\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} + 2xz\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'D'} + 2yz\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{A'D'}. \quad (*)\end{aligned}$$

Pour tous points M, N, P de $\{A, B, C, D\}$, on a $||\overrightarrow{M'N'}|| = ||\overrightarrow{MN}||$ (en primant toujours les images par ρ), mais aussi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{N'P'} &= \frac{1}{2}(||\overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'P'}||^2 - ||\overrightarrow{M'N'}||^2 - ||\overrightarrow{N'P'}||^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}||^2 - ||\overrightarrow{MN}||^2 - ||\overrightarrow{NP}||^2\right) \\ &= \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}.\end{aligned}$$

Ces égalités permettent de ré-écrire le second membre de $(*)$ en supprimant tous les "primes", puis de reconstituer le tout pour obtenir

$$\begin{aligned}||l(\overrightarrow{u})||^2 &= x^2||\overrightarrow{AB}||^2 + y^2||\overrightarrow{AC}||^2 + z^2||\overrightarrow{AD}||^2 \\ &\qquad + 2xy\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + 2xz\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 2yz\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2.\end{aligned}$$

Cela prouve la conservation de la norme.

• **Etude de** ψ : Pour tous $\rho, \sigma \in \Sigma$ et pour tout sommet M de T,

$$\psi(\rho\sigma)(M) = (\rho\sigma)(M) = \rho(\sigma(M)) = \psi(\rho)(\sigma(M)) = \psi(\rho) \circ \psi(\sigma)(M).$$

Les applications affines $\psi(\rho\sigma)$ et $\psi(\rho) \circ \psi(\sigma)$ coïncident sur les quatre points A, B, C, D d'un repère affine de $\mathcal{E}$, donc seront égales. Ainsi

$$\psi(\rho\sigma) = \psi(\rho) \circ \psi(\sigma)$$

et ψ est un homomorphisme de groupes.

L'application $\psi : \Sigma \to \mathrm{Is}(\mathcal{E})$ n'est pas surjective puisqu'il existe des isométries f de $\mathcal{E}$ qui transforment A en un point différent d'un des sommets de T. Mais ψ est injective car son noyau est réduit à $\{Id\}$. En effet, si $\psi(\rho)(M) = M$ pour tout point M, a fortiori $\rho(M) = M$ pour tout sommet M de T, et $\rho = Id$.

III.2. Si t est une isométrie qui conserve T, $t(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$ et t définit une permutation ρ des sommets de T. Par suite $t = \psi(\rho) \in \psi(\Sigma)$.

Réciproquement, si $t \in \psi(\Sigma)$, alors il existe $\rho \in \Sigma$ telle que $t = \psi(\rho)$ et t permute les sommets. Dans ce cas, t est une isométrie qui conserve le tétraèdre.

III.3.a • Calcul de L_τ : Notons $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\mathcal{B}_T = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. On a

$$\psi(\tau)(A) = B\ ; \quad \psi(\tau)(B) = A\ ; \quad \psi(\tau)(C) = C\ ; \quad \psi(\tau)(D) = D$$

donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{\psi(\tau)}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{\psi(\tau)}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{\psi(\tau)}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}. \end{cases}$$

La matrice de $\overrightarrow{\psi(\tau)}$ dans la base $\mathcal{B}_T$ sera donc

$$\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\tau)}; \mathcal{B}_T) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \ ; \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ -4 \end{pmatrix} \ ; \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ -4 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_T$ s'écrira

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_T} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

On aura $\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\tau)}; \mathcal{B}_T) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\tau)}; \mathcal{B})P$, donc

$$L_\tau = \mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\tau)}; \mathcal{B}) = P\,\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\tau)}; \mathcal{B}_T)P^{-1}.$$

Calculons P^{-1} en inversant le système suivant

$$(S) \begin{cases} 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = x' \\ \qquad\quad -\sqrt{6}y + \sqrt{6}z = y' \\ -4x - 4y - 4z = z'. \end{cases}$$

On écrit successivement

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = \frac{x'}{\sqrt{2}} \\ -y + z = \frac{y'}{\sqrt{6}} \\ -4x - 4y - 4z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = \frac{x'}{\sqrt{2}} \\ -y + z = \frac{y'}{\sqrt{6}} \\ -6y - 6z = \frac{2x'}{\sqrt{2}} + z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = \frac{x'}{\sqrt{2}} \\ -y + z = \frac{y'}{\sqrt{6}} \\ -12z = \frac{2x'}{\sqrt{2}} - \frac{6y'}{\sqrt{6}} + z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = \frac{\sqrt{2}x'}{2} \\ -y + z = \frac{\sqrt{6}y'}{6} \\ z = -\frac{\sqrt{2}x'}{12} + \frac{\sqrt{6}y'}{12} - \frac{z'}{12}. \end{cases}$$

En remplaçant de proche en proche, on trouve

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}x'}{6} - \frac{z'}{12} \\ y = -\frac{\sqrt{2}x'}{12} - \frac{\sqrt{6}y'}{12} - \frac{z'}{12} \\ z = -\frac{\sqrt{2}x'}{12} + \frac{\sqrt{6}y'}{12} - \frac{z'}{12} \end{cases} \quad \text{soit } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Un calcul matriciel nous donne alors

$$L_\tau = P \operatorname{Mat}(\overrightarrow{\psi(\tau)}; \mathcal{B}_T) P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de découvrir que L_τ est de la forme demandée. L'énoncé nous demande seulement de faire une vérification. Il suffisait donc de vérifier que $\psi(\tau)$ transformait bien A, B, C, D respectivement en B, A, C, D. Cette vérification est facile.

• **Nature de** $\psi(\tau)$: Le milieu I de $[AB]$ sera invariant par $\psi(\tau)$. En effet $\psi(\tau)$ est affine, donc conserve les milieux, et cela implique que le milieu I de $[AB]$ sera transformé en le milieu de $[\psi(\tau)(A), \psi(\tau)(B)] = [BA]$, soit $\psi(\tau)(I) = I$. Par hypothèse, C et D sont invariants par $\psi(\tau)$. Enfin A et B sont échangés par $\psi(\tau)$, et il est facile de voir que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (ICD) (en effet, C, I et D sont chacun à égale distance des extrémités du segment $[AB]$, donc appartiennent au plan médiateur de $[AB]$). Par conséquent

$$\begin{cases} \overrightarrow{\psi(\tau)}(\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{\psi(\tau)}(\overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{\psi(\tau)}(\overrightarrow{ID}) = \overrightarrow{ID} \end{cases}$$

et $\overrightarrow{\psi(\tau)}$ sera la réflexion par rapport au plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID})$. La réflexion $\overrightarrow{\psi(\tau)}$ admet 1 (resp -1) comme valeur propre et l'espace propre associé est le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID})$ (resp. la droite $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{IA})$).

Comme $\psi(\tau)(I) = I$, l'application $\psi(\tau)$ sera affine de partie linéaire la réflexion $\overrightarrow{\psi(\tau)}$ et possèdera au moins un point invariant I. En conclusion $\psi(\tau)$ est la réflexion affine de base le plan affine (ICD).

Remarque : On peut raccourcir le raisonnement précédent en ne retenant que deux choses : que I, C et D sont invariants par $\psi(\tau)$, et que $\psi(\tau)(A) = B$. Comme $\psi(\tau)$ est une isométrie, ce ne pourra être que la réflexion par rapport au plan (ICD), avec pour conséquence le fait que (AB) est perpendiculaire à (ICD).

III.3.b • Calcul de L_σ : On a

$$\psi(\sigma)(A) = A\ ;\quad \psi(\sigma)(B) = C\ ;\quad \psi(\sigma)(C) = D\ ;\quad \psi(\sigma)(D) = B$$

donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{\psi(\sigma)}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{\psi(\sigma)}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{\psi(\sigma)}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\sigma)};\mathcal{B}_T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de $\overrightarrow{\psi(\sigma)}$ dans la base $\mathcal{B}$ sera

$$L_\sigma = \mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\sigma)};\mathcal{B}) = P\,\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\psi(\sigma)};\mathcal{B}_T)P^{-1},$$

soit

$$L_\sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

• **Nature de $\psi(\sigma)$** : La matrice L_σ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

On reconnaît la matrice d'une rotation vectorielle d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$ et d'angle mesuré par $\theta = -2\pi/3$ dans le plan $(\mathbb{R}\overrightarrow{k})^\perp = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orienté par la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est directe, l'orientation compatible de $(\mathbb{R}\overrightarrow{k})^\perp$ est donnée par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'on peut écrire $\overrightarrow{\psi(\sigma)} = [\overrightarrow{k}, -2\pi/3]$. Cette notation signifie que $\overrightarrow{\psi(\sigma)}$ est la rotation vectorielle d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$ orienté par $\overrightarrow{k}$ et d'angle mesuré par $-2\pi/3$ dans le plan vectoriel orthogonal à $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$ orienté de façon compatible. On a bien sûr :

$$\overrightarrow{\psi(\sigma)} = [\overrightarrow{k}, \frac{-2\pi}{3}] = [-\overrightarrow{k}, \frac{2\pi}{3}].$$

L'isométrie $\psi(\sigma)$ laisse fixe l'isobarycentre O des sommets de T. Ainsi $\psi(\sigma)$ est une application affine de partie linéaire une rotation vectorielle et possédant au moins un point invariant. C'est la rotation d'axe $O + \mathbb{R}\overrightarrow{k} = Oz$ orienté par $\overrightarrow{k}$ et d'angle $-2\pi/3$.

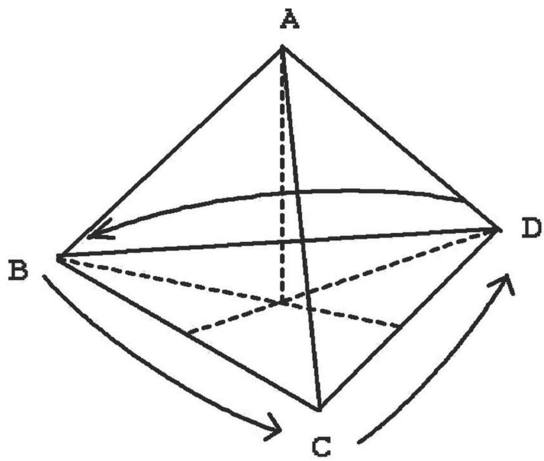


Fig. 15

• **Valeurs propres de $\overrightarrow{\psi(\sigma)}$** : Un calcul simple montre que la matrice générique d'une rotation donnée en $(**)$ admet les trois valeurs propres complexes 1, $e^{i\theta} = j$ et $e^{-i\theta}$. La rotation $\overrightarrow{\psi(\sigma)}$ admet donc les trois valeurs propres distinctes 1, $e^{i2\pi/3} = j$ et $e^{-i2\pi/3} = \overline{j}$. Comme l'espace est de dimension 3, l'application $\overrightarrow{\psi(\sigma)}$ sera diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) et chacun des espaces propres sera une droite complexe. Le seul espace propre réel sera celui associé à 1, et ce sera l'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$.

L'espace propre complexe E_j associé à j sera la droite complexe d'équations

$$\begin{cases} (-\frac{1}{2} - j)\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ (1-j)\,z = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} y = ix \\ z = 0 \end{cases}$$

dirigée par le vecteur $(1, i, 0)$. Comme la matrice est réelle, l'espace propre complexe $E_{\overline{j}}$ associé au nombre complexe conjugué $\overline{j}$ sera la droite complexe $E_{\overline{j}} = \overline{E_j}$ de vecteur directeur $(1, -i, 0)$.

III.3.c On a $\rho_3 = (ABCD)$. L'application affine $\psi(\rho_3)$ transformera le milieu M_{AC} de $[AC]$ en le milieu de $[\psi(\rho_3)(A)\,\psi(\rho_3)(C)] = [BD]$, autrement dit $\psi(\rho_3)(M_{AC}) = M_{BD}$. Le centre de gravité O du tétraèdre est le milieu de $[M_{AC}M_{BD}]$, de sorte que la restriction de $\psi(\rho_3)$ à la droite $(M_{AC}M_{BD})$ soit égale à la symétrie centrale par rapport à O.

On a

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{M_{AD}M_{CD}}$$

de sorte que le quadrilatère $Q = M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ soit un parallélogramme. Les points M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{DA} seront donc coplanaires. Notons Π le plan $(M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA})$. En utilisant des barycentres, on montre que O est le milieu de $[M_{AB}M_{CD}]$ et de $[M_{BC}M_{DA}]$. Donc $O \in \Pi$.

Le Théorème de la droite des milieux appliqué à chacune des faces du tétraèdre donne

$$M_{AB}M_{BC} = M_{BC}M_{CD} = M_{CD}M_{AD} = M_{AD}M_{AB} = \frac{c}{2}$$

où c est la longueur de l'arête de T. Ainsi Q est un losange. La conservation des milieux par une application affine montre que

$$M_{AB} \overset{\psi(\rho_3)}{\longmapsto} M_{BC} \overset{\psi(\rho_3)}{\longmapsto} M_{CD} \overset{\psi(\rho_3)}{\longmapsto} M_{DA}.$$

Comme $\psi(\rho_3)(O) = O$, on déduit

$$OM_{AB} = OM_{BC} = OM_{CD} = OM_{DA}$$

par conservation des distances. Le losange Q possède des diagonales égales, donc c'est un carré. Enfin, il est facile de voir que $\Pi = (M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA})$ est le plan médiateur de $[M_{AC}M_{BD}]$ (en effet, M_{AB} est à égale distance de M_{AC} et M_{BD}, etc), et cela prouve que l'axe $(M_{AC}M_{BD})$ est orthogonal au plan Π.

Finalement le plan $\Pi = (M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA})$ est perpendiculaire à la droite $(M_{AC}M_{BD})$, l'application $\psi(\rho_3)|_{(M_{AC}M_{BD})}$ est la symétrie par rapport à O et $\psi(\rho_3)|_{\Pi}$ est la rotation de centre O et de mesure $\pi/2$ (lorsque Π est orienté par la base $(\overrightarrow{OM}_{AB}, \overrightarrow{OM}_{BC})$).

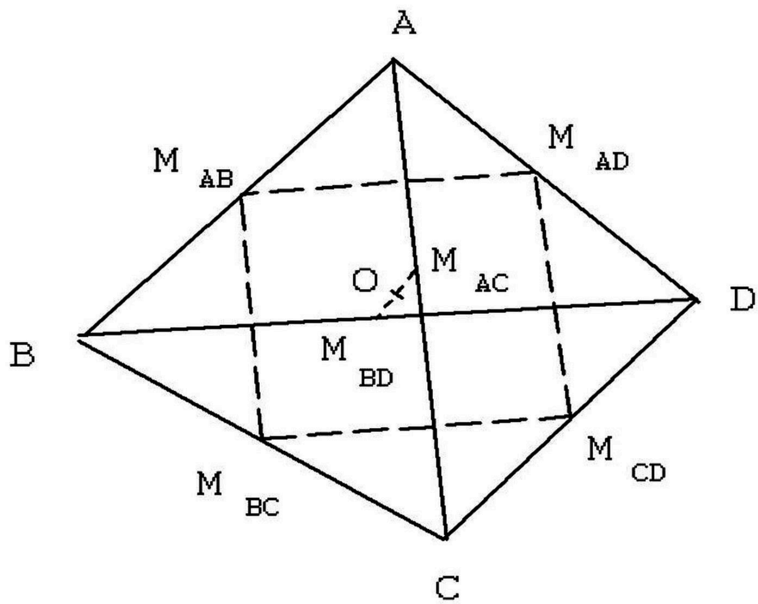


Fig. 16

Les valeurs propres de L_{ρ_3} seront -1, $e^{i\pi/2} = i$ et $e^{-i\pi/2} = -i$. Le polynôme caractéristique de $\psi(\rho_3)$ sera

$$\chi_{L_{\rho_3}}(X) = -(X+1)(X-i)(X+i) = -(X+1)\left(X^2+1\right).$$

D'après **I.1.b** : $\tau\sigma = (ABCD) = \rho_3$. Le morphisme ψ permet alors d'écrire $\psi(\rho_3) = \psi(\tau) \circ \psi(\sigma)$ soit $L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma$ en passant aux matrices. Ainsi

$$L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et un calcul direct donne

$$\chi_{L_{\rho_3}}(X) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} - X & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - X & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{1}{3} - X \end{vmatrix} = -(X+1)\left(X^2+1\right).$$

Remarque : L'application $\psi(\rho_3)$ est une isométrie dont l'ensemble des points invariants est réduit à $\{O\}$. C'est la composée de la rotation d'axe $(M_{AC}M_{BD})$ et d'angle $\pi/2$ et de la réflexion de base $(M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA})$.

III.3.d Ici $\rho_4 = (AC)(BD)$ donc les points M_{AC} et M_{BD} sont invariants par $\psi(\rho_4)$. En utilisant des plans médiateurs judicieux, on peut vérifier que

$(M_{AC}M_{BD})$ est orthogonale à (AC) et à (BD), de sorte que $\psi(\rho_4)$ coïncide avec la réflexion par rapport à la droite $(M_{AC}M_{BD})$ (encore appelée demi-tour d'axe $(M_{AC}M_{BD})$). On aura

$$\chi_{L_{\rho_4}}(X) = -(X+1)^2(X-1).$$

III.4 Si M et N sont des sommets de T, notons Γ_{MN} le grand cercle passant par M et N. Le cercle Γ_{MN} est l'intersection de la sphère Ω et du plan (OMN). On a les résultats suivants :

Lemme 1 : Les seuls points triples sont les sommets du tétraèdre T et leurs symétriques par rapport à O. Il existe donc $2 \times 4 = 8$ points triples sur la sphère Ω.

Preuve du Lemme 1 : Si M est un point triple, c'est l'intersection de trois grands cercles passant chacun par deux sommets de T. Comme T n'a que quatre sommets, deux des cercles qui interviennent ici auront un sommet de T en commun. Il existera donc $U, V, W, X, Y \in \{A, B, C, D\}$ tels que

$$M \in \Gamma_{UV} \cap \Gamma_{UW} \cap \Gamma_{XY}$$

et tels que les paires $\{U, V\}$, $\{U, W\}$ et $\{X, Y\}$ soient deux à deux distinctes. Dans ce cas

$$M \in \Gamma_{UV} \cap \Gamma_{UW} \subset (OUV) \cap (OUW) = (OU)$$

et M appartiendra à l'intersection $\{U, U'\}$ de la droite (OU) et de la sphère Ω, où U' désigne le symétrique de U par rapport à O.

Réciproquement, si $U \in \{A, B, C, D\}$ alors U et U' sont bien des points triples puisque

$$\{U, U'\} = \Gamma_{UV} \cap \Gamma_{UW} \cap \Gamma_{UZ}$$

en posant $\{V, W, Z\} = \{A, B, C, D\} \setminus \{U\}$. ■

Lemme 2 : Les deux points de $\Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB}$ sont simples. Cela est donc aussi vrai si l'on considère $\Gamma_{UV} \cap \Gamma_{XY}$ avec $\{U, V, X, Y\} = \{A, B, C, D\}$.

Preuve du Lemme 2 : On a $\Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB} \subset \Omega \cap (OCD) \cap (OAB)$. Comme $(OCD) \cap (OAB)$ est une droite passant par le centre O de Ω, l'intersection $\Omega \cap (OCD) \cap (OAB)$ est de cardinal 2 et l'inclusion précédente entre deux ensembles de même cardinal est en fait une égalité :

$$\Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB} = \Omega \cap (OCD) \cap (OAB).$$

Ainsi, en notant (x, y, z) les coordonnées de W :

$$W(x, y, z) \in \Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} W \in \Omega \\ W \in (OAB) \\ W \in (OCD). \end{cases}$$

On a
$$W \in \Omega \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$
Les points O, A et B ont une seconde coordonnée nulle, donc le plan (OAB) admet $y = 0$ comme équation. Ensuite
$$\begin{aligned} W \in (OCD) &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OW}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = z\sqrt{2}. \end{aligned}$$
On aura finalement $z^2 = 3$ d'où $W = (\sqrt{6}, 0, \sqrt{3})$ ou $(-\sqrt{6}, 0, -\sqrt{3})$, i.e.
$$\Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$
Aucun des deux points trouvé n'est un sommet de T ou le symétrique d'un sommet par rapport à O, donc W est un point simple. ∎

Lemme 3 : Il y a 8 points triples et 6 points simples.

Preuve du lemme 3 : Les intersections des grands cercles contenant deux sommets de T sont de l'un des deux types suivants :

⋆ Premier type : Les deux cercles contiennent un sommet de T en commun. Par exemple Γ_{AB} et Γ_{AC}. Alors $\Gamma_{AB} \cap \Gamma_{AC} = \{A, A'\}$ et l'on obtient des points triples puisque
$$\Gamma_{AB} \cap \Gamma_{AC} \cap \Gamma_{AD} = \left\{A, A'\right\}.$$
Il y a 4 sommets de T, donc on trouvera $2 \times 4 = 8$ points triples.

⋆ Deuxième type : Les deux cercles n'ont aucun sommet de T en commun. On se trouve dans le cas du Lemme 2 et l'on obtient 2 points simples. Il n'y a que 3 intersections de ce type, à savoir $\Gamma_{AB} \cap \Gamma_{CD}$, $\Gamma_{AC} \cap \Gamma_{BD}$, et $\Gamma_{AD} \cap \Gamma_{BC}$, donc $2 \times 3 = 6$ points simples. ∎

• **Coordonnées sphériques des points simples** : Cherchons par exemple les coordonnées sphériques des points de $\Gamma_{AB} \cap \Gamma_{CD}$ obtenus dans la preuve du Lemme 2 (les autres points simples se calculeraient de la même manière). On doit résoudre
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta = \varepsilon\sqrt{6} \\ y = r\cos\varphi\sin\theta = 0 \\ z = r\sin\varphi = \varepsilon\sqrt{3} \end{cases}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. On trouve $r^2 = 9$, donc $r = 3$, puis $\sin\varphi = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc

$$\varphi = \varepsilon \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Enfin $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, donc

$$\begin{cases} \cos\theta = \varepsilon \\ \sin\theta = 0. \end{cases}$$

En conclusion, les 2 points de $\Gamma_{AB} \cap \Gamma_{CD}$ admettent les coordonnées sphériques

$$(r, \varphi, \theta) = \left(3, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \text{ ou } \left(3, -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}, \pi\right).$$

Remarques au sujet de la recherche des points simples :

a) Donnons une deuxième solution qui permet de dénombrer le nombre de points simple lorsque l'on connaît le nombre de points triples (donné par le Lemme 1). Il y a 6 grands cercles possibles (Γ_{AB}, Γ_{AC}, Γ_{AD}, Γ_{BC}, Γ_{BD}, Γ_{CD}) donc $C_6^2 = 15$ couples de cercles qui donneront $2 \times 15 = 30$ points d'intersections. Chacun des 8 points triples a été compté 3 fois (puisqu'étant à l'intersection de 3 cercles) si bien que l'on dénombre $30 - 3 \times 8 = 6$ points simples.

b) Donnons maintenant une preuve non calculatoire du Lemme 2 (dont le seul défaut est de ne pas nous donner explicitement les coordonnées des points de $\Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB}$. Soit $M \in \Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB}$. Supposons par l'absurde que M soit un point triple, i.e. appartienne à un troisième cercle Γ_{UV}. On a $U \in \{A, B, C, D\}$, donc par exemple $U = A$. Alors

$$M \in \Gamma_{CD} \cap \Gamma_{AB} \cap \Gamma_{AV}.$$

Comme $\Gamma_{AB} \cap \Gamma_{AV} = \{A, A'\}$, on déduit $M \in \{A, A'\}$. Si $M = A$, on déduit $A \in \Gamma_{CD}$ et les points O, A, C, D sont coplanaires. Si $M = A'$, on déduit $A' \in \Gamma_{CD}$ et les points O, A', C, D sont coplanaires, ce qui entraîne encore la coplanéarité des points O, A, C, D puisque O est milieu de $[AA']$. Dans les deux cas, on constate que les points O, A, C, D sont coplanaires. Alors O serait le barycentre des points A, C, D et cela contredit la définition de O (comme isobarycentre des quatre points non coplanaires A, B, C, D).

III.5.a. Notons toujours Γ_{CD} le grand cercle passant par C et D. Le point M de coordonnées $(3, \varphi, \theta)$ sur la sphère Ω appartiendra à Γ_{CD} si et seulement si les points O, C, D, M sont coplanaires, ce que l'on traduira par $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = 0$, i.e.

$$\begin{vmatrix} 3\cos\varphi\cos\theta & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 3\cos\varphi\sin\theta & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 3\sin\varphi & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition s'écrit $\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta - 2\sin\varphi = 0$, ce qui équivaut à

$$\sqrt{2}\tan\varphi - \cos\theta = 0 \quad \text{et} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} \ (\pi)$$

(puisque $\cos\varphi = 0$ rend l'équation $\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta - 2\sin\varphi = 0$ impossible). En conclusion, si l'on convient qu'écrire $\tan\varphi$ suppose implicitement que la condition $\varphi \neq \pi/2 \ (\pi)$ est remplie, on obtient :

$$M\,(3, \varphi, \theta) \in \Gamma_{CD} \Leftrightarrow \sqrt{2}\tan\varphi - \cos\theta = 0.$$

III.5.b. On recommence comme dans la question précédente.

$$\begin{aligned} M\,(3, \varphi, \theta) \in \Gamma_{AB} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\cos\varphi\cos\theta & 0 & 2\sqrt{2} \\ 3\cos\varphi\sin\theta & 0 & 0 \\ 3\sin\varphi & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\varphi\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ou } \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\,(3, \varphi, \theta) \in \Gamma_{AC} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\cos\varphi\cos\theta & 0 & -\sqrt{2} \\ 3\cos\varphi\sin\theta & 0 & -\sqrt{6} \\ 3\sin\varphi & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\varphi(\cos\theta\sqrt{3} - \sin\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \tan\theta = \sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M\,(3,\varphi,\theta)\in\Gamma_{AD} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\cos\varphi\cos\theta & 0 & -\sqrt{2}\\ 3\cos\varphi\sin\theta & 0 & \sqrt{6}\\ 3\sin\varphi & 3 & -1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \cos\varphi(\cos\theta\sqrt{3}+\sin\theta)=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\varphi=\pm\frac{\pi}{2}\\ \text{ou}\\ \tan\theta=-\sqrt{3}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{3}\ (\pi)\Leftrightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}\ \text{ou}\ \frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M\,(3,\varphi,\theta)\in\Gamma_{BC} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\cos\varphi\cos\theta & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 3\cos\varphi\sin\theta & 0 & -\sqrt{6}\\ 3\sin\varphi & -1 & -1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow -\cos\varphi\cos\theta\sqrt{3}+3\cos\varphi\sin\theta-2\sin\varphi\sqrt{6}=0\\
&\Leftrightarrow -\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-2\tan\varphi\sqrt{2}=0\quad\text{car }\varphi\neq\frac{\pi}{2}\ (\pi)\\
&\Leftrightarrow \varphi=\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M\,(3,\varphi,\theta)\in\Gamma_{BD} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\cos\varphi\cos\theta & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 3\cos\varphi\sin\theta & 0 & \sqrt{6}\\ 3\sin\varphi & -1 & -1\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \cos\varphi\cos\theta\sqrt{3}+3\cos\varphi\sin\theta+2\sin\varphi\sqrt{6}=0\\
&\Leftrightarrow \cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2\tan\varphi\sqrt{2}=0\quad\text{car }\varphi\neq\frac{\pi}{2}\ (\pi)\\
&\Leftrightarrow \varphi=\arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)\right).
\end{aligned}$$

III.5.c. La Fig. 17 représente les six tracés pour $(\varphi, \theta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ (en couleur sur la version numérique de ce livre seulement)

$$\Gamma_{CD} : \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) \text{ est en noir,}$$

$$\Gamma_{BC} : \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)\right) \text{ est en bleu,}$$

$$\Gamma_{BD} : \varphi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)\right) \text{ est en vert.}$$

Les courbes $\Gamma_{AB} : \theta = 0$ ou π ; $\Gamma_{AC} : \theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$; $\Gamma_{AD} : \theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$ sont représentés par des couples de segments verticaux respectivement magentas, jaunes et marrons. On a $\frac{\pi}{3} \simeq 1,04$, $\frac{2\pi}{3} \simeq 2,09$, $\frac{4\pi}{3} \simeq 4,18$, $\frac{5\pi}{3} \simeq 5,24$. Les six intersections des courbes sinusoïdales correspondent à six points triples. Les deux derniers points triples sont A symbolisé par la droite horizontale $\varphi = \pi/2$ et A' symbolisé par la droite horizontale $\varphi = -\pi/2$.

On retrouve $\Gamma_{AB} \cap \Gamma_{AC} \cap \Gamma_{AD} = \{A, A'\}$ sur la figure. Les 6 points simples sont les intersections des segments verticaux avec l'une des trois sinusoïdes.

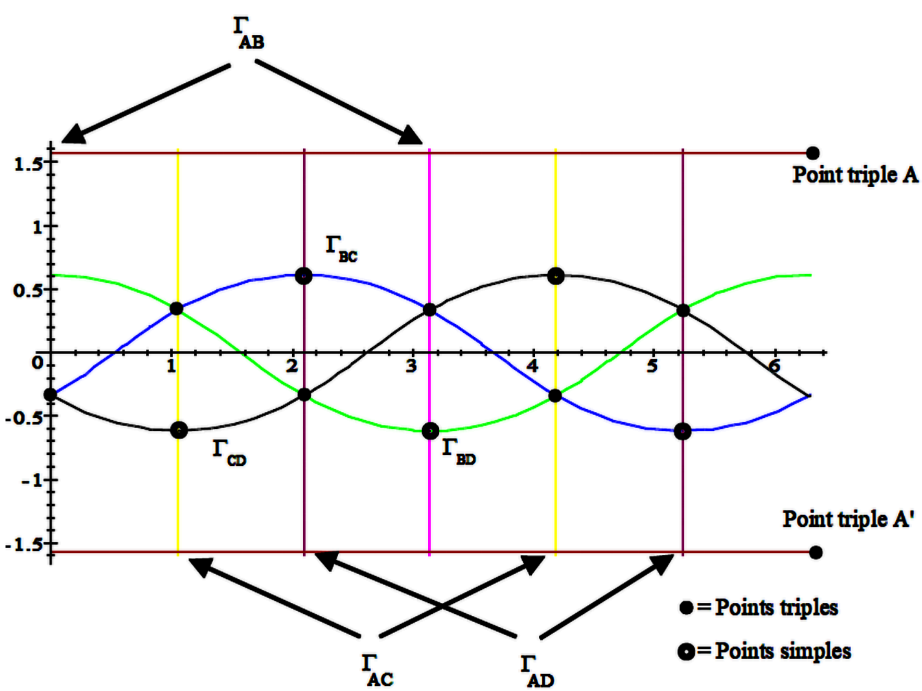


Fig. 17

III.5.d. On n'envisagera que le cas de la courbe de niveau $F(M) = 3/2$, le reste pouvant se traiter de la même manière. On a

$$F: \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (\varphi, \theta) & \mapsto & ON \end{array}$$

où N est l'intersection de $[OM]$ avec la frontière de T. Si $M(\varphi, \theta) \in \Omega$, cherchons le point N' d'intersection de la droite (OM) et du plan (ABC). On rappelle que

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix}, M\begin{pmatrix} 3\cos\varphi\cos\theta \\ 3\cos\varphi\sin\theta \\ 3\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

En notant $\overrightarrow{ON'} = t\overrightarrow{OM}$, il s'agit de déterminer la valeur de t telle que

$$\det(\overrightarrow{AN'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3t\cos\varphi\cos\theta & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 3t\cos\varphi\sin\theta & 0 & -\sqrt{6} \\ 3t\sin\varphi - 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

On trouve

$$\left(\sqrt{2}\cos\varphi\left(\sqrt{3}\cos\theta - 3\sin\theta\right) + \sin\varphi\sqrt{3}\right)t = \sqrt{3}.$$

Comme

$$\sqrt{3}\cos\theta - 3\sin\theta = \sqrt{12}\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) = \sqrt{12}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

on aura (en supposant que le dénominateur n'est pas nul)

$$t = \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\varphi}.$$

Le point N' intersection de (OM) et (ABC) coïncidera avec N si et seulement si $t \geq 0$, et dans ce cas

$$F(M) = ON = ON' = 3t = \frac{3}{2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\varphi}.$$

Dans le premier cas où N appartient au plan (ABC), on aura alors

$$\begin{aligned} F(M) = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\varphi} = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\varphi = 2. \end{aligned}$$

L'allure de la courbe Λ : $2\sqrt{2}\cos\varphi\cos(\theta+\frac{\pi}{3})+\sin\varphi=2$ est donnée à la Fig. 18. Il y aurait encore 3 autres courbes de ce type à obtenir, chacune d'elle correspondant à l'une des trois faces restantes du tétraèdre. Les calculs seraient similaires.

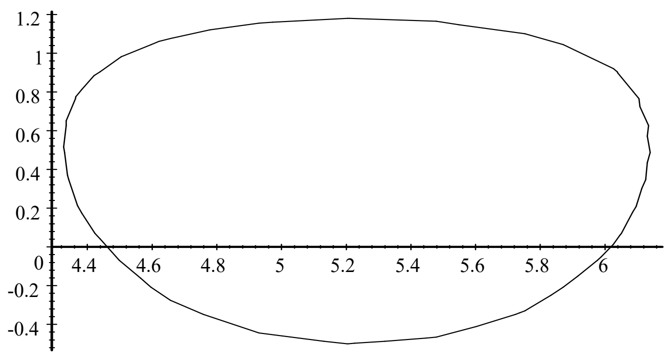


Fig. 18

IV.1. Le Théorème de Thalès montre que $M_{AB}M_{AC}=BC/2=a$. De même, toutes les distances entre deux milieux d'arêtes de T seront égales à a, et $M_{AB}M_{AC}M_{AD}M_{BC}M_{BD}M_{CD}$ sera un octaèdre régulier d'arêtes de longueurs a.

Montrer que $OM_{AB}M_{AC}M_{AD}$ est un tétraèdre rectangle d'hypoténuse a revient à montrer que :

$$(\mathbf{R1})\quad OM_{AB}=OM_{AC}=OM_{AD},$$

$$(\mathbf{R2})\quad \overrightarrow{OM}_{AB}.\overrightarrow{OM}_{AC}=\overrightarrow{OM}_{AB}.\overrightarrow{OM}_{AD}=\overrightarrow{OM}_{AC}.\overrightarrow{OM}_{AD}=0.$$

• Preuve de ($\mathbf{R1}$) : Calculons d'abord $\overrightarrow{OM}_{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AD}$. On a $\overrightarrow{OM}_{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, et comme O est l'isobarycentre de A, B, C, D,

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\text{ et }\overrightarrow{BO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{4}(-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}).$$

Donc

$$\overrightarrow{OM}_{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{8}(2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}).$$

De la même façon, on aura $\overrightarrow{OM}_{AC}=\frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$ etc. Pour ce qui nous concerne ici :

$$\begin{aligned} OM_{AB}^2 &= \frac{1}{16}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})^2 \\ &= \frac{1}{16}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}). \end{aligned}$$

Comme T est un tétraèdre de côtés $2a$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4a^2 \cos\frac{2\pi}{3} = 2a^2$, et la formule précédente devient

$$OM_{AB}^2 = \frac{1}{16}\left(4a^2 + 4a^2 + 4a^2 - 2 \times 2a^2 - 2 \times 2a^2 + 2 \times 2a^2\right) = \frac{a^2}{2}$$

d'où $OM_{AB} = a\sqrt{2}/2$. Ce calcul peut être refait avec OM_{AC}, et l'on conclut à

$$OM_{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OM_{AC}.$$

• Preuve de (**R2**) : Les expressions de $\overrightarrow{OM}_{AB}$ et $\overrightarrow{OM}_{AC}$ obtenues ci-dessus permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}_{AB}.\overrightarrow{OM}_{AC} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}).\frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{8}(-4a^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - 4a^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \\ &\qquad + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + 4a^2). \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = ... = 2a^2$, on obtient bien $\overrightarrow{OM}_{AB}.\overrightarrow{OM}_{AC} = 0$.

IV.2.a, b et c. La Fig. 19 montre l'octaèdre à l'intérieur du tétraèdre T, tandis que la Fig. 20 représente les différents morceaux du puzzle. Les 8 tétraèdres rectangles s'assemblent pour former l'octaèdre, et l'on adjoint alors les 4 tétraèdres réguliers de côtés a.

Après avoir peint le grand tétraèdre T en rouge et après avoir mélangé les pièces, on possède 8 tétraèdres rectangles (4 entièrement bleus et 4 dont la base équilatérale est rouge) et 4 tétraèdres réguliers (chacun possédant 3 faces rouges et une face bleue).

Imaginons l'octaèdre en deux parties : le haut formé de 4 tétraèdres rectangles (vers nous sur la Fig. 20), et le bas formé de 4 tétraèdres rectangles. Pour reconstituer un grand tétraèdre, on doit placer 2 petits tétraèdres réguliers sur deux faces externes et non consécutives du haut de l'octaèdre, puis 2 petits tétraèdres réguliers sur deux faces externes et non consécutives du bas de l'octaèdre. On peut symboliser cela par le tableau

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathrm{B} & & \mathrm{B} & & & \mathrm{B} & & \mathrm{B} \\
\mathrm{B} & \mathrm{R} & \mathrm{B} & \mathrm{R} & \mathrm{R} & \mathrm{B} & \mathrm{R} & \mathrm{B} \\
\multicolumn{4}{c}{\longleftrightarrow} & \multicolumn{4}{c}{\longleftrightarrow} \\
\multicolumn{4}{c}{\text{haut}} & \multicolumn{4}{c}{\text{bas}}
\end{array} \qquad (*)$$

Les deux lignes du bas correspondent à la couleur Bleue ou Rouge de la face équilatérale des tétraèdres rectangles. Elles donnent sur l'extérieur et seront parfois recouvertes d'un petit tétraèdre régulier symbolisé par la ligne du dessus. Les 4 B signifient que l'on a posé chaque fois une face bleue du petit tétraèdre régulier sur la face équilatérale correspondante du tétraèdre rectangle au-dessous.

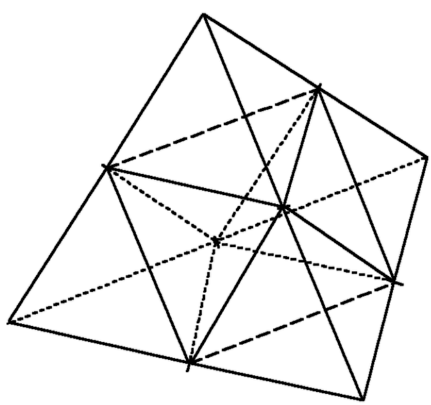


Fig. 19

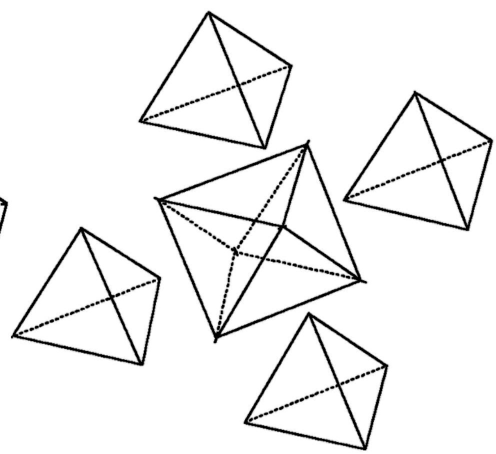


Fig. 20

On distinguera par B, R_1, R_2, R_3 les faces des petits tétraèdres réguliers suivant qu'elles soient bleues ou rouges. L'univers Θ de l'expérience aléatoire sera formé d'événements élémentaires qui auront l'aspect de tableaux

$$\begin{array}{cccccccc}
y_1 & & y_2 & & & y_3 & & y_4 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\
\multicolumn{4}{c}{\longleftrightarrow} & \multicolumn{4}{c}{\longleftrightarrow} \\
\multicolumn{4}{c}{\text{haut}} & \multicolumn{4}{c}{\text{bas}}
\end{array} \qquad (T)$$

où $x_i \in \{\mathrm{R}, \mathrm{B}\}$, où la suite $(x_1, x_2, ..., x_8)$ comporte quatre R et quatre B dans n'importe quel ordre, et où chacun des y_i prend ses valeurs dans l'ensemble $\{\mathrm{B}_1, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3\}$.

Il y a un seul cas favorable : celui du tableau $(*)$.

Calculons le nombre de tableaux (T) que l'on peut former. Il y aura autant de suites $(x_1, x_2, ..., x_8)$ possibles que de façons de placer quatre B dans un ensemble à 8 éléments, la place des B déterminant automatiquement celle des R. Cela fait $C_8^4 = 70$ possibilités.

Comme $y_i \in \{\mathrm{B}_1, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3\}$, il y aura 4^4 suites (y_1, y_2, y_3, y_4) possibles dans (T). Au total, on dénombre donc $70 \times 4^4 = 17920$ cas possibles. La probabilité d'obtenir à nouveau un grand tétraèdre rouge sera par conséquent

$$p = \frac{1}{17920} \simeq 0,000056.$$

Chapitre 10

CAPES externe 2001, épreuve 2

10.1 Énoncé

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLEME

Dans tout le problème on note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels ;
$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels différents de 0 ;
$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs ;
$\mathbb{K}$ un corps qui sera toujours le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

Pour tout couple d'éléments p et q de $\mathbb{N}$ tels que p est inférieur ou égal à q, on note : $[\![p,q]\!] = \{m; m \in \mathbb{N} \,/\, p \leq m \text{ et } m \leq q\}$, et pour tout élément k de $\mathbb{N}$ on note $k\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de k soit : $k\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N} \,/\, \exists n \in \mathbb{N} \quad m = kn\}$. On note :

$$\mathcal{S}(\mathbb{K}) \text{ l'ensemble des suites d'éléments de } \mathbb{K}.$$

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera parfois notée (u_n). On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les deux opérations suivantes :

$$\forall u = (u_n)\,,\ \forall v = (v_n)\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u + v = (u_n + v_n)\,,\ \lambda u = (\lambda u_n)\,.$$

On dit qu'un élément u de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux lorsqu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (1)$$

[0] [ag50e] v1.00

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est définie qu'à partir du rang 1, la relation (1) n'est bien entendu exigée que pour n dans $\mathbb{N}^*$.

L'objet du problème est d'étudier certains aspects des suites récurrentes li-néaires d'ordre deux.

La première partie concerne leurs propriétés générales, et propose quelques exemples parmi lesquels la suite dite de Fibonacci définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1\ ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres et concernent des problèmes particuliers dans lesquels interviennent de telles suites.

I. ÉTUDE GÉNÉRALE ET EXEMPLES

Dans cette partie a et b sont deux éléments fixés de $\mathbb{K}$, et on note $\mathcal{R}(a,b)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ qui vérifient la relation (1). On appellera équation caractéristique l'équation suivante où t est l'inconnue :

$$t^2 - at - b = 0 \qquad (C)$$

I.A.

I.A.l. Montrer que pour tout x et tout y de $\mathbb{K}$ il existe un unique élément $u = (u_n)$ de $\mathcal{R}(a,b)$ tel que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Cet élément sera noté $U(x,y)$.

I.A.2. Montrer que $\mathcal{R}(a,b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ et que l'application :

$$U : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to & \mathcal{R}(a,b) \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{U}(x,y) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur $\mathcal{R}(a,b)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{R}(a,b)$.

I.B.

I.B.l.

a. Soit r un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que la suite (r^n) est un élément de $\mathcal{R}(a,b)$ si et seulement si r est solution de l'équation (C).

b. Montrer que si l'équation (C) admet une racine double r, alors la suite (nr^n) appartient à $\mathcal{R}(a,b)$.

I.B.2.

a. On suppose que l'équation (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$. Montrer que les deux suites (r_1^n) et (r_2^n) forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

b. On suppose que (C) admet dans $\mathbb{K}$ une racine double r non nulle. Montrer que les deux suites (r^n) et (nr^n) forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$. Dans le cas où (C) admet 0 pour racine double, donner une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

c. Pour cette question, $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$. On suppose que (C) admet deux racines complexes non réelles $re^{i\alpha}$ et $re^{-i\alpha}$ où r est un réel non nul et α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$. Montrer que les deux suites $(r^n \cos n\alpha)$ et $(r^n \sin n\alpha)$ forment une base de $\mathcal{R}(a,b)$.

I.C. **Exemples**.

I.C.l.

a. Déterminer, pour tout entier naturel n, le nombre de Fibonacci F_n en fonction de n.

b. Lorsque n tend vers l'infini, donner un équivalent simple de F_n en fonction du nombre φ (dit nombre d'or) :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

I.C.2. Soit α, β, γ trois éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on note M_n la matrice carrée d'ordre n dont le terme $m_{i,j}$ situé dans la i-ième ligne et la j-ième colonne est donné par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \begin{cases} m_{i,j} = \alpha & \text{si } i = j \\ m_{i,j} = \beta & \text{si } i = j-1 \\ m_{i,j} = \gamma & \text{si } i = j+1 \\ m_{i,j} = 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On note enfin D_n le déterminant de la matrice M_n.

a. Montrer que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux que l'on précisera. Quelle valeur doit-on donner à D_0 si l'on souhaite obtenir une suite indexée par $\mathbb{N}$ qui vérifie la même relation de récurrence ?

b. On suppose $\beta = \gamma = 1$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer explicitement D_n lorsque α est égal à 2, puis lorsque α est égal à $\sqrt{2}$.

I.C.3. Soit M la matrice réelle d'ordre 4 :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer M^2 et M^3 et vérifier que M^3 est combinaison linéaire de M et de M^2.

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 la matrice M^n peut s'écrire sous la forme :

$$M^n = a_n M + b_n M^2$$

et calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux, et calculer les valeurs de a_n et b_n.

d. Généralisation : Soit P une matrice symétrique réelle de rang 2.

i. Prouver que P annule un polynôme de degré au plus trois, sans terme constant.

ii. En s'inspirant des calculs précédents, montrer qu'il est possible d'ob-tenir la matrice P^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1 sans effectuer d'autre produit matriciel que les calculs de P^2 et de P^3.

II . RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DE PELL-FERMAT

Cette partie montre sur un exemple l'intervention des suites récurrentes li-néaires d'ordre deux dans la résolution des équations dites de Pell-Fermat.

On cherche toutes les solutions appartenant à $\mathbb{N}^2$ de l'équation (2) suivante :

$$x^2 - 5y^2 = 1 \qquad (2)$$

Par abus de langage, l'expression « solution de (2) » désignera seulement ce type de solutions.

II.A. Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O; i, j)$ on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation :

$$x^2 - 5y^2 = 1.$$

Les solutions de l'équation (2) sont donc les éléments (x, y) de $\mathbb{N}^2$ qui sont coordonnées d'un point de $\mathcal{H}$. On identifiera un tel élément et le point qu'il représente.

II.A. 1. Déterminer toutes les solutions (x, y) de (2) pour lesquelles y est un élément de $[\![0, 5]\!]$.

II.A.2. Soit (x_1, y_1) la solution de l'équation (2) qui a la plus petite ordonnée strictement positive. On note $S_0 = (1, 0)$ et $S_1 = (x_1, y_1)$, et on définit l'application g par :

$$g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ (x, y) & \mapsto & (9x + 20y, 4x + 9y)\,. \end{array} \right.$$

Montrer que la restriction de g à $\mathcal{H}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ sur elle-même, et vérifie $g(S_0) = S_1$.

II.A.3. Soit (S_n) la suite de points de $\mathcal{P}$ définie par son premier terme S_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = g(S_n).$$

a Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ les coordonnées (x_n, y_n) du point S_n sont des solutions de (2).

b. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) vérifient une même relation de récurrence linéaire d'ordre deux.

c. Déterminer l'expression de x_n et celle de y_n en fonction de n.

II.A.4.

a. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ l'image par g de l'arc de la courbe $\mathcal{H}$ dont les extrémités sont les points S_n et S_{n+1} est l'arc d'extrémités S_{n+1} et S_{n+2}.

b. Montrer que les éléments (x_n, y_n), pour n dans $\mathbb{N}$, sont les seules solutions de l'équation (2).

II.B. *Le but de cette question est de montrer que le choix fait en II.A.2. pour l'application g est le seul qui permette la résolution de l'équation par la méthode précédente.*

Soit $\mathcal{L}$ une hyperbole quelconque de $\mathcal{P}$, A et B deux points distincts de $\mathcal{L}$.

II.B.l. Déterminer toutes les applications affines ψ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui vérifient $\psi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. *On pourra utiliser un repère porté par les asymptotes de l'hyperbole.*

II.B.2. Montrer que, parmi les applications déterminées en II.B.l., trois exac-tement envoient le point A sur le point B, et vérifier que l'une d'entre elles est involutive.

II.B.3. En déduire que l'application g est la seule application affine non involutive pour laquelle l'image de $\mathcal{H}$ est $\mathcal{H}$ et l'image du point S_0 est le point S_1.

III. UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE

Dans cette partie on utilise le fait que les parties de $\mathbb{N}$ qui sont de la forme $k\mathbb{N}$ se caractérisent par des propriétés de symétrie pour trouver une relation arithmétique entre les éléments d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux lorsque les coefficients de la relation de récurrence sont des entiers premiers entre eux.

Tous les entiers considérés sont des éléments de $\mathbb{Z}$. Pour tout couple (m, n) d'entiers on note $m \wedge n$ le plus grand diviseur commun de m et de n, et la notation $m|n$ signifie que m est un diviseur de n. On considère deux entiers p et q premiers entre eux, et la suite récurrente (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \ , \quad u_1 = 1;$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n.$$

Il est clair que tous les termes de la suite sont des entiers.

III.A. **Introduction : un exemple numérique**.

Dans le cas où $p = 1$, $q = -2$, $m = 30$ et $n = 45$, trouver à l'aide d'une calculatrice les termes u_m et u_n, puis comparer $u_m \wedge u_n$ et $u_{m \wedge n}$.

III.B. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est autosymétrique lorsqu'elle contient 0 et vérifie la condition :

$$\forall n \in A, \quad \forall j \in [\![0, n]\!], \quad (n - j \in A \Leftrightarrow n + j \in A)$$

qui signifie que deux éléments de $\mathbb{N}$ qui sont symétriques par rapport à un élément de A se situent soit tous deux dans A , soit tous deux hors de A.

III.B. 1. Montrer que pour tout entier naturel k, la partie $k\mathbb{N}$ est autosymétrique.

III.B.2. Réciproquement, montrer que si A est une partie autosymétrique non réduite à $\{0\}$, et si k désigne son plus petit élément strictement positif, alors $A = k\mathbb{N}$.

Il résulte donc de cette question qu'il y a identité entre les parties autosymétriques de $\mathbb{N}$ et celles qui sont de la forme $k\mathbb{N}$ pour un entier naturel k.

III.C. Pour tout entier strictement positif d on pose $A\,(d)) = \{n \in \mathbb{N} \,/\ d|u_n\}$.

III.C.1.

a. Soit n et d deux entiers naturels, d étant strictement positif. Montrer que si d est un diviseur de u_n, alors :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad d| \left(u_{n+k} + (-q)^k\, u_{n-k}\right).$$

b. En déduire que si d est premier avec q, alors $A(d)$ est autosymétrique.

III.C.2.

a. On suppose que q n'est pas premier. Montrer que si c est un diviseur premier de q, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c\,|\,(u_{n+1} - pu_n)$$

et en déduire que u_0 est 1e seul élément de la suite (u_n) qui soit divisible par c.

b. Montrer que lorsque d et q ne sont pas premiers entre eux alors $A(d) = \{0\}$.

III.D. Soit m et n deux entiers strictement positifs, $d = m \wedge n$ et $D = u_m \wedge u_n$.

III.D.1. En considérant $A(D)$, prouver la relation : D divise u_d.

III.D.2. En considérant de même $A(u_d)$, prouver la relation : u_d divise D.

III.D.3. Quelle relation lie D et u_d ?

IV. LES REPRÉSENTATIONS DE FIBONACCI ET DE ZECKENDORFF

Dans cette partie on examine la possibilité d'écrire - éventuellement de manière unique - tout entier naturel comme somme d'éléments de la suite de Fibonacci.

Tous les entiers considérés sont des éléments de $\mathbb{N}$.

On notera $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci usuelle privée de ses deux premiers termes, c'est-à-dire la suite définie par :

$$\begin{aligned} &v_0 = 1\ , \quad v_1 = 2; \\ &\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n. \end{aligned}$$

II s'agit d'une suite d'entiers, dont les premiers termes sont :

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ ...$$

On dit que l'entier m admet une représentation de Fibonacci (que l'on pourra abréger en F-représentation) lorsqu'il peut s'écrire sous la forme :

$$m = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k$$

où les coefficients a_k appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$.

On appelle écriture abrégée d'une telle représentation la notation $\overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$.

De même qu'en écriture décimale, où l'on écrit en général 27 *plutôt que* 027*, on évitera les zéros placés à gauche, de sorte que toute écriture abrégée, à l'exception de celle de* 0*, commencera par un* 1 *(ceci assure en outre l'unicité de l'écriture abrégée d'une représentation).*

Exemple : la représentation $1 + 3 + 5 + 21$ du nombre 30 a pour écriture abrégée $\overline{1001101}$.

On appelle représentation de Zeckendorff de m (en abrégé : Z-représentation) toute représentation de Fibonacci de m où n'apparaissent pas deux nombres consécutifs de la suite (v_n).

Exemple : $\overline{1001101}$ n'est pas une Z-représentation du nombre 30 puisqu'elle utilise les nombres 3 et 5 qui sont consécutifs dans la suite (v_n). En revanche $\overline{1010001}$ en est une.

IV.A. **Un exemple.** Donner, en écriture abrégée, toutes les F-représentations du nombre 37 en précisant pour chacune si elle est ou non une Z-représentation. Il n'est pas demandé de justification.

IV.B. **Deux égalités fondamentales.** Soit n un entier naturel et s la partie entière de $n/2$. On définit les sommes σ_n et S_n par :

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{s} v_{n-2k} \ ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Prouver les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad \sigma_n = v_{n+1} - 1\ ,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad S_n = v_{n+2} - 2\ .$$

IV.C. **La représentation de Zeckendorff.**

IV.C.l. Soit $\sum_{k=0}^{n} a_k v_k$ une Z-représentation de l'entier m, telle que a_n soit différent de 0.

a. Prouver l'inégalité : $m \leq \sigma_n$.

b. En déduire que v_n est le plus grand des nombres de Fibonacci qui sont inférieurs ou égaux à m.

IV.C.2. Prouver que tout entier m admet une unique Z-représentation.

IV.C.3. Donner un algorithme permettant de calculer la Z-représentation d'un entier m donné. On décrira l'algorithme de préférence en français, sinon dans un langage pseudo-algorithmique clairement compréhensible.

Cet algorithme pourra faire intervenir les éléments de la suite (v_n) sans en donner une méthode de calcul : on supposera qu'ils sont immédiatement dis-ponibles.

IV.C.4. Donner en écriture abrégée la Z-représentation du nombre 272 ainsi que, pour tout entier n, celles des nombres σ_n et S_n.

IV.C.5. On note $z(m)$ le nombre de chiffres de l'écriture abrégée de la Z-représentation du nombre m, et $d(m)$ celui de son écriture décimale.

a. En utilisant la valeur de v_n calculée au I.C.1, donner un équivalent simple de $z(m)$ au voisinage de l'infini.

b. Etudier le comportement du rapport $z(m)/d(m)$ lorsque m tend vers l'infini.

IV.D. **Le nombre des représentations de Fibonacci d'un entier.**

La question précédente a montré que tout entier admet au moins une représentation de Fibonacci : celle de Zeckendorff. On s'intéresse au nombre $\delta(m)$ des F-représentations de l'entier m.

IV.D. 1. Montrer que $\delta(m) = 1$ si et seulement si m est l'un des nombres σ_n.

IV.D.2. Calculer pour tout entier n la valeur de $\delta(v_n)$.

IV.D.3. Prouver que dans l'intervalle $[\![v_n - 1, v_{n+1} - 1]\!]$ la fonction δ prend la même valeur en des points symétriques par rapport au centre de l'intervalle.

10.2 Corrigé

I.A.1. ▶ Existence de la suite : On montre par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{P}(n)$: "Il est possible de construire $n+2$ scalaires u_0, ..., u_{n+1} tels que $u_0 = x$, $u_1 = y$ et $u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k$ pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$."

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est triviale. Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, notons $(u_0, ..., u_{n+1})$ une suite qui vérifie la condition $\mathcal{P}(n)$. Il suffit de poser $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour que la suite $(u_0, ..., u_{n+1}, u_{n+2})$ vérifie la condition $\mathcal{P}(n+1)$.

▶ Unicité : Si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient $u_0 = x$, $u_1 = y$ et la condition (1), il est facile de vérifier, par récurrence, que la propriété

$$\mathcal{Q}(n): \ \forall k \leq n \quad u_k = v_k$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété est triviale aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie au rang n, on aura bien sûr $u_k = v_k$ pour tout $k \leq n$, mais aussi

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} = av_n + bv_{n-1} = v_{n+1},$$

ce qui montre la propriété au rang $n+1$.

I.A.2. Si (u_n) et (v_n) appartiennent à $\mathcal{R}(a, b)$, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+2} + \lambda v_{n+2} &= (au_{n+1} + bu_n) + \lambda (av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + b(u_n + \lambda v_n). \end{aligned}$$

[0] [ag50] v2.02

Cela signifie que $(u_n) + \lambda(v_n) \in \mathcal{R}(a,b)$ et montre que $\mathcal{R}(a,b)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$. L'application U est bien définie d'après **I.A.1**, et c'est une application linéaire puisque

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{K}^2\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ \mathrm{U}\left((x,y) + \lambda (x',y')\right) = \mathrm{U}(x,y) + \lambda \mathrm{U}(x',y')$$

d'après l'unicité démontrée en **I.A.1**.

Enfin U est bijective puisque pour tout $(u_n) \in \mathcal{R}(a,b)$ l'unicité du **I.A.1** permet aussi d'écrire

$$\mathrm{U}(x,y) = (u_n) \Leftrightarrow (x,y) = (u_0, u_1)$$

et de trouver un et un unique antécédent à (u_n). On a montré que U était bien un isomorphisme d'espaces vectoriels, et donc $\dim \mathcal{R}(a,b) = 2$.

I.B.1.a. On a

$$(r^n) \in \mathcal{R}(a,b) \ \Leftrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N} \quad r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \ \Leftrightarrow\ r^2 - ar - b = 0.$$

I.B.1.b. Si le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ est nul, (C) possède une unique racine double $a/2$. Alors

$$\begin{aligned} a\left((n+1) r^{n+1}\right) + b(nr^n) &= [a(n+1) r + bn] r^n = \left[(n+1)\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 n}{4}\right] r^n \\ &= \frac{a^2}{4}(n+2) r^n = (n+2) r^{n+2} \end{aligned}$$

donc $(nr^n) \in \mathcal{R}(a,b)$.

I.B.2.a. On a

$$\lambda(r_1^n) + \mu(r_2^n) = 0 \Rightarrow (S) \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

puisque le système (S) est de Cramer (son déterminant est $r_2 - r_1 \neq 0$). La famille $((r_1^n), (r_2^n))$ est donc libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{R}(a,b)$ de dimension 2, et ce sera une base de cet espace.

I.B.2.b. On vérifie que la famille $((r^n), (nr^n))$ est libre et on conclut comme précédemment :

$$\lambda(r^n) + \mu(nr^n) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda r + \mu r = 0 \end{cases} \ \Rightarrow\ \lambda = \mu = 0.$$

Si 0 est racine double de (C), alors $a = b = 0$ et $\mathcal{R}(a,b)$ est formé des suites (u_n) telles que $u_n = 0$ pour $n \geq 2$. Une base de $\mathcal{R}(a,b)$ est donnée par les suites $(1,0,0,0,...)$ et $(0,1,0,0,...)$.

I.B.2.c. (C) admet deux racines complexes non réelles $r_1 = re^{i\alpha}$ et $r_2 = re^{-i\alpha}$, donc les solutions complexes sont de la forme $\lambda(r_1^n) + \mu(r_2^n)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Première solution : On a

$$r^n \cos n\alpha = r^n \frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2} = \frac{r_1^n + r_n^n}{2}$$

et

$$r^n \sin n\alpha = r^n \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i} = \frac{r_1^n - r_n^n}{2i},$$

donc $(r^n \cos n\alpha)$ et $(r^n \sin n\alpha)$ seront des solutions de (1) comme combinaisons linéaires des vecteurs de base (r_1^n) et (r_2^n). On constate qu'elles sont réelles, et qu'elles sont indépendantes puisque le déterminant du couple de vecteurs $((r^n \cos n\alpha), (r^n \sin n\alpha))$ dans la base $((r_1^n), (r_2^n))$ est

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2i} \neq 0.$$

Deuxième solution : On montre le :

Lemme : (u_n) est une solution réelle de (R) si et seulement si c'est la partie réelle d'une solution complexes de (R) (on a le même résultat avec "partie imaginaire").

preuve : Toute solution réelle est a fortiori une solution complexe, et c'est la partie réelle d'elle même. Réciproquement, si (u_n) est une solution complexe, notons $u_n = v_n + iw_n$ où $v_n, w_n \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n) &\Leftrightarrow v_{n+2} + iw_{n+2} = av_{n+1} + bv_n + i(aw_{n+1} + bw_n) \\ &\Rightarrow v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \\ &\Rightarrow (v_n) \text{ est solution. } \blacksquare\end{aligned}$$

Notons $\lambda = a + ib$, $\mu = c + id$ et $r_1 = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. La forme générique des éléments de $\mathcal{R}(a, b)$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$ sera

$$\begin{aligned}u_n &= \operatorname{Re}(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \operatorname{Re}((a + ib) r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) + (c + id) r^n (\cos n\alpha - i \sin n\alpha)) \\ &= r^n ((a + c) \cos n\alpha + (d - b) \sin n\alpha)\end{aligned}$$

soit $u_n = r^n (A \cos n\alpha + B \sin n\alpha)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. On a montré que le système $((\cos n\alpha), (\sin n\alpha))$ engendrait $\mathcal{R}(a, b)$ (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Comme $\dim \mathcal{R}(a, b) = 2$, on a bien obtenu une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{R}(a, b)$.

I.C.1.a. Ici $a = b = 1$ et $\Delta = 5$. L'équation caractéristique (C) admet les deux solutions réelles $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ et il existera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$F_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pour tout entier n. On détermine λ et μ en résolvant

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{array} \right.$$

On trouve $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

Remarque : On peut écrire F_n sous la forme

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k \left(\sqrt{5}\right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} 2C_n^{2k+1} \left(\sqrt{5}\right)^{2k+1} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2k+1} 5^k. \end{aligned}$$

I.C.1.b. On a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

En effet

$$\xi_n := \frac{F_n\sqrt{5}}{\varphi^n} = 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n$$

et $\lim \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = 0$ puisque $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 0$, donc $\lim \xi_n = 1$.

I.C.2.a. On a

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant suivant la première colonne,

$$D_n = \alpha D_{n-1} - \gamma \begin{vmatrix} \beta & 0 & \cdots & \cdots & \\ \gamma & \alpha & \beta & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma & \alpha & \beta & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

En développant ensuite suivant la première ligne, on obtient

$$D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}.$$

Le nombre D_0 devra vérifier $D_2 = \alpha D_1 - \beta\gamma D_0$. On a

$$D_1 = \alpha \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma$$

et la condition s'écrit $\alpha^2 - \beta\gamma = \alpha^2 - \beta\gamma D_0$, ou encore $\beta\gamma\,(D_0 - 1) = 0$. Il suffit de choisir $D_0 = 1$ pour que cette condition soit vérifiée.

I.C.2.b. On a $D_n = \alpha D_{n-1} - D_{n-2}$.

▶ Si $\alpha = 2$, l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - 2r + 1 = 0$ admet la racine double 1. Les solutions seront $D_n = \lambda + \mu n$ avec

$$\begin{cases} \lambda = D_0 = 1 \\ \lambda + \mu = D_1 = \alpha = 2. \end{cases}$$

On trouve $\mu = 1$ et $D_n = 1 + n$ pour tout entier n.

▶ Si $\alpha = \sqrt{2}$, $(C) : r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0$, et $\Delta = -2$. Les racines de (C) sont $\frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$. La suite $(D_n)_n$ est réelle donc sera de la forme

$$D_n = \lambda \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \lambda = D_0 = 1 \\ \mu = D_2 = \alpha D_1 - D_0 = \alpha^2 - 1 = 1. \end{cases}$$

Donc $D_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)$ pour tout entier n.

I.C.3.a. On a

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M^3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 12 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 4 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix} = M^2 + M.$$

I.C.3.b. On montre ce résultat par récurrence sur n. Il est vrai au rang $n = 3$ d'après la question précédente. Si le résultat est vrai au rang n, il existe des scalaires a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n M^2$, et

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M\left(a_n M + b_n M^2\right) \\ &= a_n M^2 + b_n M^3 \\ &= a_n M^2 + b_n\left(M^2 + M\right) = b_n M + (a_n + b_n) M^2. \end{aligned}$$

Le résultat est donc bien assuré au rang $n + 1$, et

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n. \end{cases}$$

I.C.3.c. On a $a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n+1}$. Par ailleurs $(a_1, b_1) = (1, 0)$ et $(a_2, b_2) = (0, 1)$. La suite $(F_n) = (a_{n+2})$ est donc la suite de Fibonacci déjà étudiée. On déduit

$$\forall n \geq 2 \quad a_n = F_{n-2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-2} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-2}}{2^{n-2}\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad b_n = a_{n+1}.$$

I.C.3.d. i) Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ de matrice P dans la base canonique. La matrice réelle symétrique P est diagonalisable dans le groupe orthogonal : cela signifie qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que $D = Q^{-1}PQ$. Comme P est de rang 2, on aura

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^*.$$

Trouver une relation de dépendance du style $P^3 = aP + bP^2$ revient donc à trouver une relation du style $D^3 = aD + bD^2$, ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^3 & 0 \\ 0 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}$$

autrement dit, à résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} a + b\alpha_1 = \alpha_1^2 \\ a + b\alpha_2 = \alpha_2^2. \end{cases}$$

puisque $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$. Le déterminant de (S) est $d = \alpha_2 - \alpha_1$. Si $d \neq 0$ le système (S) est de Cramer et possède une unique solution. Si $\alpha_2 = \alpha_1$, (S) équivaut à une seule équation et se trouve vérifié pour $a = 0$ et $b = \alpha_1$. On a trouvé au moins un couple (a, b) solution dans tous les cas.

ii) A partir du moment où une relation du type $P^3 = aP + bP^2$ est connue, il suffit d'appliquer la méthode de la question 6) pour obtenir P^n. Plus précisément

$$P^{n+1} = P\left(a_nP + b_nP^2\right) = a_nP^2 + b_n\left(aP + bP^2\right) = ab_nP + \left(a_n + bb_n\right)P^2$$

et

$$\begin{cases} a_{n+1} = ab_n \\ b_{n+1} = a_n + bb_n. \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ on déduit

$$a_{n+2} = ab_{n+1} = a\left(a_n + bb_n\right) = aa_n + ab\frac{a_{n+1}}{a} = aa_n + ba_{n+1}$$

et l'on exprime chaque a_n en fonction de n.

Si $a = 0$, alors $P^3 = bP^2$ et l'on obtient $P^n = b^{n-2}P^2$ par récurrence.

II.A.1. On trouve

y	0	1	2	3	4	5
$x^2 = 5y^2 + 1$	1	6	21	46	81	126
x (dans $\mathbb{Z}$)	± 1				± 9	

Les solutions de (2) dans $\mathbb{N}$ et telles que $y \in [0, 5]$ seront $(1, 0)$ et $(9, 4)$.

II.A.2. On a $S_0 = (1, 0)$, $S_1 = (9, 4)$ et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ (x, y) & \mapsto & (9x + 20y, 4x + 9y). \end{array}$$

Donc $g(S_0) = (9, 4) = S_1$. On a $g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ puisque $x^2 = 5y^2 + 1$ entraîne

$$(9x + 20y)^2 = 5(4x + 9y)^2 + 1.$$

On peut donc considérer la restriction $g|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Cette restriction est bijective puisque pour tout $(x', y') \in \mathcal{H}$ il existe un unique couple $(x, y) \in \mathcal{H}$ tel que $g(x, y) = (x', y')$. En effet

$$g(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 20y = x' \\ 4x + 9y = y' \end{cases} \qquad (*)$$

et le système $(*)$ est de Cramer puisque son déterminant est $81 - 80 = 1 \neq 0$. On vérifie en outre que l'unique solution

$$(x, y) = \left(\begin{vmatrix} x' & 20 \\ y' & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & x' \\ 4 & y' \end{vmatrix} \right) = (9x' - 20y', -4x' + 9y') \qquad (**)$$

de $(*)$ vérifie $x^2 = 5y^2 + 1$ dès que $(x', y') \in \mathcal{H}$. En effet

$$x^2 - 5y^2 = (9x' - 20y')^2 - 5(-4x' + 9y')^2 = x'^2 - 5y'^2 = 1.$$

II.A.3.a. On raisonne par récurrence sur n. Le point S_0 est bien solution de (2). Si S_n est solution de (2), alors S_n est à coordonnées dans $\mathbb{N}^2$ et $S_n \in \mathcal{H}$. La question précédente montre que $S_{n+1} = g(S_n)$ appartient à $\mathcal{H}$ et l'expression analytique de g montre clairement que les coordonnées de S_{n+1} sont dans $\mathbb{N}^2$. Donc S_{n+1} est solution de (2).

II.A.3.b. On a

$$\begin{cases} x_{n+1} = 9x_n + 20y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 9y_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_n = 9x_{n-1} + 20y_{n-1} \\ y_n = 4x_{n-1} + 9y_{n-1} \end{cases} \qquad (***)$$

donc

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 9x_n + 20y_n = 9x_n + 20(4x_{n-1} + 9y_{n-1}) \\ &= 9x_n + 20\left(4x_{n-1} + 9\frac{x_n - 9x_{n-1}}{20}\right) \\ &= 18x_n - x_{n-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 4x_n + 9y_n = 4(9x_{n-1} + 20y_{n-1}) + 9y_n \\ &= 4\left(9\frac{y_n - 9y_{n-1}}{4} + 20y_{n-1}\right) + 9y_n \\ &= 18y_n - y_{n-1}. \end{aligned}$$

II.A.3.c. L'équation caractéristique de la suite (x_n) est $t^2 - 18t + 1 = 0$ et ses racines sont $9 \pm 4\sqrt{5}$. Il existe deux réels λ et μ tels que

$$x_n = \lambda(9 - 4\sqrt{5})^n + \mu(9 + 4\sqrt{5})^n$$

pour tout n. On détermine λ et μ en résolvant le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x_0 = 1 \\ \lambda \left(9 - 4\sqrt{5}\right) + \mu \left(9 + 4\sqrt{5}\right) = x_1 = 9. \end{cases}$$

On trouve $\lambda = 1/2$ et $\mu = 1/2$, d'où

$$x_n = \frac{1}{2} \left[\left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n + \left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n \right].$$

On trouve aussi $x_n = \lambda'(9 - 4\sqrt{5})^n + \mu'(9 + 4\sqrt{5})^n$ pour tout n, avec des conditions initiales différentes

$$\begin{cases} \lambda' + \mu' = y_0 = 0 \\ \lambda' \left(9 - 4\sqrt{5}\right) + \mu' \left(9 + 4\sqrt{5}\right) = y_1 = 4. \end{cases}$$

D'où $\lambda' = -\sqrt{5}/10$, $\mu' = \sqrt{5}/10$, et

$$y_n = \frac{\sqrt{5}}{10} \left[\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n - \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n \right].$$

II.A.4.a. • Il est facile de démontrer par récurrence et en utilisant les relations $(***)$ que les suites (x_n) et (y_n) sont à termes positifs et strictement positifs si $n \neq 0$. Les points S_n appartiennent donc tous au quart de plan $Q = \{(x, y) \,/\, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$, et sont donc tous sur la même demi-branche $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap Q$ d'hyperbole. Chacun des points de $\mathcal{H}'$ est parfaitement défini par son abscisse.

Montrons par récurrence que la suite (x_n) est strictement croissante. On a bien $x_0 = 1 < x_1 = 9$. Si $x_n < x_{n+1}$, alors

$$x_{n+2} - x_{n+1} = (18x_{n+1} - x_n) - x_{n+1} = 17x_{n+1} - x_n > x_{n+1} - x_n > 0$$

car $x_{n+1} > 0$, et finalement $x_{n+2} > x_{n+1}$ et la propriété est démontrée au rang suivant.

• Notons $a\,(S_n S_{n+1})$ l'arc de $\mathcal{H}'$ d'extrémités S_n et S_{n+1}. Montrer que $g\,[a\,(S_n S_{n+1})] \subset a\,(S_{n+1} S_{n+2})$ revient à montrer que

$$x \in [x_n, x_{n+1}] \text{ et } (x, y) \in \mathcal{H}' \Rightarrow 9x + 20y \in [x_{n+1}, x_{n+2}].$$

Si $x \in [x_n, x_{n+1}]$ et $(x, y) \in \mathcal{H}'$, alors $y^2 = \frac{1}{5}\left(x^2 - 1\right)$ est une fonction croissante de x, donc

$$y_n^2 = \frac{1}{5}\left(x_n^2 - 1\right) \leq y^2 \leq \frac{1}{5}\left(x_{n+1}^2 - 1\right) = y_{n+1}^2.$$

Comme y_n, y et y_{n+1} sont positifs, on déduit $y_n \leq y \leq y_{n+1}$, d'où

$$x_{n+1} = 9x_n + 20y_n \leq 9x + 20y \leq 9x_{n+1} + 20y_{n+1} = x_{n+2}.$$

• Pour montrer l'inclusion $a(S_{n+1}S_{n+2}) \subset g[a(S_nS_{n+1})]$, considérons un point N de $a(S_{n+1}S_{n+2})$. Si $N \in \{S_{n+1}, S_{n+2}\}$, le résultat est trivial. Sinon, g définit une bijection de $\mathcal{H}'$ sur $\mathcal{H}'$, et il existe un unique point M appartenant à $\mathcal{H}' \backslash \{S_k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ tel que $g(M) = N$. Comme $\{a(S_kS_{k+1}) \backslash \{S_k, S_{k+1}\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ forme une partition de $\mathcal{H}' \backslash \{S_k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$, il existe un unique entier m tel que $M \in a(S_mS_{m+1})$, et l'inclusion déjà démontrée donne

$$N = g(M) \in g[a(S_mS_{m+1})] \subset a(S_{m+1}S_{m+2}).$$

Puisque $N \in a(S_{n+1}S_{n+2})$, cela entraîne $m = n$ et $N \in g[a(S_nS_{n+1})]$.

II.A.4.b. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution (x, y) de (2) n'appartenant pas à l'ensemble $\{(x_n, y_n) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. Il existe alors un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x, y) \in a(S_nS_{n+1}) \backslash \{S_n, S_{n+1}\}$, ou, ce qui revient au même, tel que $x \in]x_n, x_{n+1}[$. Il suffit alors de composer un nombre suffisant de fois par la bijection réciproque g^{-1} (de $\mathcal{H}'$ sur $\mathcal{H}'$) et d'utiliser la question précédente pour obtenir

$$g^{-n}((x, y)) := (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \text{ solution de } (2), \text{ et } \widetilde{x} \in]x_0, x_1[=]0, 9[,$$

en contradiction avec **II.A.1**.

II.B.1. Une hyperbole $\mathcal{L}$ admet une équation de la forme $xy = 1$ dans un repère convenable $\mathcal{R}$ porté par ses asymptotes. Une application affine Ψ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ admet l'expression analytique

$$\begin{cases} x' = ax + cy + \alpha \\ y' = bx + dy + \beta \end{cases}$$

dans $\mathcal{R}$. On aura $\Psi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x'y' = \left(ax + \frac{c}{x} + \alpha\right)\left(bx + \frac{d}{x} + \beta\right) = 1$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad abx^4 + (\alpha b + \beta a)x^3 + (ad + bc + \alpha\beta - 1)x^2 + (\alpha d + \beta c)x + cd = 0.$$

Comme un polynôme de degré ≤ 4 possède une infinité de racine si et seulement il est nul, cette dernière condition équivaut à

$$(I) \quad \begin{cases} ab = 0 \\ \alpha b + \beta a = 0 \\ ad + bc + \alpha\beta - 1 = 0 \\ \alpha d + \beta c = 0 \\ cd = 0. \end{cases}$$

On envisage quatre cas.

1) Si $a = c = 0$,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha b = 0 \\ \alpha\beta = 1 \\ \alpha d = 0. \end{cases}$$

Donc $b = d = 0$, et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0$. L'application est l'application constante $\Psi = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha\beta = 1$.

2) Si $a = d = 0$,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha b = 0 \\ bc + \alpha\beta - 1 = 0 \\ \beta c = 0. \end{cases}$$

- Si $\alpha = \beta = 0$, on obtient $bc = 1$, $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
  - Si $\alpha = c = 0$, on obtient $1 = 0$, absurde.
  - Si $b = \beta = 0$, on obtient $1 = 0$, absurde.
  - Si $b = c = 0$, on obtient $M = 0$, et donc une application Ψ constante.

3) Si $b = c = 0$,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta a = 0 \\ ad + \alpha\beta - 1 = 0 \\ \alpha d = 0. \end{cases}$$

En raisonnant comme en 2), on trouve $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $\alpha = \beta = 0$, ou bien une application Ψ constante.

4) Si $b = d = 0$,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta a = 0 \\ \alpha\beta = 1 \\ \beta c = 0 \end{cases}$$

et l'on arrive à prouver que Ψ est une application constante comme en 1).

En conclusion, les applications affines Ψ telles que $\Psi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ sont

$$\Psi_{1,b} : \begin{cases} x' = \frac{1}{b} y \\ y' = bx \end{cases} \quad \text{ou } \Psi_{2,a} : \begin{cases} x' = ax \\ y' = \frac{1}{a} y \end{cases} \quad \text{ou } \Psi_{(\alpha,\beta)} : \begin{cases} x' = \alpha \\ y' = \beta \end{cases} \quad \text{avec } \alpha\beta = 1.$$

II.B.2. Posons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. On a

$$\Psi_{(\alpha,\beta)}(A) = B \Leftrightarrow (\alpha,\beta) = (x_B, y_B),$$

$$\Psi_{1,b}(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{1}{b} y_A \\ y_B = b x_A \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{y_B}{x_A},$$

$$\Psi_{2,a}(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = a x_A \\ y_B = \frac{1}{a} y_A \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{x_B}{x_A}.$$

On remarquera bien que les deux systèmes précédents sont compatibles puisque $x_A y_A = x_B y_B = 1$ entraîne $\frac{y_B}{x_A} = \frac{y_A}{x_B}$. On trouve effectivement trois applications affines Ψ telles que $\Psi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ et $\Psi(A) = B$. Bien sûr l'application constante $\Psi_{(\alpha,\beta)}$ n'est pas involutive. On a

$$\Psi_{1,b}^2(x,y) = \Psi_{1,b}\left(\frac{y}{b}, bx\right) = (x,y) \text{ et } \Psi_{2,a}^2(x,y) = \Psi_{2,a}\left(ax, \frac{y}{a}\right) = \left(a^2 x, \frac{y}{a^2}\right)$$

pour tout (x,y). Donc $\Psi_{1,b}$ est involutive, et $\Psi_{2,a}$ est involutive si et seulement si $a = \frac{x_B}{x_A} = \pm 1$, c'est-à-dire $x_B = \pm x_A$, et dans ce cas $\Psi_{2,a}$ est soit l'identité, soit la symétrie centrale par rapport au centre de symétrie de l'hyperbole.

II.B.3. L'application g n'est pas involutive et n'est pas constante, donc coïncidera avec $\Psi_{2,a}$. Elle sera unique à ce titre.

III.A. Avec Maple on obtient les premiers termes de la suite en tapant :

```
>u :=array(0..50) ; u[0] :=0 ; u[1] :=1 ;
>for k from 0 to 43 do
>u[k+2] :=u[k+1]-2*u[k] ;
>od ;
```

Puis on tape :

```
>u[30] ;u[45] ;
-24475
-3814273
>gcd(24475,-3814273) ;
89
>gcd(30,45) ;
15
>u[15] ;
-89
```

En conclusion $u_{30} \wedge u_{45} = (-24475) \wedge (-3814273) = -89 = u_{15}$.

III.B.1. Si $n \in k\mathbb{N}$ et si $j \in \{0, ..., n\}$, alors

$$(n-j)+(n+j)=2n \in k\mathbb{N}$$

permet d'affirmer que $n-j \in k\mathbb{N}$ si et seulement si $n+j \in k\mathbb{N}$.

III.B.2. Soit A une partie autosymétrique et k défini comme dans l'énoncé. Comme $0 \in A$, le symétrique $2k$ de 0 par rapport à k appartient à A. Par suite le symétrique $3k$ de k par rapport à $2k$ appartient à A, et un raisonnement par récurrence nous montre facilement que $k\mathbb{N} \subset A$.

Réciproquement supposons par l'absurde qu'il existe a appartenant à $A \backslash k\mathbb{N}$. Il existe un entier naturel q tel que $a \in]kq, k(q+1)[$. Comme A est autosymétrique, le symétrique a_1 de a par rapport à kq appartient à A dès qu'il est dans $\mathbb{N}$. On construit ensuite le symétrique a_2 de a_1 par rapport à $(k-1)q$ si celui-ci est dans $\mathbb{N}$. On a $a_i \in]k(q-i), k(q-i+1)[$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc $a_q \in]0, k[$. Et l'on remarque que $a_q \in A$ en contradiction avec la définition de k.

III.C.1.a. L'entier n étant fixé, on montre la propriété

$$\mathcal{P}(k): \quad \text{Pour tout } i \in \{0, ..., k\}, \text{ le nombre } d \text{ divise } u_{n+i} + (-q)^i u_{n-i}$$

par récurrence finie sur $k \in \{0, ..., n\}$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie car d divise $2u_n$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie car d divise $u_{n+1} - qu_{n-1} = pu_n$. Si $\mathcal{P}(k)$ est vraie (et $k < n$) alors

$$\begin{aligned}
&u_{n+k+1} + (-q)^{k+1} u_{n-k-1} \\
&\qquad = (pu_{n+k} + qu_{n+k-1}) + (-q)^{k+1} \frac{1}{q} (u_{n-k+1} - pu_{n-k}) \\
&\qquad = pu_{n+k} + + (-q)^k pu_{n-k} + qu_{n+k-1} + \frac{(-q)^{k+1}}{q} u_{n-k+1} \\
&\qquad = p \left[u_{n+k} + + (-q)^k u_{n-k}\right] + q \left[u_{n+k-1} + (-q)^{k-1} u_{n-(k-1)}\right]
\end{aligned}$$

et l'hypothèse récurrente au rang k entraîne $d| \left(u_{n+k+1} + (-q)^{k+1} u_{n-k-1}\right)$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

III.C.1.b. Si $n \in \mathrm{A}(d)$ et si $k \in \{0, ..., n\}$, alors

$$n-k \in \mathrm{A}(d) \;\Leftrightarrow\; d|u_{n-k} \underset{(*)}{\Leftrightarrow} d|u_{n+k} \;\Leftrightarrow\; n+k \in \mathrm{A}(d)$$

donc $\mathrm{A}(d)$ est autosymétrique. L'équivalence $(*)$ est justifiée par la question précédente et par l'hypothèse $d \wedge q = 1$. En effet,

$$d|u_{n-k} \quad \text{et} \quad d| \left(u_{n+k+1} + (-q)^{k+1} u_{n-k-1}\right)$$

entraînent $d|\left(-q\right)^{k+1}u_{n-k-1}$, et le Théorème de Gauss (que l'on peut appliquer puisque d est premier avec q) implique $d|u_{n+k}$. L'implication réciproque est triviale.

III.C.2.a. Si c divise q alors c divise $u_{n+1}-pu_n = qu_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $c|u_n$ avec $n > 0$. Alors $c|\left(u_n - pu_{n-1}\right)$ donc $c|pu_{n-1}$. Comme c est un diviseur de q et comme $p \wedge q = 1$, on aura $c \wedge p = 1$ et le Théorème de Gauss entraîne $c|u_{n-1}$. En raisonnant par récurrence, on obtient que c divise u_n, u_{n-1}, ..., u_1, u_0. C'est absurde car $u_1 = 1$.

Ainsi $u_0 = 0$ sera le seul multiple de c prami les u_n, où $n \in \mathbb{N}$.

III.C.2.b. Si $n \in \mathrm{A}\left(d\right)$ alors $d|u_n$. Comme $d \wedge q \neq 1$ il existe un nombre premier c diviseur commun de d et q. Alors $c|d|u_n$ donc $c|u_n$, et **III.C.2.a** montre que $n = 0$. En conclusion $\mathrm{A}\left(d\right) = \{0\}$.

III.D.1. On a $d = m \wedge n$ et $D = u_m \wedge u_n$. Montrer que $D|u_d$ revient à prouver que $d \in \mathrm{A}\left(D\right)$.

Comme $D|u_m$ et $D|u_n$ on a $(m,n) \in \mathrm{A}\left(D\right) \times \mathrm{A}\left(D\right)$ donc $\mathrm{A}\left(D\right) \neq \{0\}$. La question **III.C** montre que $\mathrm{A}\left(D\right)$ est autosymétrique. D'après **III.B** il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}\left(D\right) = k\mathbb{N}$.

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le pgcd d de m et n en réïtérant des divisions euclidiennes. Supposons $m \geq n$. Alors d est le dernier reste non nul obtenu dans les divisions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
m = nq + r \quad 0 \leq r < n \\
n = rq + r_1 \quad 0 \leq r_1 < r \\
r = r_1 q_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{s-2} = r_{s-1}q_s + d \quad 0 \leq d < r_{s-1} \quad (\text{ici } d = r_s) \\
r_{s-1} = dq_{s+1}.
\end{array}\right.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{l}
r = m - nq \\
m \in \mathrm{A}\left(D\right) = k\mathbb{N} \\
n \in \mathrm{A}\left(D\right) = k\mathbb{N}
\end{array}\right. \Rightarrow r \in \mathrm{A}\left(D\right) = k\mathbb{N}$$

et, de proche en proche, $r_1, r_2, ..., r_{s-1}, d \in \mathrm{A}\left(D\right) = k\mathbb{N}$. Finalement d appartient à $\mathrm{A}\left(D\right)$.

III.D.2. On a

$$\mathrm{A}\left(u_d\right) = \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_d | u_n\}$$

donc $d \in \mathrm{A}\left(u_d\right)$ et $\mathrm{A}\left(u_d\right) \neq \{0\}$. Comme $0 \in \mathrm{A}\left(u_d\right)$ et $d \in \mathrm{A}\left(u_d\right)$, et comme $\mathrm{A}\left(u_d\right)$ est autosymétrique (d'après **III.C**), le symétrique $2d$ de 0 par rapport à d appartiendra à $\mathrm{A}(u_d)$. De même le symétrique $3d$ de d par rapport à $2d$ appartiendra à $\mathrm{A}(u_d)$. Par récurrence, on obtient

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad d\mathbb{N} \subset \mathrm{A}(u_d).$$

Par conséquent

$$d = m \wedge n \Rightarrow \begin{cases} m \in d\mathbb{N} \subset \mathrm{A}(u_d) \\ n \in d\mathbb{N} \subset \mathrm{A}(u_d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_d | u_m \\ u_d | u_n \end{cases} \Leftrightarrow u_d | D.$$

III.D.3. D et u_d sont associés (i.e. $D|u_d$ et $u_d|D$) donc $D = \pm u_d$. Comme D et u_d sont positifs, on aura $D = u_d$. En conclusion

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}.$$

IV.A.

$$\begin{aligned} 37 &= 34 + 3 = \overline{10000100} \qquad \text{(c'est la seule représentation de Zeckendorff)} \\ &= 34 + 2 + 1 = \overline{10000011} \\ &= 21 + 13 + 3 = \overline{1100100} \\ &= 21 + 13 + 2 + 1 = \overline{1100011} \\ &= 21 + 8 + 5 + 3 = \overline{1011100} \\ &= 21 + 8 + 5 + 2 + 1 = \overline{1011011}. \end{aligned}$$

IV.B. En additionnant les égalités suivantes membre à membre

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + v_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} + v_{n-2} \\ v_{n-1} = v_{n-2} + v_{n-3} \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_3 = v_2 + v_1 \\ v_2 = v_1 + v_0 \end{cases}$$

on trouve

$$v_{n+1} = v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3} + \dots + v_1 + v_1 + v_0. \quad (*)$$

Si n est pair,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (v_{n-1} + v_{n-2}) + (v_{n-3} + v_{n-4}) + \dots + (v_3 + v_2) + v_1 + v_1 + v_0 \\ &= v_n + v_{n-2} + \dots + v_4 + 2 + 2 + 1 \end{aligned}$$

et comme $2 + 2 = v_2 + v_0$, on déduit

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-2} + \dots + v_4 + v_2 + v_0 + 1 = \sigma_n + 1.$$

Si n est impair,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (v_{n-1} + v_{n-2}) + (v_{n-3} + v_{n-4}) + ... + (v_2 + v_1) + v_1 + v_0 \\ &= v_n + v_{n-2} + ... + v_3 + v_1 + 1 = \sigma_n + 1. \end{aligned}$$

La première formule est donc démontrée. La formule $(*)$ entraîne aussi

$$v_{n+2} = v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + ... + v_1 + v_1 + v_0 = S_n + v_1 = S_n + 2.$$

IV.C.1.a. Deux éléments consécutifs de la suite $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ ne peuvent jamais être égaux à 1, donc

$$\forall k \quad a_{k+1}v_{k+1} + a_k v_k = v_{k+1} \text{ ou } v_k \qquad \text{et donc } a_{k+1}v_{k+1} + a_k v_k \leq v_{k+1}.$$

Si n est pair,

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=0}^{n} a_k v_k \\ &= \underbrace{(a_n v_n + a_{n-1}v_{n-1})}_{=v_n} + \underbrace{(a_{n-2}v_{n-2} + a_{n-3}v_{n-3})}_{\leq v_{n-2}} + ... + \underbrace{(a_2 v_2 + a_1 v_1)}_{\leq v_2} + a_0 v_0 \end{aligned}$$

donc

$$m \leq v_n + v_{n-2} + ... + v_2 + a_0 v_0 \leq \sigma_n.$$

Si n est impair,

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=0}^{n} a_k v_k \\ &= \underbrace{(a_n v_n + a_{n-1}v_{n-1})}_{=v_n} + \underbrace{(a_{n-2}v_{n-2} + a_{n-3}v_{n-3})}_{\leq v_{n-2}} + ... + \underbrace{(a_1 v_1 + a_0 v_0)}_{\leq v_1} \end{aligned}$$

donc

$$m \leq v_n + v_{n-2} + ... + v_1 = \sigma_n.$$

IV.C.1.b. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des nombres de Fibonacci. On montre, en retournant à la définition d'un maximum, que

$$v_n = \operatorname{Max}\{v \in \mathcal{F} \,/\, v \leq m\}.$$

On a $v_n \in \mathcal{F}$ et $v_n \leq \sum_{k=0}^{n} a_k v_k = m$. Si $v_t \in \mathcal{F}$ vérifie $v_t \leq m$, alors **IV.B** et **IV.C.1.a** impliquent $v_t \leq m \leq \sigma_n = v_{n+1} - 1$. D'où $t \leq n$ et $v_t \leq v_n$.

IV.C.2. Existence : On la montre par récurrence sur m. L'existence de la Z-représentation est triviale si $m = 0$ ou 1. Si l'existence est prouvée jusqu'au rang $m-1$, on détermine l'entier n tel que $v_n = \text{Max}\,\{v \in \mathcal{F} \,/\, v \leq m\}$, puis on forme $m' := m - v_n$. L'hypothèse récurrente appliquée à m' montre l'existence d'une Z-représentation

$$m' = m - v_n = \sum_{k=0}^{l} a_k v_k$$

et prouve ainsi que la propriété est vraie au rang m.

Notons qu'on ne peut pas avoir ici $l = n - 1$ et $a_{n-1} = 1$ (et que l'on obtient bien une représentation de Zeckendorff de m), autrement

$$m = v_n + v_{n-1} + \sum_{k=0}^{l-1} a_k v_k = v_{n+1} + \sum_{k=0}^{l-1} a_k v_k$$

et v_{n+1} serait inférieur ou égal à m, ce qui contredit que v_n soit le nombre de Fibonacci le plus grand inférieur à m.

Unicité : On procède encore par récurrence sur m. L'unicité est triviale si $m = 0$ ou 1. Si elle est prouvée jusqu'au rang $m - 1$, supposons que l'on ait deux Z-représentations de m :

$$m = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k = \sum_{k=0}^{l} b_k v_k \qquad \text{avec } a_n = b_l = 1.$$

La question **IV.C.1** montre que $v_n = \text{Max}\,\{v \in \mathcal{F} \,/\, v \leq m\} = v_l$, donc $n = l$. Par suite

$$m - v_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k v_k$$

et l'unicité, acquise jusqu'au rang $m - 1$, prouve que $a_k = b_k$ pour tout k appartenant à $\{0, ..., n - 1\}$.

IV.C.3. L'algorithme ci-dessous permet le calcul de la suite des indices k tels que $a_k = 1$ dans l'écriture $m = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$.

Lire m (on suppose $m \geq 2$)
Répéter
  $k := 0$
  Répéter $k := k + 1$ jusqu'à ce que $v_{k+1} > m$
  Afficher k

$m := m - v_k$
Jusqu'à ce que $m \leq 0$

IV.C.4. La suite de Fibonacci est

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

Ici

$$\begin{cases} 272 - 233 = 39 \\ 39 - 34 = 5 \end{cases} \Rightarrow 272 = 233 + 34 + 5 = \overline{100010001000}.$$

On a, bien entendu, $\sigma_n = \overline{101010...}$ et

$$\begin{aligned} S_n &= \overline{1111...1} \\ &= v_n + v_{n-1} + ... + v_0 \\ &= (v_n + v_{n-1}) + (v_{n-2} + v_{n-3}) + ... = v_{n+1} + v_{n-1} + ... = \overline{1010...} \end{aligned}$$

Plus précisément, si n est pair, $S_n = v_{n+1} + v_{n-1} + ... + v_3 + v_0 = \overline{1010...101001}$, et si n est impair : $S_n = v_{n+1} + v_{n-1} + ... + v_2 = \overline{1010...10100}$.

IV.C.5.a. D'après **I.C.1**

$$v_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+2} - \left(\varphi - \sqrt{5}\right)^{n+2}\right] \sim \frac{\varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

La Z-représentation de m s'écrit avec $n+1$ chiffres, i.e. $m = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$, si et seulement si $v_n \leq m < v_{n+1}$. Autrement dit

$$\begin{aligned} z(m) = n+1 &\Leftrightarrow v_n \leq m < v_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+2} - \left(\varphi - \sqrt{5}\right)^{n+2}\right] \leq m < \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+3} - \left(\varphi - \sqrt{5}\right)^{n+3}\right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\varphi^{z(m)+1} - \left(\varphi - \sqrt{5}\right)^{z(m)+1} \leq m\sqrt{5} < \varphi^{z(m)+2} - \left(\varphi - \sqrt{5}\right)^{z(m)+2}$$

puis

$$\varphi^{z(m)+1} A(m) \leq m\sqrt{5} < \varphi^{z(m)+2} B(m)$$

où

$$A(m) = 1 - \left(\frac{\varphi - \sqrt{5}}{\varphi}\right)^{z(m)+1} \quad \text{et} \quad B(m) = 1 - \left(\frac{\varphi - \sqrt{5}}{\varphi}\right)^{z(m)+2}$$

tendent vers 1 quand m tend vers $+\infty$. On aura

$$(z(m)+1)\ln\varphi+\ln(A(m))\leq\ln m+\ln\sqrt{5}<(z(m)+2)\ln\varphi+\ln(B(m))$$

soit

$$\frac{\ln m+\ln\sqrt{5}-\ln(B(m))}{\ln\varphi}-2<z(m)\leq\frac{\ln m+\ln\sqrt{5}-\ln(A(m))}{\ln\varphi}-1.$$

Ces inégalités entraînent $\lim_{m\to+\infty}\dfrac{z(m)\ln\varphi}{\ln m}=1$, c'est-à-dire $z(m)\sim\dfrac{\ln m}{\ln\varphi}$.

IV.C.5.b. On a

$$10^n\leq m<10^{n+1}\ \Leftrightarrow\ d(m)=n+1$$

donc

$$\begin{aligned}10^{d(m)-1}\leq m<10^{d(m)}&\Rightarrow(d(m)-1)\ln 10\leq\ln m<d(m)\ln 10\\&\Rightarrow\frac{\ln m}{\ln 10}<d(m)\leq\frac{\ln m+\ln 10}{\ln 10}\end{aligned}$$

et $d(m)\sim\frac{\ln m}{\ln 10}$. La question précédente permet alors d'écrire

$$\frac{z(m)}{d(m)}\sim\frac{\ln m}{\ln\varphi}\times\frac{\ln 10}{\ln m}=\frac{\ln 10}{\ln\varphi}.$$

On a donc montré que

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{z(m)}{d(m)}=\frac{\ln 10}{\ln\varphi}\simeq 4,785.$$

IV.D.1. ▶ Si m est distinct d'un entier σ_n, montrons que $\delta(m)>1$.

L'entier $m=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ est distinct d'un σ_n donc possède une répétition du type $\overline{11}$ ou $\overline{00}$ dans sa F-représentation. S'il s'agit de $\overline{11}$, soit t maximum tel que $\overline{a_{t+1}a_t}=\overline{11}$. Le tronçon $\overline{a_{t+2}a_{t+1}a_t}=\overline{011}$ apparaît alors dans la F-représentation de m, et les écritures $\overline{011}$ et $\overline{100}$ du même tronçon permettent de construire deux F-représentations distinctes de m.

S'il n'existe aucune répétition du style $\overline{11}$, c'est que les seules répétitions sont du type $\overline{00}$, et dans ce cas il existe un tronçon $\overline{a_{t+2}a_{t+1}a_t}$ égal à $\overline{100}$. Ce tronçon s'écrit aussi bien $\overline{011}$, et l'on obtient encore 2 F-représentations distinctes de m.

▶ Montrons que $\delta(\sigma_n)=1$.

Si σ_n possédait 2 F-représentations distinctes, on aurait

$$\sigma_n = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0} = \overline{1010...} = \overline{b_m b_{m-1} ... b_0}.$$

Alors $\sigma_n = v_{n+1} - 1 < v_{n+1}$ implique $m \leq n$. Notons

$$t = \text{Max}\left\{k \in \{0, ..., n\} \ / \ a_k \neq b_k\right\}.$$

a) Si $a_t = 0$, alors $\sigma_{t-1} = \overline{0101...} = \overline{1b_{t-1}...b_0}$, mais la question **IV.B** donne $\sigma_{t-1} < v_t \leq \overline{1b_{t-1}...b_0}$, ce qui est absurde.

b) Si $a_t \neq 0$, alors $\sigma_t = \overline{1010...} = \overline{0b_{t-1}...b_0}$. D'après **IV.B**,

$$\overline{0b_{t-1}...b_0} \leq \overline{011...1} = S_{t-1} = v_{t+1} - 2 = \sigma_t - 1 < \sigma_t$$

ce qui est absurde.

IV.D.2. On a

$$\begin{array}{l} v_0 = 1 \text{ donc } \delta(v_0) = 1, \\ v_1 = 2 \text{ donc } \delta(v_1) = 1, \\ v_2 = 3 = v_1 + v_0 \text{ donc } \delta(v_2) = 2, \\ v_3 = 5 = v_2 + v_1 \text{ donc } \delta(v_3) = 2, \\ v_4 = 8 = v_3 + v_2 = v_3 + (v_1 + v_0) \text{ donc } \delta(v_4) = 4. \end{array}$$

Comme

$$a_{n-2}v_{n-2} + ... + a_0 v_0 \leq v_{n-2} + ... + v_0 = S_{n-2} = v_n - 2$$

on ne pourra jamais avoir $v_n = a_{n-2}v_{n-2} + ... + a_0 v_0$. Autrement dit le terme v_{n-1} apparaît nécessairement dans la F-représentation de v_n. Toutes les écritures de v_n proviendront ainsi de $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ et des autres écritures de v_{n-2}. Donc $\delta(v_n) = 1 + \delta(v_{n-2})$. Par suite

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} \delta(v_n) = 1 + \delta(v_{n-2}) \\ \delta(v_{n-2}) = 1 + \delta(v_{n-4}) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta(v_{n-2s+2}) = 1 + \delta(v_{n-2s}) \end{array} \right. \\ \hline \delta(v_n) = s + \delta(v_{n-2s}). \end{array}$$

Comme $\delta(v_0) = \delta(v_1) = 1$, on obtient

$$\delta(v_n) = s + 1 = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

quelle que soit la parité de n.

IV.D.3. Le centre c de l'intervalle $[v_n - 1, v_{n+1} - 1]$ est $c = \frac{v_n + v_{n+1} - 2}{2}$ et il s'agit de montrer que $\delta(2c - x) = \delta(x)$ pour tout x entier appartenant à $[v_n - 1, v_{n+1} - 1]$. Posons $x' = 2c - x$. Si $x = a_n v_n + ... + a_0 v_0$, alors

$$\begin{aligned} x' &= 2c - x = v_n + v_{n+1} - 2 - (a_n v_n + ... + a_0 v_0) \\ &= v_{n+2} - 2 - (a_n v_n + ... + a_0 v_0) \\ &= S_n - (a_n v_n + ... + a_0 v_0) \\ &= (1 - a_n) v_n + ... + (1 - a_0) v_0. \end{aligned}$$

Bien sûr $a_i \in \{0, 1\}$ entraîne $1 - a_i \in \{0, 1\}$. On vient d'exhiber une bijection Θ de l'ensemble des F-représentations de x vers l'ensemble des F-représentations de x', à savoir

$$\Theta\left(\overline{a_n a_{n-1} ... a_0}\right) = \overline{(1 - a_n)(1 - a_{n-1}) ... (1 - a_0)}.$$

Cela prouve bien que $\delta(x') = \delta(x)$ et achève la preuve.

Chapitre 11

CAPES externe 2002, épreuve 2

11.1 Énoncé

Polynômes à valeurs entières sur les nombres premiers

Objectif. Le but de ce problème est l'étude d'ensembles de polynômes prenant sur certaines parties des valeurs particulières et, notamment une caractérisation des polynômes prenant des valeurs entières sur tous les nombres premiers.

NOTATIONS.

Si A et B désignent 2 ensembles, B étant inclus dans A, on note

$$A \backslash B = \{x \in A \; ; \; x \notin B\}.$$

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0\}$;

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs ;

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des rationnels positifs ou nuls, $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$;

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls ;

$\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Pour tout nombre premier p, on note $\mathbb{Z}_{(p)}$ l'ensemble des rationnels dont une représentation irréductible a un dénominateur non divisible par p.

Pour tout réel x, on appelle partie entière de x et on note $[x]$ l'unique entier k vérifiant $k \leq x < k+1$.

[0] [ag54e] v1.00

On note :

$\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes en l'indéterminée X à coefficients rationnels, $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes en l'indéterminée X à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tous sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}$, on note :

$$\mathcal{P}(E,F) = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ P(E) \subset F\},$$

à savoir, l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont la valeur en chaque élément de E appartient à F.

Les parties A, B, C sont indépendantes, la partie D utilise des notions et résultats de la partie C uniquement, la partie E utilise des résultats antérieurs qui seront en général précisés dans le cours de l'énoncé.

A. EXEMPLES ELEMENTAIRES : $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}_+)$.

A - I. *Caractérisation de $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ à l'aide des polynômes de Lagrange.*

Soit m un entier naturel. Pour tous les entiers i et j compris entre 0 et m, on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker défini par : $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$. Soient q_0, q_1, ..., q_m, $m+1$ réels distincts.

A - I. 1. Expliciter, pour $j = 0, 1, ..., m$, le polynôme L_j de $\mathbb{R}_m[X]$ vérifiant :

$$L_j(q_i) = \delta_{i,j} \text{ pour } i = 0, 1, ..., m.$$

A - I. 2. Montrer que la famille $(L_j)_{0\leq j\leq m}$ forme une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_m[X]$.

A - I. 3. Pour tout polynôme M de $\mathbb{R}_m[X]$, exprimer P dans la base $(L_j)_{0\leq j\leq m}$ en fonction des réels $(P(q_j))_{0\leq j\leq m}$.

A - I. 4. Comparer l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ avec l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$.

A - II. *Caractérisation de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$.*

A - II. 1. Montrer la propriété suivante :

$$(*) \qquad \forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = x^2+y^2.$$

On exprimera x et y en fonction de a, b, c, d (Pour tous réels t et z, on pourra interpréter t^2+z^2 comme le carré du module d'un nombre complexe.)

A - II. 2. Soit A un anneau commutatif unitaire (on note 0 et 1 les éléments neutres de l'addition et de la multiplication). Montrer que la propriété $(*)$ reste valable lorsqu'on remplace $\mathbb{R}$ par A. On note :

$$S = \left\{ z \in A \,/\, \exists x \in A,\ \exists y \in A,\ z = x^2 + y^2 \right\}.$$

Montrer que S contient 0 et 1 et est stable pour la multiplication.

A - II. 3. Soit P un élément non nul de $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

A - II. 3. i. On rappelle que P est le produit d'une constante par des facteurs de la forme $(X-a)^\alpha$ et $\left(X^2 + bX + c\right)^\beta$ où a, b, c sont des réels, α et β des entiers positifs ou nuls et $X^2 + bX + c$ un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que P est de degré pair. Donner le signe de la constante et préciser la parité des entiers α.

A - II. 3. ii. En déduire que P est la somme des carrés de deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

A - II. 3. iii. Donner une caractérisation de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

A - III. *La caractérisation précédente n'est pas valable pour* $\mathcal{P}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$.

A - III. 1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$ est contenu dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

A - III. 2. i. Donner deux décompositions du polynôme $2X^2 + 4$ en la somme des carrés de deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

A - III. 2. ii. Soient a, b, c, d des réels tels que l'on ait :

$$2X^2 + 4 = (aX + b)^2 + (cX + d)^2.$$

Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{\sqrt{2}} & \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

possède une propriété remarquable à préciser. En déduire que les réels a, b, c, d ne peuvent pas tous être dans $\mathbb{Q}$.

A - III. 2. iii. Le polynôme $2X^2 + 4$ peut-il être la somme des carrés de deux éléments de $\mathbb{Q}[X]$?

B. ETUDE DE $\mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

Pour tout entier naturel n, on note Γ_n le polynôme défini par :

$$\Gamma_0(X) = 1 \quad \text{et, pour } n > 0, \quad \Gamma_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

B - I. 1. Montrer que, pour tout n, le polynôme Γ_n appartient à $\mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. (Pour k élément de $\mathbb{Z}$, on distinguera selon que $0 \leq k < n$, $k \geq n$ et $k < 0$.)

B - I. 2. Montrer que, pour tout entier naturel m, la famille $(\Gamma_n)_{0\leq n\leq m}$ forme une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_m[X]$.

Soit P un élément de $\mathbb{R}_m[X]$. On écrit :

$$P = \sum_{0\leq n\leq m} d_n\Gamma_n \quad \text{avec } d_0, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}.$$

B - II. Ecrire, à l'aide des valeurs $(P(n))_{0\leq n\leq m}$ un système linéaire dont la famille $(d_n)_{0\leq n\leq m}$ est solution. Calculer le déterminant de ce système.

B - III. Montrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$,

(ii) d_0, d_1, ..., $d_m \in \mathbb{Z}$,

(iii) $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(m) \in \mathbb{Z}$,

(iv) il existe $m+1$ entiers consécutifs en lesquels les valeurs de P sont des entiers.

B - IV. 1. Dans cette question, $m = 5$ et

$$P(X) = X^5 - 15X^4 + 85X^3 - 225X^2 + 274X - 120.$$

Déterminer les entiers $(d_n)_{0\leq n\leq m}$ tels que $P = \sum_{n=0}^{5} d_n\Gamma_n$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{Q}$.

B - IV. 2. Pour $m > 0$ arbitraire, déterminer les zéros du polynôme

$$P = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \Gamma_n.$$

En déduire la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Exprimer P à l'aide du seul polynôme Γ_m.

C. ETUDE DE $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier fixé.

C - I. 1. Montrer que, pour tout rationnel non nul x, il existe un unique entier relatif k tel que x s'écrive sous la forme $p^k \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers non multiples de p.

Cet entier k est noté $v_p(x)$. On pose de plus $v_p(0) = +\infty$. On définit ainsi une application v_p de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. On adopte les conventions usuelles :
$k + (+\infty) = (+\infty) + k = +\infty$ et $k \leq +\infty$ pour tout k de $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

C - I. 2. Montrer que :

(i) L'application v_p est surjective,
(ii) Pour tous x, y de $\mathbb{Q}$, $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$,
(iii) Pour tous x, y de $\mathbb{Q}$, $v_p(x+y) \geq \operatorname{Min}\{v_p(x), v_p(y)\}$.

C - I. 3. Que vaut $v_p(1)$? Que vaut $v_p(-1)$? Pour tout (x, y) de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$, exprimer $v_p\left(\frac{x}{y}\right)$ en fonction de $v_p(x)$ et $v_p(y)$.

C - I. 4. Vérifier que $\mathbb{Z}_{(p)} = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, v_p(x) \geq 0\}$ et que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Caractériser les éléments inversibles de $\mathbb{Z}_{(p)}$ à l'aide de v_p.

C - I. 5. i. Montrer que, pour (k, n) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, le cardinal de l'ensemble $\{j \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq j \leq n,\ v_p(j) = k\}$ est égal à $\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$.

C - I. 5. ii. Justifier la formule suivante due à Legendre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_p(n!) = \sum_{k>0} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Dans la suite de cette partie, E désigne une partie infinie de $\mathbb{Z}$.

C - II. 1. Montrer que

$$\mathbb{Z} = \bigcap\nolimits_{l \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(l)}.$$

C - II. 2. Vérifier que

$$\mathcal{P}(E, \mathbb{Z}) = \bigcap\nolimits_{l \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(l)}\right).$$

C - III. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de E est p-ordonnée dans E si elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1} (u_n - u_k)\right) = \operatorname*{Min}_{x \in E} v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1} (x - u_k)\right).$$

C - III. 1. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = 3$, $E = \{1\} \cup \{3k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite 3-ordonnée de E où $u_0 = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour u_1 et u_2 ?

C - III. 2. Montrer que si $E = \mathbb{Z}$, la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-ordonnée.

C - III. 3. Montrer par récurrence que, pour tout a dans E, il existe au moins une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, p-ordonnée dans E et vérifiant $u_0 = a$. Y a-t-il en général unicité d'une telle suite ?

C - IV. *Dans cette question, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ p-ordonnée dans E.* On lui associe la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{X - u_k}{u_n - u_k}.$$

C - IV. 1. i. Montrer que les polynômes P_n appartiennent à $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

C - IV. 1. ii. Montrer que, pour tout entier naturel m, la famille $(P_n)_{0\leq n\leq m}$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_m[X]$.

C - IV. 1. iii. Préciser les valeurs $P_n(u_k)$ pour n dans $\mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.

Dans la suite de cette partie, m désigne un entier naturel et P un élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Ecrivons :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(X) \quad \text{avec } c_0, c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}.$$

C - IV. 2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $P \in \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$,
(ii) $c_0, c_1, ..., c_m \in \mathbb{Z}_{(p)}$,
(iii) $P(u_0), P(u_1), ..., P(u_m) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

C - IV. 3. On pose $\omega(0) = 0$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note $\omega(n)$ l'entier $v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(u_n - u_k)\right)$. Montrer que si P appartient à $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$, alors les coefficients de $p^{\omega(m)}P$ appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}$. Vérifier que $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.

D. CARACTERISATION DE $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$

Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier.

On note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels multiples de p et $\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels non multiples de p. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\varphi_p(n) = n + 1 + \left[\frac{n}{p-1}\right] \quad \text{et} \quad \omega_p(n) = \sum_{k \geq 0} \left[\frac{n}{(p-1)\,p^k}\right].$$

D - I. 1. A l'aide de la division euclidienne par $p-1$, montrer que :

$$\left[\frac{\varphi_p(n)}{p}\right] = \left[\frac{n}{p-1}\right] \quad \text{et} \quad \varphi_p(n) \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}.$$

D - I. 2. En déduire que :

(i) φ_p n'est autre que la bijection croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$,

(ii) pour tout entier naturel n, $v_p\left(\varphi_p(n)!\right) = \omega_p(n)$.

(Pour cette dernière question, on pourra utiliser en le justifiant le fait que, pour x dans $\mathbb{R}$, a et b dans $\mathbb{N}^*$, on a $\left[\frac{x}{ab}\right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{a}\right]}{b}\right]$.)

D - I. 3. Vérifier que pour n entier naturel :

(i) $\omega_p(n) \leq 2n$,

(ii) si $n < p-1$, alors $\omega_p(n) = 0$.

D - II. 1. Montrer que, pour (r, s) dans $p\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $v_p\left(r - \varphi_p(s)\right) = 0$.

D - II. 2. Justifier, pour $n > 0$, les égalités :

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\varphi_p(n) - \varphi_p(k)\right)\right) = v_p\left(\prod_{r=0}^{\varphi_p(n)-1}\left(\varphi_p(n) - r\right)\right) = v_p\left(\varphi_p(n)!\right).$$

D - II. 3. Justifier, pour $0 < n \leq s$, les égalités :

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\varphi_p(s) - \varphi_p(k)\right)\right) = v_p\left(\prod_{r=0}^{\varphi_p(n)-1}\left(\varphi_p(s) - r\right)\right) = v_p\left(\frac{\varphi_p(s)!}{\left(\varphi_p(s) - \varphi_p(n)\right)!}\right).$$

D - II. 4. En déduire que la suite $\left(\varphi_p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite p-ordonnée dans $\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$.

D - III. *Soit* P *un élément de* $\mathbb{R}_m[X]$.

D - III. 1. Montrer que P appartient à $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ si et seulement si $P\left(\varphi_p(k)\right)$ appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$ pour $k = 0, 1, ..., m$.

D - III. 2. Montrer que si P appartient à $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ alors les coefficients de $p^{\omega_p(m)}P$ sont dans $\mathbb{Z}_{(p)}$.

E. UN ALGORITHME POUR DETERMINER LES ELEMENTS DE $\mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$.

E - I. Montrer successivement que :

(i) $\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{24} \in \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$,

(ii) $\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{24} \in \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$,

(iii) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$.

E - II. *Dans cette question* p *désigne un nombre premier fixé.*

On utilise le théorème de Dirichlet suivant (que l'on ne cherchera pas à démontrer) : Si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors il existe au moins un entier naturel k tel que $a + bk$ soit un nombre premier.

E - II. 1. *Soit* Q *un élément de* $\mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$. Soit α un entier naturel tel que les coefficients de $p^\alpha Q$ appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

E - II. 1. i. Soit a un entier naturel. Montrer que, pour tout entier relatif k, $Q(a + kp^\alpha) - Q(a)$ appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

E - II. 1. ii. Soit a un élément de $\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $Q(a + kp^\alpha)$ appartienne à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

E - II. 1. iii. En déduire que Q appartient à $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

E - II. 2. Pour tout nombre premier l, on pose $E_l = \{l\} \cup (\mathbb{N}\backslash l\mathbb{N})$.

E - II. 2. i. Montrer l'inclusion $\mathbb{P} \subset E_p$.

E - II. 2. ii. En déduire que : $\mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right) = \mathcal{P}\left(E_p, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

E - II. 2. iii. A l'aide de C - II. 2, montrer que :

$$\mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z}) = \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(E_l, \mathbb{Z}_{(l)}\right).$$

Pour la fin du problème on considère un entier naturel m.

E - III. Montrer que si Q est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{P},\mathbb{Z})$ de degré $\leq m$ alors $X^{2m}Q(X)$ appartient à $\mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. (On pourra utiliser E - II. 1. iii ; D - III. 2 ; D - I. 3. i ; C - II. 1 et B - III.)

E - IV. On suppose dans cette question que l'élément Q de $\mathbb{R}_m[X]$ vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \big((1 \leq k \leq 2m+1) \Rightarrow \big(k^{2m}Q(k) \in \mathbb{Z}\big)\big).$$

E - IV. 1. A l'aide de D - III. 1, montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{P} \quad Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right).$$

E - IV. 2. A l'aide de D - III. 2 et D - I. 3. ii, montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{P} \quad \big((p > m+1) \Rightarrow Q(p) \in \mathbb{Z}_{(p)}\big).$$

E - V. *Caractérisation de* $\mathcal{P}(\mathbb{P},\mathbb{Z})$.

Soit Q un élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Q appartient à $\mathcal{P}(\mathbb{P},\mathbb{Z})$,

(b) Pour tout nombre premier $p \leq m+1$, $Q(p)$ appartient à $\mathbb{Z}$, et, pour tout entier naturel $k \leq 2m+1$, $k^{2m}Q(k)$ appartient à $\mathbb{Z}$.

E - VI. Appliquer la caractérisation précédente pour prouver : quel que soit le nombre premier p, on a la congruence suivante

$$(p+1)(p-1)(p-2)(p-3)(p-5)(p-7)(p-193) \equiv 0 \pmod{2\,903\,040}.$$

11.2 Corrigé

A. EXEMPLES ELEMENTAIRES : $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}_+)$.

A.I.1. Le polynôme

$$L_j(X) = \frac{(X-q_0)\ldots\left(\widehat{X-q_i}\right)\ldots(X-q_m)}{(q_i-q_0)\ldots\left(\widehat{q_i-q_i}\right)\ldots(q_i-q_m)}$$

(où le terme sous le chapeau a été supprimé) répond à la question.

A.I.2. L'implication

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j L_j(X) = 0 \ \Rightarrow\ \forall i \quad \lambda_i = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j L_j(q_i) = 0$$

[0] [ag54] v2.00

montre que le système $(L_i)_{0\leq j\leq m}$ est libre. C'est un système libre de $m+1$ vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[X]$ de dimension $m+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

A.I.3. Tout vecteur P de $\mathbb{R}_m[X]$ s'exprimera sous la forme

$$P(X)=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j L_j(X)$$

avec des réels λ_j convenables. Il suffit de calculer $P(q_i)=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j L_j(q_i)=\lambda_i$ pour déterminer λ_i et obtenir l'expression $P=\sum_{j=0}^{m}P(q_j)L_j$.

A.I.4. L'inclusion $\mathbb{Q}[X]\subset\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ est triviale. Réciproquement, si P désigne un polynôme de degré m de $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$, choisissons $m+1$ rationnels distincts q_0, ..., q_m. Par hypothèse $P(q_i)\in\mathbb{Q}$ pour tout i, et les questions précédentes permettent d'écrire

$$P(X)=\sum_{j=0}^{m}P(q_i)\frac{(X-q_0)\ldots\left(\widehat{X-q_i}\right)\ldots(X-q_m)}{(q_i-q_0)\ldots\left(\widehat{q_i-q_i}\right)\ldots(q_i-q_m)}.$$

Tous les coefficients qui interviennent dans le membre de droite sont rationnels donc $P(X)$ appartiendra à $\mathbb{Q}[X]$. En conclusion $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[X]$.

A.II.1 Posons $A=a+ib$, $C=c+id$ et $X=x+iy$. On a $|A|^2|C|^2=|AC|^2$ et il suffit de poser $X=AC$ pour obtenir $|A|^2|C|^2=|X|^2$, ce qui est exactement l'égalité demandée $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=x^2+y^2$. Comme

$$X=AC=(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc),$$

cela revient à choisir

$$\begin{cases} x=ac-bd\\ y=ad+bc.\end{cases}$$

A.II.2 L'identité

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \qquad (*)$$

se vérifie à postériori dans n'importe quel anneau commutatif. L'ensemble S contient 0 et 1 puisque $0=0^2+0^2$ et $1=1^2+0^2$. Il est stable par multiplication d'après l'identité $(*)$.

A.II.3.i. Si P était de degré impair, les limites de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ seraient $+\infty$ et $-\infty$ (dans un ordre quelconque), ce qui est absurde puisque $P(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}_+$. Donc P est de degré pair. Son terme dominant est de la forme cX^{2n} où c est la constante qui intervient dans sa décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Encore une fois, si c était strictement négatif, l'on aurait $\lim_{x\to+\infty}(P(x)) = -\infty$, ce qui contredirait l'inclusion $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. Donc $c \geq 0$. En fait $c > 0$ puisque $P \neq 0$.

Si a est une racine réelle de $P(X)$, il existe un polynôme $Q(X)$ tel que $P(X) = c(X-a)^\alpha Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$. La fonction $Q(x)$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule pas en a. Il existe donc un intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (où $\varepsilon > 0$) sur lequel $cQ(x)$ conserve un signe constant. Puisque $P(x)$ reste positif pour tout $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, on déduit que la fonction $x \mapsto (x-a)^\alpha$ conserve un signe constant sur $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, et cela entraîne bien évidemment la parité de α.

A.II.3.ii. $P(X)$ s'écrit

$$P(X) = c\prod_{i=1}^{s}(X-a_i)^{2\alpha_i} \times \prod_{i=1}^{s}\left(X^2+b_iX+c_i\right)^{\beta_i} \qquad (*)$$

avec $c > 0$. Les polynômes irréductibles $X^2 + b_iX + c_i$ n'ont pas de racines réelles, donc s'écrivent

$$X^2 + b_iX + c_i = \left(X + \frac{b_i}{2}\right)^2 + \frac{4c_i - b_i^2}{4} \quad \text{avec } \frac{4c_i - b_i^2}{4} > 0.$$

Ce sont donc des sommes de carrés de polynômes, et ils appartiennent à l'ensemble S défini plus haut (avec $A = \mathbb{R}[X]$). La constante c est positive donc s'écrit aussi comme une somme de carrés de polynômes $c = \left(\sqrt{c}\right)^2 + 0^2$, et appartient à S. Enfin $(X-a_i)^{2\alpha_i}$ appartient évidemment à S. Puisque S est multiplicative, l'écriture $(*)$ permet d'affirmer que $P(X) \in S$, autrement dit que $P(X)$ est une somme de carrés de polynômes.

A.II.3.iii. Les questions précédentes montrent l'inclusion $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) \subset S$. La réciproque est triviale puisque les valeurs prises par une somme de carrés de fonctions polynomiales ne peuvent être que positives. Donc $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) = S$.

A.III.1. Si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$ et si $x \in \mathbb{R}$, il existe au moins une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x (c'est la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) et la continuité de la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ entraîne $P(x) = \lim_{k\to+\infty} P(r_k)$. Comme $P(r_k) \geq 0$ pour tout k, il suffit de passer à la limite dans cette inégalité pour obtenir $P(x) \geq 0$. Ainsi $P(x)$ est positif pour tout réel x, i.e. $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et l'on peut conclure à $\mathcal{P}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

A.III.2.i. Par exemple $2X^2 + 4 = \left(\sqrt{2}X\right)^2 + 2^2 = \left(-\sqrt{2}X\right)^2 + 2^2$.

A.III.2.ii. On a

$$2X^2+4=(aX+b)^2+(cX+d)^2=\left(a^2+c^2\right)X^2+2\,(ab+cd)\,X+b^2+d^2$$

si et seulement si

$$(S)\qquad\left\{\begin{array}{l}a^2+c^2=2\\ ab+cd=0\\ b^2+d^2=4.\end{array}\right.$$

En posant $M'=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{b}{2}\\ \frac{c}{\sqrt{2}} & \frac{d}{2}\end{pmatrix}$, cela équivaut à

$$(S')\qquad\left\{\begin{array}{l}a'^2+c'^2=1\\ a'b'+c'd'=0\\ b'^2+d'^2=1.\end{array}\right.$$

La condition (S') caractérise les matrices orthogonales de taille 2 à coefficients réels. Le cours montre que ces matrices sont de l'une des deux formes suivantes

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\text{ ou }\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Supposons par l'absurde que a, b, c, d sont tous rationnels. Il existe alors $\varepsilon=\pm1$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{b}{2}\\ \frac{c}{\sqrt{2}} & \frac{d}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\varepsilon\sin\theta\\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}$$

d'où

$$\frac{a}{\sqrt{2}}=\cos\theta=\varepsilon\frac{d}{2}\text{ et }\frac{c}{\sqrt{2}}=\sin\theta=-\varepsilon\frac{b}{2}.$$

Cela permet d'obtenir une expression de $\sqrt{2}$ comme quotient d'entiers relatifs : $\sqrt{2}=\frac{2\varepsilon a}{d}$ si $d\neq0$, ou $\sqrt{2}=\frac{-2\varepsilon c}{b}$ si $b\neq0$ (on ne peut pas avoir simultanément $b=d=0$ puisque $b^2+d^2=4$). C'est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel (en effet $\sqrt{2}=p/q$ avec p et q entiers et premiers entre eux, entraîne $2q^2=p^2$. Le Théorème de Gauss montre alors que p est pair, et si l'on pose $p=2p'$, on obtient $q^2=2p'^2$. Le même Théorème montre que q est pair, ce qui est absurde puisque p et q ne peuvent pas être simultanément pairs tout en restant premiers entre eux !).

A.III.2.iii. Le polynôme $2X^2+4$, qui appartient clairement à $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}_+)$, ne peut pas s'écrire comme la somme des carrés de deux éléments de $\mathbb{Q}[X]$. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}_+)$ n'est pas égal à celui des polynômes à coefficients réels qui s'écrivent comme la somme de deux carrés de polynômes de $\mathbb{Q}[X]$.

B. ETUDE DE $\mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

B.I.1. C'est trivial pour Γ_0. Soit $n>0$. Si $k \geq n$, alors

$$\Gamma_n(k) = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} = \binom{k}{n} \in \mathbb{N}.$$

Si $0 \leq k \leq n-1$,

$$\Gamma_n(k) = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(k-i) = 0 \in \mathbb{N}$$

puisque l'un des indices i sera égal à k. Enfin, si $k<0$, posons $k'=-k$. On a

$$\begin{aligned}\Gamma_n(k) &= (-1)^n \frac{k'(k'+1)\ldots(k'+n-1)}{n!} = (-1)^n \frac{(k'+n-1)\ldots(k'+1)k'}{n!} \\ &= (-1)^n \Gamma_n\left(k'+n-1\right).\end{aligned}$$

Comme $k'+n-1 \geq 0$, $\Gamma_n(k'+n-1) \in \mathbb{N}$ et l'on déduit $\Gamma_n(k) \in \mathbb{N}$.

B.I.2. Les degrés des polynômes de la famille $(\Gamma_n)_{0\leq n\leq m}$ sont étagés (on a $\deg \Gamma_n = n$ pour tout n), donc cette famille est libre dans $\mathbb{R}_m[X]$. Comme c'est une famille libre à $m+1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $m+1$, ce sera une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

B.II. La question **B.I.1** donne

$$P(k) = \sum_{0\leq n\leq m} d_n\Gamma_n(k) = \sum_{0\leq n\leq k} d_n\Gamma_n(k)$$

puisque $\Gamma_n(k)=0$ dès que $0 \leq k \leq n-1$, et permet d'obtenir le système triangulaire

$$(S)\left\{\begin{array}{l} P(0) = d_0\Gamma_0(0) \\ P(1) = d_0\Gamma_0(1) + d_1\Gamma_1(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(k) = d_0\Gamma_0(k) + \ldots + d_k\Gamma_k(k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(m) = d_0\Gamma_0(m) + \ldots + d_m\Gamma_k(m) \end{array}\right.$$

qui s'écrit encore

$$\left\{\begin{array}{l} P(0) = d_0 \\ P(1) = d_0 + d_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(k) = d_0\binom{k}{0} + d_1\binom{k}{1} + \ldots + d_k\binom{k}{k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(m) = d_0\binom{m}{0} + d_1\binom{m}{1} + \ldots + d_m\binom{m}{m}. \end{array}\right.$$

La matrice M de ce système d'inconnues d_0, ..., d_m est triangulaire de coefficients diagonaux $\binom{k}{k} = 1$, donc de déterminant $\det M = 1$.

B.III. a) (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, alors $(P(0), ..., P(m)) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ et la question précédente montre que $P = \sum_{0 \leq n \leq m} d_n \Gamma_n$ où $(d_0, ..., d_m)$ est l'unique solution du système triangulaire de Cramer (S). Par suite

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(m) \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Comme $\det M = 1$, la matrice M^{-1} sera égale à la transposée de la comatrice de M, et sera donc à coefficients dans $\mathbb{Z}$. L'image ${}^t(d_0, ..., d_m)$ du vecteur à coordonnées entières ${}^t(P(0), ..., P(m))$ par M^{-1} sera donc un vecteur à coordonnées entières, i.e. $(d_0, ..., d_m) \in \mathbb{Z}^{m+1}$, ce qui prouve (ii).

b) (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Si $(d_0, ..., d_m) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ alors $P(k) = \sum_{0 \leq n \leq m} d_n \Gamma_n(k)$ est entier pour tout k appartenant à $\{0, ..., m\}$ (puisque $\Gamma_n(k) \in \mathbb{Z}$ d'après la question **B.I.1**).

c) (iii) $\Rightarrow$ (iv) : trivial.

d) (iv) $\Rightarrow$ (i) : Si $(P(s), ..., P(s+m))$ appartient à $\mathbb{Z}^{m+1}$ avec $s \in \mathbb{Z}$, posons $Q(X) = P(X+s)$. Alors $(Q(0), ..., Q(m)) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ et $Q(X)$ s'exprime sous la forme $Q(X) = \sum_{0 \leq n \leq m} d_n \Gamma_n(X)$ où $(d_0, ..., d_m)$ est la solution du système $(*)$ où l'on aura remplacé les P par des Q. Le même raisonnement qu'au a) montre que $(d_0, ..., d_m) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ et prouve ainsi que

$$Q(k) = \sum_{0 \leq n \leq m} d_n \Gamma_n(k)$$

est une somme de produits d'entiers, donc un entier, pour tout entier k. Il en sera de même pour P, et cela caractérise les polynômes de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

B.IV.1. Dans cette question, le système (S) est

$$(S) \quad \begin{cases} P(0) = d_0 \\ P(1) = d_0 + d_1 \\ P(2) = d_0 + 2d_1 + d_2 \\ P(3) = d_0 + 3d_1 + 3d_2 + d_3 \\ P(4) = d_0 + 4d_1 + 6d_2 + 4d_3 + d_4 \\ P(5) = d_0 + 5d_1 + 10d_2 + 10d_3 + 5d_4 + d_5. \end{cases}$$

On vérifie que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 0$ et donc que

$$P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5).$$

Le polynôme P est un produit de polynômes du premier degré à coefficients dans $\mathbb{Q}$, c'est donc un polynôme scindé sur $\mathbb{Q}$. On résout le système

$$(S_P)\quad\begin{cases}-120 = d_0\\ 0 = d_0 + d_1\\ 0 = d_0 + 2d_1 + d_2\\ 0 = d_0 + 3d_1 + 3d_2 + d_3\\ 0 = d_0 + 4d_1 + 6d_2 + 4d_3 + d_4\\ 0 = d_0 + 5d_1 + 10d_2 + 10d_3 + 5d_4 + d_5.\end{cases}$$

On obtient

$$(S_P) \Leftrightarrow \begin{cases}-120 = d_0\\ 120 = d_1\\ 0 = d_1 + d_2\\ 0 = d_1 + 2d_2 + d_3\\ 0 = d_1 + 3d_2 + 3d_3 + d_4\\ 0 = d_1 + 4d_2 + 6d_3 + 4d_4 + d_5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-120 = d_0\\ 120 = d_1\\ -120 = d_2\\ 0 = d_2 + d_3\\ 0 = d_2 + 2d_3 + d_4\\ 0 = d_2 + 3d_3 + 3d_4 + d_5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-120 = d_0\\ 120 = d_1\\ -120 = d_2\\ 120 = d_3\\ 0 = d_3 + d_4\\ 0 = d_3 + 2d_4 + d_5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-120 = d_0\\ 120 = d_1\\ -120 = d_2\\ 120 = d_3\\ -120 = d_4\\ 120 = d_5.\end{cases}$$

En conclusion $P(X) = 120\sum_{0\le n\le 5}(-1)^{n+1}\Gamma_n(X)$.

B.IV.2. Pour tout $k \in \{1, ..., m\}$,

$$P(k) = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n\Gamma_n(k) = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n\binom{k}{n} = (1-1)^k = 0.$$

Le polynôme $P(X)$ est de degré m et de racines 1, ..., m, donc admet la décomposition $P(X) = c(X-1)(X-2)...(X-m)$ où c désigne le coefficient dominant de P. Ce coefficient est égal à celui de $(-1)^m\Gamma_m(X)$, donc $c = (-1)^m/m!$, et

$$\begin{aligned}P(X) &= (-1)^m\frac{(X-1)(X-2)...(X-m)}{m!}\\ &= (-1)^m\frac{1}{X}\frac{X(X-1)(X-2)...(X-m+1)}{m!}(X-m)\\ &= (-1)^m\frac{\Gamma_m(X)(X-m)}{X}.\end{aligned}$$

C. ETUDE DE $\mathcal{P}\left(E,\mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

C.I.1. Tout rationnel x non nul s'écrit sous la forme $x=\frac{a'}{b'}$ avec $a'\in\mathbb{Z}$, $b'\in\mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(a',b')=1$. Il suffit d'utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers de a' et b' pour obtenir des entiers s et t, ainsi que des entiers a et b non divisibles par p, tels que $a'=p^s a$ et $b'=p^t b$. Par suite $x=p^{s-t}\frac{a}{b}$ et la décomposition existe. L'unicité se démontre directement. Si les décompositions

$$x=p^k\frac{a}{b}=p^{k'}\frac{a'}{b'}$$

vérifient les conditions de l'énoncé, $p^{k-k'}ab'=ba'$ donc $k=k'$ (en effet, $k\neq k'$ imposerait à p de diviser ba', donc de diviser l'un des deux entiers b ou a', ce qui est contraire à l'hypothèse).

C.I.2. • (i) Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $v_p(p^k)=k$. Comme $v_p(0)=+\infty$, l'application $v_p:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ sera surjective.

• (ii) Le résultat est trivial si x ou y est égal à 0. Supposons donc $xy\neq 0$ et notons $x=p^k\frac{a}{b}$ et $y=p^s\frac{c}{d}$. On a

$$v_p(xy)=v_p\left(p^{k+s}\frac{ac}{bd}\right)=k+s=v_p(x)+v_p(y)$$

puisque p ne divise ni ac, ni bd.

• (iii) Si $xy\neq 0$, notons toujours $x=p^k\frac{a}{b}$ et $y=p^s\frac{c}{d}$, et supposons que $k\leq s$. Alors

$$v_p(x+y)=v_p\left(p^k\left(\frac{a}{b}+p^{s-k}\frac{c}{d}\right)\right)=v_p\left(p^k z\right)$$

où

$$z=\frac{ad+p^{s-k}bc}{bd}$$

s'écrit de façon unique $z=p^{v_p(z)}\frac{e}{f}$ avec une valuation $v_p(z)$ positive (puisque le dénominateur bd n'est pas divisible par p). Par conséquent

$$v_p(x+y)=k+v_p(z)\geq k=v_p(x)=\operatorname{Min}(v_p(x),v_p(y)).$$

Si $x=0$ et $y\neq 0$, alors $v_p(x+y)=v_p(y)$ et

$$\operatorname{Min}(v_p(x),v_p(y))=\operatorname{Min}(+\infty,v_p(y))=v_p(y).$$

L'inégalité est encore vraie. Si $x\neq 0$ et $y=0$, le raisonnement est le même que le précédent. Enfin, si $x=y=0$, les deux membres de l'inégalité valent $+\infty$.

C.I.3. Comme $1 = p^0$ et $-1 = p^0(-1)$, on trouve $v_p(1) = v_p(-1) = 0$. La propriété (ii) de la question précédente donne $v_p\left(\frac{x}{y}y\right) = v_p\left(\frac{x}{y}\right) + v_p(y)$ d'où $v_p\left(\frac{x}{y}\right) = v_p(x) - v_p(y)$.

C.I.4. • Par définition

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, \exists a, b \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{a}{b} \text{ et } p \nmid b\right\} = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, v_p(x) \geq 0\right\}.$$

L'ensemble $\mathbb{Z}_{(p)}$ n'est pas vide puisque contient 1 et 0. Si $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$, alors

$$v_p(x-y) \geq \operatorname{Min}(v_p(x), v_p(-y)) = \operatorname{Min}(v_p(x), v_p(y)) \geq 0$$

donc $x - y \in \mathbb{Z}_{(p)}$, et $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y) \geq 0$ prouve que $xy \in \mathbb{Z}_{(p)}$. L'ensemble $\mathbb{Z}_{(p)}$ est donc un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

• Un élément x de $\mathbb{Z}_{(p)}$ est inversible si et seulement si il n'est pas nul et son inverse $x^{-1} = \frac{1}{x}$ dans $\mathbb{Q}$ appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}$. Soit $x \in \mathbb{Z}_{(p)} \backslash \{0\}$. On a donc, en notant $\mathbb{Z}_{(p)}^*$ le groupe des unités de $\mathbb{Z}_{(p)}$,

$$x \in \mathbb{Z}_{(p)}^* \Leftrightarrow v_p\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow v_p(1) - v_p(x) \geq 0 \Leftrightarrow v_p(x) \leq 0 \Leftrightarrow v_p(x) = 0,$$

la dernière équivalence provenant du fait que $v_p(x) \geq 0$ caractérise les éléments de $\mathbb{Z}_{(p)}$. En conclusion

$$\mathbb{Z}_{(p)}^* = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, v_p(x) = 0\right\} \text{ et } \mathbb{Z}_{(p)} \backslash \mathbb{Z}_{(p)}^* = \left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, v_p(x) > 0\right\}.$$

C.I.5.i. On a

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \leq j \leq n \\ v_p(j) = k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leq j \leq n \\ j = p^k a \text{ où } a \in \mathbb{N} \text{ et } p \nmid a. \end{array}\right.$$

Trouver le nombre d'entiers j vérifiant cette dernière condition revient à trouver le nombre d'entiers naturels a tels que

$$(\flat) \qquad \left\{\begin{array}{l} 1 \leq p^k a \leq n \\ p \nmid a. \end{array}\right.$$

Les inéquations $1 \leq p^k a \leq n$ équivalent à $\frac{1}{p^k} \leq a \leq \frac{n}{p^k}$ et sont vérifiées pour $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ valeurs différentes de a. Mais, parmi ces valeurs, il faut rejeter toutes celles qui sont multiples de p, autrement dit qui s'écrivent $a = pb$ avec $b \in \mathbb{N}$. Comme $1 \leq p^k \times (pb) \leq n$ équivaut à $\frac{1}{p^{k+1}} \leq b \leq \frac{n}{p^{k+1}}$, on rejette ainsi $\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$

valeurs de a. Finalement, le nombre d'entiers a vérifiant ($\flat$) sera $\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$ et

$$|\{j \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq j \leq n,\ v_p(j) = k\}| = \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right].$$

C.I.5.ii. On a

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{j=1}^{n} v_p(j) \\ &= \sum_{k>0} k \times |\{j \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq j \leq n,\ v_p(j) = k\}| \\ &= \sum_{k>0} k \left(\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right] \right). \end{aligned}$$

Si l'on pose $u_k = \left[\frac{n}{p^k}\right]$, on obtient

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k>0} k u_k - \sum_{k>0} k u_{k+1} = \sum_{k>0} k u_k - \sum_{k>1} (k-1) u_k \\ &= u_1 - \sum_{k>1} (k u_k + (k-1) u_k) = \sum_{k>0} u_k = \sum_{k>0} \left[\frac{n}{p^k}\right]. \end{aligned}$$

C.II.1. • Si $x \in \mathbb{Z}$, notons $x = \pm p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers (avec $\alpha_i > 0$). On a $v_{p_i}(x) = \alpha_i > 0$ pour tout i, et $v_p(x) = 0$ pour tout nombre premier p distinct d'un p_i, donc $x \in \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(l)}$.

• Si $x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$, alors $x = \frac{a}{b}$ avec $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ et $b \neq \pm 1$. Il existe donc au moins un diviseur premier p de b, et l'on peut écrire $b = p^t b'$ avec $t > 0$ et $p \nmid b'$. Dans ce cas $x = p^{-t} \frac{a}{b}$ et $v_p(x) = -t < 0$. Cela prouve que $x \notin \mathbb{Z}_{(p)}$, et a fortiori que $x \notin \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(l)}$.

• Les deux points précédents entraînent $\mathbb{Z} = \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(l)}$.

C.II.2. Puisque $\mathbb{Z} = \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(l)}$,

$$\begin{aligned} (P \in \mathcal{P}(E, \mathbb{Z})) &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad P(x) \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad \forall l \in \mathbb{P} \quad P(x) \in \mathbb{Z}_{(l)} \\ &\Leftrightarrow \forall l \in \mathbb{P} \quad P \in \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(l)}\right) \\ &\Leftrightarrow P \in \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(l)}\right) \end{aligned}$$

et l'on aura bien $\mathcal{P}(E, \mathbb{Z}) = \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(l)}\right)$.

C.III.1. On doit avoir

$$v_3(u_1) = \mathrm{Min}\left(\{v_3(3k)\ /\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_3(1)\}\right) = v_3(1) = 0$$

d'où nécessairement $u_1 = 1$. On doit aussi avoir

$$\begin{aligned} v_3(u_2(u_2-1)) &= \underset{x\in E}{\mathrm{Min}}\, v_3(x(x-1)) \\ &= \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Min}}\, v_3(3k(3k-1)) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Min}}\,(1+v_3(k)) = 1 \end{aligned}$$

i.e. $v_3(u_2(u_2-1)) = 1$. Ici $u_2 \notin \{u_0, u_1\} = \{0,1\}$ donc u_2 est de la forme $u_2 = 3k$, et la condition $v_3(u_2(u_2-1)) = 1$ s'écrit $v_3(k) = 0$, ce qui équivaut à $3 \nmid k$. Par conséquent u_2 peut être égal à l'un quelconque des entiers $3k$ où k n'est pas divisible par 3.

C.III.2. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite p-ordonnée de $\mathbb{Z}$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_p((n-0)\ldots(n-(n-1))) = \underset{x\in\mathbb{Z}}{\mathrm{Min}}\, v_p((x-0)\ldots(x-(n-1))).$$

Il s'agit donc de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad v_p(n!) \leq v_p(x(x-1)\ldots(x-n+1)). \qquad (\natural)$$

On remarque d'abord que l'inégalité $(\natural)$ est triviale si $x \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ puisque, dans ce cas, le membre de droite est infini.

$\star$ **Premier cas** : Si $x \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,\ldots,n-1\}$,

$$\begin{aligned} (\natural) &\Leftrightarrow v_p(n!) \leq v_p\left(\frac{x!}{(x-n)!}\right) \\ &\Leftrightarrow v_p(n!) + v_p((x-n)!) \leq v_p(x!) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k>0}\left[\frac{n}{p^k}\right] + \sum_{k>0}\left[\frac{x-n}{p^k}\right] \leq \sum_{k>0}\left[\frac{x}{p^k}\right] \quad \text{d'après } \mathbf{C.I.5.ii}, \end{aligned}$$

et cette dernière affirmation provient de l'inégalité

$$\left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{x-n}{p^k}\right] \leq \left[\frac{x}{p^k}\right]$$

vraie pour tout entier k. En effet,

$$\left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{x-n}{p^k}\right] \leq \frac{n}{p^k} + \frac{x-n}{p^k} = \frac{x}{p^k} \Rightarrow \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{x-n}{p^k}\right] \leq \left[\frac{x}{p^k}\right]$$

puisque $\left[\frac{x}{p^k}\right]$ est, par définition, le plus grand entier s tel que $s \leq \frac{x}{p^k}$.

⋆ **Second cas** : Si $x \in \mathbb{Z}_-\backslash\{0\}$, on pose $x = -x'$ avec $x' \in \mathbb{N}^*$. Si $x' \in \{0, 1, ..., n-1\}$, ($\natural$) est triviale. Sinon,

$$\begin{aligned}(\natural) &\Leftrightarrow v_p\left(n!\right) \leq v_p\left(\left(-1\right)^n x'\left(x'+1\right)...\left(x'+n-1\right)\right) \\ &\Leftrightarrow v_p\left(n!\right) \leq v_p\left(\frac{\left(x'+n-1\right)!}{\left(x'-1\right)!}\right)\end{aligned}$$

et il suffit de poser $x = x' + n - 1$ pour que l'inégalité à vérifier s'écrive $v_p\left(n!\right) \leq v_p\left(\frac{x!}{(x-n)!}\right)$ et coïncide avec celle démontrée dans le premier cas.

C.III.3. Le choix de $u_0 = a$ ne pose pas de problème puisque la condition qui caractérise les suites p-ordonnées ne fait intervenir que les termes u_n tels que $n \in \mathbb{N}^*$. On construit la suite par récurrence. Si u_0, ..., u_{n-1} ont déjà été construits, l'ensemble $\Lambda_n = \{v_p\left(\left(x-u_0\right)...\left(x-u_{n-1}\right)\right) / x \in E\} \setminus \{+\infty\}$ est non-vide (puisque, E étant infini, il est toujours possible de trouver un élément x de E distinct des éléments u_0, ..., u_{n-1}), et inclus dans $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément ($\mathbb{N}$ est bien ordonné). Ce plus petit élément s'écrit $v_p\left(\left(x_0-u_0\right)...\left(x_0-u_{n-1}\right)\right)$ avec $x_0 \in E$, et il suffit de poser $u_n = x_0$ pour remplir la condition

$$v_p\left(\left(u_n-u_0\right)...\left(u_n-u_{n-1}\right)\right) = \mathrm{Min}\left\{v_p\left(\left(x-u_0\right)...\left(x-u_{n-1}\right)\right) / x \in E\right\}.$$

Il n'y a aucune raison pour que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit unique : on peut rappeler que le terme u_2 construit en **C.III.1** pouvait être choisi d'une infinité de façon, seule la valuation de $\left(u_n-u_0\right)...\left(u_n-u_{n-1}\right)$ étant fixée par la récurrence.

C.IV.1.i. Pour tout $x \in E$,

$$P_n\left(x\right) = \frac{\left(x-u_0\right)...\left(x-u_{n-1}\right)}{\left(u_n-u_0\right)...\left(u_n-u_{n-1}\right)} \in \mathbb{Q}$$

et

$$v_p\left(P_n\left(x\right)\right) = v_p\left(\left(x-u_0\right)...\left(x-u_{n-1}\right)\right) - v_p\left(\left(u_n-u_0\right)...\left(u_n-u_{n-1}\right)\right) \geq 0$$

puisque $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite p-ordonnée de E. Cela prouve que $P_n\left(x\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

C.IV.1.ii. Les degrés des polynômes de la famille $\left(P_n\right)_{0\leq n\leq m}$ sont étagés (on a $\deg P_n = n$ pour tout n), donc cette famille est libre dans $\mathbb{R}_m\left[X\right]$. Comme c'est une famille libre à $m+1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $m+1$, ce sera une base de $\mathbb{R}_m\left[X\right]$.

C.IV.1.iii. On trouve $P_n\left(u_k\right) = 0$ si $0 \leq k \leq n-1$ et $P_n\left(u_n\right) = 1$.

C.IV.2. • (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si $P \in \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$, alors

$$(*)\left\{\begin{array}{l} P(u_0) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(u_0) = c_0 \\ P(u_1) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(u_1) = c_0 P_0(u_1) + c_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ P(u_m) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(u_m) = c_0 P_0(u_m) + \ldots + c_{m-1} P_{m-1}(u_m) + c_m \end{array}\right.$$

est un système triangulaire en c_0, ..., c_m, qui se résout de proche en proche. Tous les nombres $P(u_i)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}$ d'après **C.IV.1.i**, et un raisonnement par récurrence montre que tous les c_i appartiendront à $\mathbb{Z}_{(p)}$. En effet, $c_0 = P(u_0) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et si c_0, ..., $c_{i-1} \in \mathbb{Z}_{(p)}$, alors

$$c_i = P(u_i) - c_0 P_0(u_i) - c_1 P_1(u_i) - \ldots - c_{i-1} P_{i-1}(u_i)$$

appartient bien à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

• (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Pourtout i, on a $P(u_i) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(u_i)$, et par hypothèse c_0, ..., $c_m \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $P_n \in \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$, donc $P(u_i) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

• (iii) $\Rightarrow$ (i) : Si tous les $P(u_i)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}$, tous les c_i appartiendront à $\mathbb{Z}_{(p)}$ (raisonner de proche en proche sur le système $(*)$, comme dans la preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii)). Il suffit alors de rappeler que $P(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(x)$, que $c_n \in \mathbb{Z}_{(p)}$, que $P_n(x) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ (puisque $P_n \in \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$) et que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un anneau pour conclure à $P \in \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

C.IV.3. • Un polynôme $P \in \mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ s'écrit $P(X) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(X)$ avec des coefficients c_n appartenant à $\mathbb{Z}_{(p)}$ (**C.IV.2**). On aura donc prouvé que tous les coefficients de $p^{\omega(m)} P(X)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}$ si l'on démontre la propriété suivante :

(P) Pour tous les entiers m et n tels que $0 \leq n \leq m$, les coefficients de $p^{\omega(m)} P_n(X)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

On a

$$p^{\omega(m)} P_n(X) = p^{\omega(m)} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(X - u_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(u_n - u_k)} = \frac{p^{\omega(m)}}{\prod_{k=0}^{n-1}(u_n - u_k)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sigma_{n-k} X^k$$

où

$$\sigma_{n-k} = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_{n-k} \leq n-1} u_{i_1} \ldots u_{i_{n-k}}$$

désigne la $(n-k)$-ième fonction symétrique élémentaire des racines u_i. Si

$$p^{\omega(m)} P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

le k-ième coefficient a_k de ce polynôme vérifie

$$\begin{aligned} v_p(a_k) &= v_p\left(\frac{p^{\omega(m)}(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}}{\prod_{k=0}^{n-1}(u_n-u_k)}\right) \\ &= \omega(m) - v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(u_n-u_k)\right) + v_p(\sigma_{n-k}) = v_p(\sigma_{n-k}). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} v_p(\sigma_{n-k}) &= v_p(\sum_{i_1<\ldots<i_{n-k}} u_{i_1}\ldots u_{i_{n-k}}) \\ &\geq \operatorname{Min}\left(v_p\left(u_{i_1}\ldots u_{i_{n-k}}\right)\right) = \operatorname{Min}\left(v_p(u_{i_1}) + \ldots + v_p\left(u_{i_{n-k}}\right)\right) \end{aligned}$$

et comme $v_p(u_i) \geq 0$ pour tout i (puisque $u_i \in E \subset \mathbb{Z}$ est un entier relatif, par hypothèse), on déduit $v_p(a_k) = v_p(\sigma_{n-k}) \geq 0$, c'est-à-dire $a_k \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

• $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$. Pour le voir, il faut d'abord noter que tout polynôme P de degré m de $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ s'écrit $P(X) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(X)$ avec $c_n \in \mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathbb{Q}$ (**C.IV.2**), et que $P_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$, ce qui implique $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Ensuite, il faut montrer la stabilité de $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ par soustraction et par multiplication. Si P et Q appartiennent à $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$, soit m le maximum des degrés de P et Q. Alors $P, Q \in \mathbb{R}_m[X]$ et l'on peut appliquer **C.IV.2** : $P(u_0)$, ...,$P(u_m)$, ..., $Q(u_0)$, ...,$Q(u_m)$ appartiennent tous à $\mathbb{Z}_{(p)}$. Comme $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$, les différences $P(u_n) - Q(u_n)$ et les produits $P(u_n) \times Q(u_n)$ appartiendront encore à $\mathbb{Z}_{(p)}$, et toujours la même caractérisation vue en **C.IV.2** montre que $P(X) - Q(X)$ et $P(X) \times Q(X)$ appartiennent à $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

D. CARACTERISATION DE $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$

D.I.1. • Par division euclidienne $n = (p-1)q + r$ avec $0 \leq r < p-1$, donc

$$\frac{n}{p-1} = q + \frac{r}{p-1} \text{ et } q = \left[\frac{n}{p-1}\right].$$

Avec ces notations,

$$\frac{\varphi_p(n)}{p} = \frac{n+1}{p} + \frac{q}{p} = \frac{(p-1)q + r + 1 + q}{p} = \frac{pq + r + 1}{p} = q + \frac{r+1}{p}$$

avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \frac{r+1}{p} < 1$, donc $\left[\frac{\varphi_p(n)}{p}\right] = \left[\frac{n}{p-1}\right]$.

• On a $\varphi_p(n) = n+1+q = (p-1)q+r+1+q = pq+r+1$. Si p divisait $\varphi_p(n)$, alors p divisait $r+1$, ce qui est impossible puisque $1 \leq r+1 \leq p-1$.

D.I.2. • (i) On sait déjà que $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}$. Il reste seulement à prouver que

- φ_p est strictement croissante,
- φ_p est surjective.

La stricte croissance (et donc aussi l'injectivité) de φ_p ne pose pas de problème. En effet

$$\begin{aligned}\varphi_p(n) < \varphi_p(n+1) &\Leftrightarrow n+1+\left[\frac{n}{p-1}\right] < n+2+\left[\frac{n+1}{p-1}\right]\\ &\Leftrightarrow \left[\frac{n}{p-1}\right] < \left[\frac{n+1}{p-1}\right]+1\end{aligned}$$

et l'on vérifie que

$$\left[\frac{n}{p-1}\right] \leq \frac{n}{p-1} < \frac{n}{p-1}+\frac{1}{p-1} = \frac{n+1}{p-1} < \left[\frac{n+1}{p-1}\right]+1.$$

Montrer la surjectivité de φ_p revient à se donner $t \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$ et à montrer l'existence d'un entier n tel que $\varphi_p(n) = t$. On a

$$\begin{aligned}\left(\varphi_p(n) = t\right) &\Leftrightarrow n+1+\left[\frac{n}{p-1}\right] = t \Leftrightarrow \left[\frac{n}{p-1}\right] = t-n-1\\ &\Leftrightarrow t-n-1 \leq \frac{n}{p-1} < t-n\\ &\Leftrightarrow (t-n-1)(p-1) \leq n < t(p-1)\\ &\Leftrightarrow (t-1)(p-1) \leq np < t(p-1)\end{aligned}$$

ou encore

$$\varphi_p(n) = t \Leftrightarrow np < t(p-1) \leq np+p-1. \qquad (*)$$

Par division euclidienne $t(p-1) = qp+r$ avec $0 \leq r < p$. Ici $r \neq 0$ car p ne divise pas t, et l'on peut écrire $qp < t(p-1) \leq qp+p-1$, ce qui prouve que $(*)$ est vérifiée avec $n = q$.

• **(ii) Début :** On montre d'abord la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}^* \quad \left[\frac{x}{ab}\right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{a}\right]}{b}\right]. \qquad (1)$$

Cette formule s'écrit $\left[\frac{\frac{x}{a}}{b}\right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{a}\right]}{b}\right]$ et sera prouvée si l'on montre plus simplement que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{N}^* \qquad \left[\frac{y}{b}\right] = \left[\frac{[y]}{b}\right]. \qquad (2)$$

On a $[y] \leq y < [y] + 1$ donc

$$\left[\frac{[y]}{b}\right] \leq \frac{[y]}{b} \leq \frac{y}{b} < \frac{[y]}{b} + \frac{1}{b}$$

et ces dernières inégalités entraîneront (2) si l'on prouve que

$$\frac{[y]}{b} + \frac{1}{b} \leq \left[\frac{[y]}{b}\right] + 1. \qquad (3)$$

L'inégalité (3) équivaut à $[y] + 1 \leq b\left[\frac{[y]}{b}\right] + b$ et se vérifie en écrivant

$$b\left[\frac{[y]}{b}\right] + b > b\left(\frac{[y]}{b} - 1\right) + b = [y]$$

et en remarquant que l'inégalité stricte $b\left[\frac{[y]}{b}\right] + b > [y]$ entre entiers équivaut à l'inégalité large $b\left[\frac{[y]}{b}\right] + b \geq [y] + 1$ désirée.

• **(ii) Fin** : On trouve

$$\begin{aligned} v_p\left(\varphi_p(n)!\right) &\underset{\mathbf{C.I.5.ii}}{=} \sum_{k>0} \left[\frac{\varphi_p(n)}{p^k}\right] \\ &\underset{(1)}{=} \sum_{k>0} \left[\frac{\left[\frac{\varphi_p(n)}{p}\right]}{p^{k-1}}\right] \underset{\mathbf{D.I.1}}{=} \sum_{k>0} \left[\frac{\left[\frac{n}{p-1}\right]}{p^{k-1}}\right] \underset{(1)}{=} \sum_{k>0} \left[\frac{n}{(p-1)\,p^{k-1}}\right] = \omega_p(n), \end{aligned}$$

soit

$$v_p\left(\varphi_p(n)!\right) = \sum_{k\geq 0} \left[\frac{n}{(p-1)\,p^k}\right] = \omega_p(n).$$

D.I.3. • **(i)** On a

$$\omega_p(n) = \sum_{k\geq 0} \left[\frac{n}{(p-1)\,p^k}\right] \leq \sum_{k\geq 0} \frac{n}{(p-1)\,p^k} \leq \sum_{k\geq 0} \frac{n}{p^k} \leq \frac{n}{1-\frac{1}{p}} \leq 2n,$$

où la dernière inégalité est assurée par l'hypothèse $2 \leq p$.

- **(ii)** Si $n < p-1$, alors $0 \leq \frac{n}{(p-1)p^k} < 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\omega_p(n) = \sum_{k \geq 0} \left[\frac{n}{(p-1)\,p^k} \right] = 0.$$

D.II.1. On a $v_p\big(r - \varphi_p(s)\big) = 0$ pour tout $(r,s) \in p\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ car p ne divise pas $r - \varphi_p(s)$. Dans le cas contraire, p diviserait $r - \varphi_p(s)$, donc $\varphi_p(s)$, ce qui est absurde car $\varphi_p(s) \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$ (**D.I.2. (i)**).

D.II.2. On a

$$\prod_{r=0}^{\varphi_p(n)-1} \big(\varphi_p(n) - r\big) = \varphi_p(n) \times \big(\varphi_p(n) - 1\big) \dots \big(\varphi_p(n) - \big(\varphi_p(n) - 1\big)\big) = \varphi_p(n)!,$$

d'où la seconde égalité demandée. D'après **D.II.1**, $v_p\big(\varphi_p(s) - r\big) = 0$ dès que $r \in p\mathbb{N}$, donc, en posant $A = \prod_{r=0}^{\varphi_p(n)-1} \big(\varphi_p(n) - r\big)$,

$$\begin{aligned} v_p(A) &= v_p\left(\prod_{\substack{0 \leq r \leq \varphi_p(n)-1 \\ r \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}}} \big(\varphi_p(n) - r\big) \right) + \prod_{\substack{0 \leq r \leq \varphi_p(n)-1 \\ r \in p\mathbb{N}}} v_p\big(\varphi_p(n) - r\big) \\ &= v_p\left(\prod_{\substack{0 \leq r \leq \varphi_p(n)-1 \\ r \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}}} \big(\varphi_p(n) - r\big) \right). \end{aligned}$$

Comme $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$ est une bijection strictement croissante, si l'on pose $r = \varphi_p(k)$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq \varphi_p(n) - 1 \\ r \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r < \varphi_p(n) \\ r \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N} \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 \leq k < n,$$

et l'on constate que φ_p induit une bijection de l'ensemble des $r \in \mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$ tels que $0 \leq r \leq \varphi_p(n) - 1$ sur l'ensemble des entiers k tels que $0 \leq k < n$. En utilisant cette bijection, on peut ré-écrire le dernier terme de l'égalité précédente et obtenir

$$v_p\left(\prod_{r=0}^{\varphi_p(n)-1} \big(\varphi_p(n) - r\big) \right) = v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1} \big(\varphi_p(n) - \varphi_p(k)\big) \right).$$

D.II.3. La première égalité

$$v_p\left(\prod_{r=0}^{\varphi_p(n)-1}\left(\varphi_p(s)-r\right)\right)=v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\varphi_p(s)-\varphi_p(k)\right)\right)$$

concerne les indices de sommation, et se trouve justifiée comme dans la question précédente par l'utilisation de la bijection croissante φ_p. La seconde égalité est obtenue en détaillant le produit :

$$\begin{aligned}A&=v_p\left(\prod_{r=0}^{\varphi_p(n)-1}\left(\varphi_p(s)-r\right)\right)\\&=v_p\left(\varphi_p(s)\times\left(\varphi_p(s)-1\right)\times...\times\left(\varphi_p(s)-\varphi_p(n)+1\right)\right)\\&=v_p\left(\frac{\varphi_p(s)!}{\left(\varphi_p(s)-\varphi_p(n)\right)!}\right).\end{aligned}$$

D.II.4. La suite $\left(\varphi_p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite p-ordonnée de $\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$ si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\varphi_p(n)-\varphi_p(k)\right)\right)=\underset{x\in\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}}{\mathrm{Min}}\,v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\varphi_p(k)\right)\right).$$

Puisque $\varphi_p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$ est bijective, cette condition s'écrit

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\forall s\in\mathbb{N}\quad v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\varphi_p(n)-\varphi_p(k)\right)\right)\leq v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\varphi_p(s)-\varphi_p(k)\right)\right).\quad(\natural)$$

Si $s<n$, la valuation figurant dans le membre de droite de $(\natural)$ est $+\infty$ et l'inégalité est triviale. Si $s\geq n$, alors $\varphi_p(s)\geq\varphi_p(k)$ et les questions **D.II.2** et **D.II.3** montrent que $(\natural)$ équivaut à

$$v_p\left(\varphi_p(n)!\right)\leq v_p\left(\frac{\varphi_p(s)!}{\left(\varphi_p(s)-\varphi_p(n)\right)!}\right).$$

Cette dernière inégalité est triviale car

$$\begin{aligned}v_p\left(\frac{\varphi_p(s)!}{\left(\varphi_p(s)-\varphi_p(n)\right)!}\right)&=v_p(\varphi_p(n)!\binom{\varphi_p(s)!}{\varphi_p(n)!})\\&=v_p\left(\varphi_p(n)!\right)+v_p(\binom{\varphi_p(s)!}{\varphi_p(n)!})\geq v_p\left(\varphi_p(n)!\right),\end{aligned}$$

le coefficient binomial $\binom{\varphi_p(s)!}{\varphi_p(n)!}$ étant entier, donc de valuation positive.

D.III.1. On applique la caractérisation **C.IV.2.**(iii) dans notre cas où $(\varphi_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite p-ordonnée de $\mathbb{N}\backslash p\mathbb{N}$.

D.III.2. On applique la caractérisation **C.IV.3.** en notant que

$$\omega(n) := v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(\varphi_p(n)-\varphi_p(k))\right) = v_p(\varphi_p(n)!) = \omega_p(n).$$

E. UN ALGORITHME POUR DETERMINER LES ELEMENTS DE $\mathcal{P}(\mathbb{P},\mathbb{Z})$.

E.I. • (i) : Le produit $\Xi(x) := x(x-1)(x-2)(x-3)$ est formé de 4 réels consécutifs, donc au moins l'un de ses facteurs est divisible par 3, et deux de ses facteurs sont de la forme $4k+2$ et $4k$, i.e. sont divisibles respectivement par 2 et par 4. Ainsi Ξ est divisible par 2^3 et par 3, qui sont premiers entre eux, donc sera divisible par $2^3\times 3 = 24$. On a montré que $\frac{\Xi(x)}{24}$ est entier quel que soit l'entier x, donc a fortiori que $\Phi(X) := \frac{\Xi(X)}{24} \in \mathcal{P}(\mathbb{P},\mathbb{Z})$.

• (ii) : Tout d'abord $\Phi(2) = \Phi(3) = 0$. Si x est un nombre premier distinct de 2 et de 3, on sait que 8×3 divise $\Xi(x)$, et donc que 8 et 3 divise $\Xi(x)$. Mais 8 (resp. 3) est premier avec x (en effet, tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas) et divise le produit $\Xi(x)$, donc divise $(x-1)(x-2)(x-3)$ (c'est le Théorème de Gauss) On a donc bien $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{24} \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{P}$.

• (iii) : Le polynôme défini au (ii) appartient à $\mathcal{P}(\mathbb{P},\mathbb{Z})$ sans appartenir à $\mathcal{P}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ puisque $\frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{24} = \frac{1}{4}$ n'est pas entier.

E.II.1.i. Posons $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$. On a

$$Q(a+kp^\alpha) - Q(a) = \sum_{i=0}^{m} a_i\left((a+kp^\alpha)^i - a^i\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i k p^\alpha \xi_i$$

où $\xi_i = \left((a+kp^\alpha)^{i-1} + (a+kp^\alpha)^{i-2}a + \ldots + a^{i-1}\right)$.

Par hypothèse $a_i p^\alpha \in \mathbb{Z}_{(p)}$ donc

$$v_p(a_i k p^\alpha \xi_i) = v_p(a_i p^\alpha) + v_p(k\xi_i) \geq v_p(a_i p^\alpha) \geq 0$$

et $a_i k p^\alpha \xi_i \mathbb{Z}_{(p)}$. La somme $Q(a+kp^\alpha) - Q(a) = \sum_{i=0}^m a_i k p^\alpha \xi_i$ d'éléments de l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$ appartiendra encore à $\mathbb{Z}_{(p)}$.

E.II.1.ii. On utilise le Théorème de Dirichlet : a n'est pas divisible par p, donc est premier avec p et avec p^α, et il existe au moins un entier k tel que $a+kp^\alpha$ soit premier. Comme $Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$, cela entraîne $Q(a+kp^\alpha) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

E.II.1.iii. Pour tout $a \in \mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}$, on vient de voir qu'il existe k tel que $Q(a+kp^\alpha) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $Q(a+kp^\alpha) - Q(a) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. On en déduit

$$Q(a) = Q(a+kp^\alpha) - [Q(a+kp^\alpha) - Q(a)] \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

puisque $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un anneau. Ainsi $Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ et la partie D s'applique. On retiendra l'inclusion $\mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right) \subset \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

E.II.2.i. Tout nombre premier p distinct de l n'est pas divisible par l (cela entraînerait $l = p$ ou 1, absurde), donc appartient à E_l. Comme $l \in E_l$ par définition, on aura évidemment $\mathbb{P} \subset E_l$.

E.II.2.ii. On a $\mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right) \subset \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ d'après **E.II.1.iii**. Comme $E_p = \{p\} \cup (\mathbb{N} \backslash p\mathbb{N})$ et comme p est premier, on a $\mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right) \subset \mathcal{P}\left(E_p, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$. Réciproquement $\mathbb{P} \subset E_p$ entraîne $\mathcal{P}\left(E_p, \mathbb{Z}_{(p)}\right) \subset \mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ et l'on peut conclure à $\mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right) = \mathcal{P}\left(E_p, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$.

E.II.2.iii. D'après **C.II.2** et **E.II.2.ii**,

$$\mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z}) = \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(l)}\right) = \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(E_l, \mathbb{Z}_{(l)}\right).$$

E.III. D'après la question précédente,

$$Q \in \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z}) = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right).$$

Pour tout $p \in \mathbb{P}$,

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{P}, \mathbb{Z}_{(p)}\right) &\underset{\mathbf{E.II.1.iii}}{\Rightarrow} Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right) \\ &\underset{\mathbf{D.III.2}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{c} \text{les coefficients de } p^{\omega_p(m)} Q(X) \\ \text{sont dans } \mathbb{Z}_{(p)} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Comme $\omega_p(m) \leq 2m$ (**D.I.3.i**), on en déduit que :

Lemme : Tous les coefficients de $p^{2m} Q(X)$ sont dans $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Montrer que $X^{2m} Q(X) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ revient à prouver que (**B.III.**) :

$$\forall x \in \{0, 1, ..., m\} \quad x^{2m} Q(x) \in \mathbb{Z}.$$

Pour démontrer cette affirmation, notons $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, choisissons un entier x dans $\{0, 1, ..., m\}$ et envisageons deux cas :

a) Si $x \in p\mathbb{N}$, alors $x = px'$ et $x^{2m} Q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i p^{2m} x'^{2m} x^i$. Le Lemme montre que $a_i p^{2m} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour tout i, donc $v_p\left(a_i p^{2m} x'^{2m} x^i\right) \geq v_p\left(a_i p^{2m}\right) \geq 0$ et

$$v_p\left(x^{2m} Q(x)\right) \geq \mathrm{Min}\left(v_p\left(a_i p^{2m} x'^{2m} x^i\right)\right) \geq 0,$$

ce qui prouve que $x^{2m} Q(x) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

b) Si $x \in \mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}$, alors $x \in E_p$. Puisque $Q(X) \in \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z}) = \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathcal{P}\left(E_l, \mathbb{Z}_{(l)}\right)$, on déduit $Q(X) \in \mathcal{P}\left(E_p, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ et donc $Q(x) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. On déduit a fortiori $x^{2m} Q(x) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

Les cas a), b) et la question **C.II.1** donnent $x^{2m} Q(x) \in \bigcap_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}$.

Remarque : Cherchez l'erreur dans le raisonnement suivant (réponse à la fin du problème).

$Q \in \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$ donc $Q(l) = \sum_{i=0}^{m} a_i l^i \in \mathbb{Z}$ pour tout $l \in \mathbb{P}$, et

$$v_p(Q(l)) = \mathrm{Min}\left(v_p\left(a_i l^i\right)\right) \geq 0.$$

Cela entraîne $v_p\left(a_i l^i\right) \geq 0$ pour tout $l, p \in \mathbb{P}$ et i. Si $l \neq p$, cela s'écrit $v_p\left(a_i l^i\right) = v_p(a_i) \geq 0$. En changeant éventuellement de l, on aboutit à $a_i \in \bigcap_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}$ pour tout i. On a ainsi prouvé que $Q(X) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, en contradiction flagrante avec le contre-exemple de la question **E.I**.

E.IV.1. D'après **D.III.1**, montrer que $Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$ revient à montrer

$$\forall k = 0, ..., m \quad Q\left(\varphi_p(k)\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}. \qquad (*)$$

Si $k = 0, ..., m$, la croissance de φ_p permet d'écrire

$$1 \leq \varphi_p(k) \leq \varphi_p(m) := m + 1 + \left[\frac{m}{p-1}\right] \leq 2m + 1$$

et l'hypothèse faite en **E.IV** donne $\varphi_p(k)^{2m} Q\left(\varphi_p(k)\right) \in \mathbb{Z}$.

Comme $\varphi_p(k) \in \mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}$, on a $v_p(\varphi_p(k)^{2m}) = 0$ et l'on déduit

$$v_p\left(\varphi_p(k)^{2m} Q\left(\varphi_p(k)\right)\right) = v_p\left(Q\left(\varphi_p(k)\right)\right) \geq 0,$$

autrement dit $Q\left(\varphi_p(k)\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}$.

E.IV.2. La question précédente donne $Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \backslash p\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(p)}\right)$, et cela équivaut à dire que tous les coefficients de $p^{\omega_p(m)} Q(X)$ sont dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ (caractérisation **D.III.2**). Si $p > m + 1$, **D.I.3.(ii)** donne $\omega_p(m) = 0$, et tous les coefficients de $Q(X)$ seront dans $\mathbb{Z}_{(p)}$.

En notant $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, on obtient $Q(p) = \sum_{i=0}^{m} a_i p^i$ et $a_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Donc

$$v_p(Q(p)) = \operatorname{Min}_i \left(v_p\left(a_i p^i\right)\right) = \operatorname{Min}_i \left(v_p(a_i) + i\right) \geq 0$$

et $Q(p) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. On a bien montré l'implication

$$\forall p \in \mathbb{P} \quad p > m+1 \Rightarrow Q(p) \in \mathbb{Z}_{(p)}.$$

E.V. • $(a) \Rightarrow (b)$: Si $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$, alors $Q(p) \in \mathbb{Z}$ pour tout nombre premier p, donc a fortiori pour tout nombre premier $p \leq m+1$. La question **E.III** montre que la condition de **E.IV** est satisfaite, et donc que

$$1 \leq k \leq 2m+1 \Rightarrow k^{2m} Q(k) \in \mathbb{Z}.$$

• $(a) \Leftarrow (b)$: La propriété (a) sera acquise si l'on démontre l'assertion :

$$\forall p \in \mathbb{P} \quad p > m+1 \Rightarrow Q(p) \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

L'hypothèse (b) représente exactement la condition **E.IV** de sorte que Q vérifie **E.IV.1** et **E.IV.2**. Comme $p > m+1$ on obtient $Q(p) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ (**E.IV.2**).

Si $l \in \mathbb{P} \backslash \{p\}$ alors $Q \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \backslash l\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{(l)}\right)$ (**E.IV.1**), et puisque $p \in \mathbb{N} \backslash l\mathbb{N}$, on aura $Q(p) \in \mathbb{Z}_{(l)}$. En conclusion

$$Q(p) \in \bigcap_{l \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(l)} = \mathbb{Z}$$

et $(*)$ est démontrée.

E.VI. Si le polynôme

$$Q(X) = \frac{1}{2903040}(X+1)(X-1)(X-2)(X-3)(X-5)(X-7)(X-193)$$

satisfait la caractérisation (b), cela signifie que $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{P}, \mathbb{Z})$, autrement dit que $Q(p) \in \mathbb{Z}$ pour tout nombre premier p, et cela équivaut bien à la congruence de l'énoncé. Montrons donc que $Q(X)$ satisfait (b). Ici $m = 7$ et il faut vérifier que :

a) $Q(p) \in \mathbb{Z}$ pour tout nombre premier $p \leq m+1 = 8$,

b) $k^{2m} Q(k) = k^{14} Q(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier $k \leq 2m+1 = 15$.

a) On a $Q(2) = Q(3) = Q(5) = Q(7) = 0$.

b) Posons $W(k) = k^{14}Q(k)$. On calcule

k	$W(k)$	k	$W(k)$
1	0	9	$-38\,975\,276\,034\,378$
2	0	10	$-524\,218\,750\,000\,000$
3	0	11	$-4936\,747\,836\,582\,133$
4	$-1\,572\,864$	12	$-36\,058\,660\,609\,720\,320$
5	0	13	$-216\,555\,701\,213\,460\,895$
6	$2\,120\,095\,296$	14	$-1111\,070\,463\,725\,814\,592$
7	0	15	$-5003\,883\,764\,648\,437\,500$
8	$-1\,589\,137\,899\,520$		

Réponse à la remarque du E.III. : Le raisonnement est faux car on utilise la valuation $v_p(a_i)$ comme s'il allait de soit que a_i était rationnel. En fait, on sait seulement que a_i est réel.

Chapitre 12

CAPES externe 2003, épreuve 2

12.1 Énonce

Notations, rappels et présentation du problème

L'ensemble des entiers naturels sera noté $\mathbb{N}$, celui des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. On notera $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication.

Etant donnés deux entiers relatifs a et b, le plus grand diviseur commun de a et b sera noté $\operatorname{pgcd}(a, b)$ ou $a \wedge b$. On rappelle que $a \wedge 0 = a$.
a est dit premier avec b si $a \wedge b = 1$. $a \equiv b \bmod n$ signifie que a est congru à b modulo n, c'est-à-dire que n divise $(b - a)$.

Un groupe $(G, \times)$ est dit cyclique s'il existe un élément a de G et un entier naturel p tel que $G = \{1, a, a^2, a^3, ..., a^p\}$, où $a^k = a \times a \times ... \times a$ (k termes) ; a est alors un générateur de $(G, \times)$.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 2, on notera respectivement :
S_n l'ensemble des entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à n, et premiers avec n.
D_n l'ensemble des diviseurs de n, entiers positifs (en particulier, 1 appartient à D_n).
La notation $\sum_{d \in D_n}$ désignera une somme étendue à tous les éléments d de D_n.
Enfin on notera $\phi(n)$ le cardinal de S_n.

La première partie du problème a pour but d'établir une identité due à Euler

[0] [ag57e] v1.01

concernant la fonction ϕ, à l'aide d'un raisonnement probabiliste.

Dans la deuxième partie, on étudie le groupe des éléments inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et on montre que, si n n'a qu'un seul diviseur premier, alors ce groupe est cyclique.

La troisième partie introduit la notion de nombres pseudo-premiers forts et se propose d'en donner une caractérisation algorithmique sur une calculatrice programmable.

Enfin, la quatrième partie a pour objet l'étude de nombres appelés nombres de Carmichaël, présentant des similarités avec les nombres premiers, et se termine par la présentation d'un test probabiliste pour la détection de nombres premiers.

Partie I

1. On considère dans cette question un univers probabilisé (Ω, B, P). L'événement contraire d'un événement E sera noté $\overline{E}$.

(a) Soient A_1 et A_2 deux événements indépendants de cet univers : montrer que $\overline{A}_1$ et A_2 sont indépendants.

(b) Généralisation : soit k un entier naturel non nul et A_1, A_2, ..., A_k k événements mutuellement indépendants de Ω.

(i) Montrer que $\overline{A}_1$, A_2, ..., A_k sont indépendants.

(ii) Montrer par récurrence que $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_k$ sont indépendants.

Dans toute la suite de cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et X une variable aléatoire sur Ω, prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, .., n\}$ de manière équiprobable, c'est-à-dire telle que pour tout $i = 1, .., n$ on a $P(X = i) = \frac{1}{n}$.

2. On considère l'événement A_1 : "X est multiple de 2" et l'événement A_2 : "X est multiple de 5".

(a) On suppose que $n = 100$. Calculer les probabilités des événements A_1 et A_2. A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

(b) On suppose maintenant que $n = 101$. Reprendre les questions du (a) dans ce cas.

3. On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},$$

où les α_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. Enfin, pour i entier naturel, $1 \leq i \leq k$, A_i désigne l'événement "X est divisible par p_i".

(a) Soit A l'événement : "X est premier avec n" ; exprimer $P(A)$ à l'aide de n et de $\phi(n)$.

(b) Montrer que $P(A_i) = \dfrac{1}{p_i}$ pour tout entier i, $1 \leq i \leq k$.

(c) Montrer que les $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont mutuellement indépendants.

(d) Exprimer A à l'aide des $\overline{A}_i$.

(e) En déduire que $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right) \quad (E)$.

4. On se propose de retrouver l'égalité précédente (E) par une autre méthode : soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux ; On considère l'application :

$$h : \begin{cases} S_{pq} & \rightarrow & \{0, ..., p-1\} \times \{0, ..., q-1\} \\ r & \mapsto & (a, b) \end{cases}$$

où a (resp. b) est le reste de la division de r par p (resp. q).

(a) Montrer que $h(S_{pq})$ est inclus dans $S_p \times S_q$.

(b) Montrer que h est injective.

(c) Justifier l'existence de deux entiers α et β de $\mathbb{Z}$ tels que : $\alpha p + \beta q = 1$.
Soit (a, b) un couple de $S_p \times S_q$. On note $x = \alpha p b + \beta q a$.
Montrer que $x = a \bmod p$ et que $x = b \bmod q$. En déduire que l'image de h est $S_p \times S_q$, puis que $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$.

(d) A l'aide d'une récurrence sur le nombre de diviseurs premiers de n, retrouver alors l'égalité (E).

5. Identité d'Euler :

(a) Soit d un diviseur de n et a un entier naturel non nul ; montrer que $\operatorname{pgcd}(a, n) = d$ si, et seulement si, il existe un entier k premier avec $\dfrac{n}{d}$ tel que $a = kd$. En déduire le nombre des entiers a tels que $1 \leq a \leq n$ et $\operatorname{pgcd}(a, n) = d$.

(b) Pour tout diviseur d de n, on note C_d l'événement "$\operatorname{pgcd}(X, n) = d$". Exprimer $P(C_d)$ à l'aide de n, d et de la fonction ϕ.

(c) En déduire que $\sum\limits_{d \in D_n} \dfrac{1}{n} \phi\left(\dfrac{n}{d}\right) = 1$ (rappel : D_n note l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$).

(d) Montrer que l'application u qui, à tout diviseur d de n associe $u(d) = \dfrac{n}{d}$, est une bijection de D_n dans lui-même. Montrer que $\sum\limits_{d \in D_n} \phi(d) = n$ (identité d'Euler).

Partie II

n étant toujours un entier supérieur ou égal à 2, l'objet de cette partie est l'étude du groupe noté $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$ des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication.

On rappelle que cet ensemble est composé des classes modulo n des nombres premiers avec n. On pourra donc remarquer que $\phi(n) = \mathrm{card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$.
La classe d'un entier a sera notée $\dot{a}$.

A) Des résultats généraux sur les groupes et les anneaux

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ et n un entier naturel non nul. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. Donner le quotient de $b^n - a^n$ par $b - a$ sous forme de somme.

2. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si, et seulement si, n est premier.

3. Factorisation de polynômes.

(a) Soit P un polynôme de degré k supérieur ou égal à 1, à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est un entier premier. Montrer que P admet au plus k racines (on pourra raisonner par récurrence sur k).

(b) Déterminer, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, les racines du polynôme $P(X) = X^2 - X$. Que peut-on en conclure ?

(c) Trouver, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$, deux factorisations distinctes de $X^2 - X$ sous la forme d'un produit $(X - \dot{a})(X - \dot{b})$.

4. On rappelle que si x est élément d'un groupe fini G, l'ordre de x est le plus petit entier naturel k non nul tel que $x^k = 1$, où 1 désigne l'élément neutre de G.

(a) Soit x un élément de G, groupe fini de cardinal n ; montrer que, si k est l'ordre de x, alors l'ensemble $\{1, x, ..., x^{k-1}\}$ est un sous-groupe de G. En déduire que l'ordre de x divise le cardinal de G, et que $x^n = 1$.

(b) Si p est un entier naturel premier et x un entier naturel non divisible par p, montrer que $x^{p-1} - 1$ est divisible par p.

B) Etude du groupe $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$ quand n est premier

On suppose dans cette sous-partie que n est un entier premier supérieur ou égal à 3. Si d est un entier naturel non nul et strictement inférieur à n, on note $\zeta(d)$ le nombre des éléments de $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$ d'ordre d.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{d \in D_{n-1}} \zeta(d) = n - 1$.

2. Soit d un diviseur de $n-1$ et soit $\dot{a}$ un élément de $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$ d'ordre d, s'il existe. $\dot{a}$ vérifie ainsi $\dot{a}^d = \dot{1}$.

(a) Montrer que l'ensemble des racines du polynôme $X^d - \dot{1}$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est égal à l'ensemble $\{\dot{1}, \dot{a}, \dot{a}^2, \dot{a}^3, ..., \dot{a}^{d-1}\}$.

(b) On suppose que k est un entier naturel inférieur ou égal à d, non premier avec d. Montrer que $\dot{a}^k$ a un ordre strictement inférieur à d.

(c) En déduire que $\zeta(d) \leq \phi(d)$.

Déduire des questions précédentes et de la première partie que $\zeta(d) = \phi(d)$ pour tout diviseur d de $n-1$. Montrer en particulier qu'il existe au moins un élément $\dot{b}$ d'ordre $n-1$ dans $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$ et que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\dot{1}, \dot{b}, \dot{b}^2, ..., \dot{b}^{n-2}\}$.

C) Cas $n = p^\alpha$

On suppose maintenant que n s'écrit sous la forme $n = p^\alpha$, où p est un entier premier, et α un entier naturel supérieur ou égal à 2.
D'après la partie II B), il existe donc un entier b, dont la classe $\dot{b}$ est d'ordre $p-1$ dans $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$.

1. Montrer que l'un au moins des deux entiers b^{p-1} ou $(b+p)^{p-1}$ n'est pas congru à 1 modulo p^2 ; on notera c l'un des nombres b ou $b+p$ de façon à ce que c^{p-1} ne soit pas congru à 1 modulo p^2.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel r, il existe un entier k_r premier avec p tel que $c^{p^r(p-1)} = 1 + k_r \times p^{r+1}$. En déduire que $\dot{c}$ appartient à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

3. Soit r l'ordre de $\dot{c}$ dans $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$.

(a) Expliquer pourquoi r divise $p^{\alpha-1}(p-1)$ et pourquoi $(p-1)$ divise r.

(b) En déduire qu'il existe un entier naturel β inférieur ou égal à $\alpha-1$ tel que $r = p^\beta(p-1)$.

(c) Montrer finalement que $\beta = \alpha - 1$ et que $\dot{c}$ est un générateur de $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$.

4. Application : Déterminer un générateur de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*,\times)$ puis un générateur de $((\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^*,\times)$.

Partie III

Nombres pseudo-premiers forts

Dans toute cette partie p est un entier impair ≥ 3, et on note $(p-1) = q \times 2^s$, où q est un entier naturel impair et s un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Dans cette question, on suppose p premier.

(a) Soit a un entier premier avec p. Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}}$ est congru à 1 ou à $p-1$ modulo p.

(b) On dit qu'un entier naturel a vérifie la propriété $H_a(p)$ si :

$$(a^q = 1 \bmod p) \text{ ou } (\exists r \text{ entier}, 0 \leq r < s \text{ tel que } a^{q\times 2^r} = p-1 \bmod p) \quad H_a(p)$$

Montrer que tout entier naturel a premier avec p vérifie $H_a(p)$.

2. On dit qu'un nombre p impair, non nécessairement premier, est pseudo-premier fort en base a si la propriété $H_a(p)$ est vérifiée ; on écrira en abrégé que p est a-ppf.
Par exemple, 25 est 7-ppf car $24 = 3*2^3$ et $7^6 = 117649 \equiv 24 \equiv -1 \bmod 25$.
Montrer que si a est un entier tel que le pgcd de a et p est strictement plus grand que 1, alors p ne peut pas être a-ppf.

3. Construction d'un algorithme :

(a) Un entier p impair et un entier a étant donnés, écrire un algorithme permettant de tester si p est a-ppf.

N.B. : On ne cherchera pas à écrire, pour le calcul de a^q modulo p un algorithme rapide de puissance, mais on pourra se contenter d'une boucle calculant a^2 modulo p, a^3 modulo p,......, a^q modulo p.

Vous retranscrirez cet algorithme sur votre copie en langage algorithmique (français) ou dans le langage de votre machine, en spécifiant le modèle que vous employez.

Implanter cet algorithme sur votre machine ; on peut le tester en contrôlant que tout nombre p premier est a-ppf pour tout a premier avec p.

(b) Reportez le tableau suivant sur votre copie et complétez les cases vides par « oui » ou « non » à l'aide du programme précédent.

p	49	91	111	121	135	1225
a	30	74	28	94	43	999
p est a-ppf						

(c) On peut vérifier (la vérification n'est pas demandée) que l'ensemble des entiers a, compris au sens large entre 1 et 560 tels que 561 soit a-ppf est $\{1, 50, 101, 103, 256, 305, 458, 460, 511, 560\}$.
Montrer que l'ensemble des classes modulo 561 de ces entiers constitue un sous-groupe cyclique de $((\mathbb{Z}/561\mathbb{Z})^*, \times)$.

Partie IV

A) Nombres de Carmichaël

L'objet de cette partie est la caractérisation de certains nombres, appelés nombres de Carmichaël. On rappelle que pour tout entier naturel premir p, et tout a entier premier avec p, $a^{p-1} = 1 \bmod p$.

La réciproque n'est pas vraie ; un nombre n est appelé nombre de Carmichaël si :

a) n n'est pas premier

b) pour tout nombre a premier avec n, a^{n-1} est congru à 1 modulo n.

1. Montrer que si $n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ où p_1, p_2, ..., p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts tels que $(p_i - 1)$ divise $(n - 1)$ pour tout i de $\{1, 2, ..., k\}$, alors n est un nombre de Carmichaël.
Montrer en particulier que 561, 10585 sont des nombres de Carmichaël.

2. Dans toute cette question, on suppose que n est un nombre de Carmichaël et l'on désire établir la réciproque du résultat obtenu en question 1.

(a) On suppose tout d'abord que n est une puissance de 2, $n = 2^\alpha$, où α est un entier ≥ 2. Quel est le cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$? En déduire que pour tout entier a impair $a^{(2^\alpha - 1)}$ ne peut être congru à 1 modulo n sauf si a est congru à 1 modulo n ; que peut-on conclure ?

(b) On suppose désormais que n admet au moins un facteur premier impair p_i et l'on note p_1, p_2, ..., p_k les facteurs premiers de n ; la décomposition de n est alors $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

(i) Soit ω un entier dont la classe modulo $p_1^{\alpha_1}$ est un générateur du groupe $((\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z})^*, \times)$; ω existe d'après la partie II. A l'aide de la bijection définie dans la question I.4, montrer qu'on peut trouver un entier t, tel que :

$$t \equiv \omega \bmod p_1^{\alpha_1} \text{ et, pour tout } i \text{ (s'il en existe) tel que } 2 \leq i < k,\ t \equiv 1 \bmod p_i^{\alpha_i}.$$

Montrer qu'alors $t^{n-1} \equiv 1 \bmod n$.

(ii) En déduire que $p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)$ divise $(n - 1)$, puis que $\alpha_1 = 1$, et enfin que $(p_1 - 1)$ divise $(n - 1)$.

(iii) Montrer que l'entier n est nécessairement impair et que n peut s'écrire sous la forme $n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ où p_1, p_2, ..., p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts tels que $(p_i - 1)$ divise $(n-1)$ pour tout i de $\{1, 2, ..., k\}$. Conclure.

3. Montrer qu'un nombre de Carmichaël admet au moins trois facteurs premiers.

4. Résoudre l'équation $85p - 16k = 1$, où (k, p) appartient à $\mathbb{Z}^2$. Déterminer le plus petit nombre de Carmichaël divisible par 5 et 17.

B) Le test de Miller-Rabin

1. Soit n un nombre non premier et qui ne soit pas non plus un nombre de Carmichaël. Montrer qu'il existe au moins un entier a inférieur à n et premier avec n tel que n ne soit pas a-ppf.

2. En fait, on peut démontrer et l'on admettra que, pour tout nombre n non premier, l'ensemble des classes des entiers naturels a strictement inférieurs à n tels que n soit a-ppf est inclus dans un sous-groupe strict de $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$. Le test de Miller-Rabin est alors le suivant : étant donnés un nombre impair n et un entier k, on effectue k épreuves indépendantes ; l'épreuve n°i ($i = 1$, ..., k) consistant à choisir un entier a_i de manière équiprobable parmi $\{1, 2, 3, ..., n-1\}$ et à tester la propriété "n est a_i-ppf".

- Si, pour l'un des a_i, n n'est pas a_i-ppf, n est composé.
- Si n est pseudo-premier fort pour tous les a_i, alors n est déclaré premier.

On suppose que n est composé (c'est-à-dire non premier) ; par quelle valeur (en fonction de k), peut-on majorer la probabilité de déclarer n premier ?

12.2 Corrigé

PARTIE I

De façon générale, si n et m sont des entiers relatifs non nuls tels que $n \leq m$, je noterai $[n..m]$ l'ensemble $\{n, n+1, ..., m\}$. Le cardinal d'un ensemble fini F sera noté $|F|$.

I.1.a. Notons $\mathrm{p}(A_1/A_2)$ la probabilité de l'événement A_1 sachant que l'événement A_2 est réalisé.(c'est la probabilité conditionnelle de A_1 si A_2). Par définition, les événements A_1 et A_2 sont dits *indépendants en probabilité* si $\mathrm{p}(A_1/A_2) = \mathrm{p}(A_1)$. Comme :

$$\mathrm{p}(A_1/A_2) = \frac{\mathrm{p}(A_1 \cap A_2)}{\mathrm{p}(A_2)},$$

les événements A_1 et A_2 seront indépendants si et seulement si :

$$\mathrm{p}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{p}(A_1) \times \mathrm{p}(A_2).$$

[0] [ag57s] v1.02

Si A_1 et A_2 sont indépendants, et puisque $\left\{\overline{A_1} \cap A_2, A_1 \cap A_2\right\}$ est une partition de A_2,

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{p}\left(A_2\right) = \mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) + \mathrm{p}\left(A_1 \cap A_2\right)\right) &\Rightarrow \mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = \mathrm{p}\left(A_2\right)\left(1 - \mathrm{p}\left(A_1\right)\right) \\ &\Rightarrow \mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = \mathrm{p}\left(\overline{A_1}\right).\mathrm{p}\left(A_2\right)\end{aligned}$$

donc $\overline{A_1}$ et A_2 sont indépendants.

I.1.b. *Rappels :* les événements A_1, A_2, ..., A_k sont dit *mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble $\{i_1, ..., i_p\}$ de $[1..k]$,

$$\mathrm{p}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}\right) = \mathrm{p}\left(A_{i_1}\right) \times \mathrm{p}\left(A_{i_2}\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_{i_p}\right).$$

Si les seules conditions $\mathrm{p}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) = \mathrm{p}\left(A_{i_1}\right) \times \mathrm{p}\left(A_{i_2}\right)$ sont vérifiées pour toute paire $\{i_1, i_2\}$ de $[1..k]$, on dit que les événements A_1, A_2, ..., A_k sont *indépendants deux à deux.*

(i) On va démontrer la propriété :

$$\mathcal{P}(i): \quad \overline{A_1},\ A_2,\ ...,\ A_i \text{ sont mutuellement indépendants}$$

par récurrence finie sur i, pour i variant de 2 à k. On a déjà prouvé que $\mathcal{P}(2)$ était vraie (**I.1.a**). Si $\mathcal{P}(i-1)$ est vraie, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathrm{p}\left(A_2 \cap ... \cap A_i\right) = \mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right) + \mathrm{p}\left(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right).$$

En appliquant l'hypothèse récurrente et en rappelant que A_1, A_2, ..., A_k sont indépendants, on obtient :

$$\mathrm{p}\left(A_2\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right) = \mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right) + \mathrm{p}\left(A_1\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right) &= \left(1 - \mathrm{p}\left(A_1\right)\right) \times \mathrm{p}\left(A_2\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right) \\ &= \mathrm{p}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathrm{p}\left(A_2\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right).\end{aligned}$$

Cela prouve la mutuelle indépendance des événements $\overline{A}_1$, A_2, ..., A_i et démontre $\mathcal{P}(i)$.

(ii) Montrons la propriété :

$$\mathcal{H}(i): \quad \overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ ...,\ \overline{A}_i,\ A_{i+1},\ ...,\ A_k \text{ sont mutuellement indépendants}$$

par récurrence finie sur i, pour i variant de 1 à k. La propriété $\mathcal{H}(1)$ est vraie puisque :

$$A_1, ..., A_k \text{ mut. indépendants } \Rightarrow \overline{A}_1, ..., A_k \text{ mut. indépendants}$$

d'après (**I.1.b.(i)**). Si $\mathcal{H}(i-1)$ est vraie, les événements $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_{i-1}$, A_i, ..., A_k sont mutuellement indépendants et (**I.1.b.(i)**) montre que les événements $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_{i-1}$, $\overline{A}_i$, A_{i+1}, ..., A_k le sont encore, donc prouve $\mathcal{H}(i)$.

Remarque — Une démonstration directe de $\mathcal{H}(2)$ peut être donnée sans que l'on ait à utiliser (**I.1.b.(i)**), mais n'est pas utile ici. En effet, si A_1 et A_2 sont indépendants,

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) &= \mathrm{p}\left(\overline{A_1 \cup A_2}\right) = 1 - \mathrm{p}(A_1 \cup A_2) \\
&= 1 - \mathrm{p}(A_1) - \mathrm{p}(A_2) + \mathrm{p}(A_1 \cap A_2) \\
&= 1 - \mathrm{p}(A_1) - \mathrm{p}(A_2) + \mathrm{p}(A_1)\,\mathrm{p}(A_2) \\
&= \mathrm{p}\left(\overline{A_1}\right).\mathrm{p}\left(\overline{A_2}\right).
\end{aligned}$$

I.2.a. Il y a 50 multiples de 2 dans [1..100] puisque $1 \leq 2t \leq 100$ équivaut à $1 \leq t \leq 50$. Donc :

$$\mathrm{p}(\text{"}X \text{ multiple de 2"}) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Il a 20 multiples de 5 dans [1..100], donc :

$$\mathrm{p}(\text{"}X \text{ multiple de 5"}) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Puisque 2 et 5 sont premiers entre eux, un nombre sera multiple commun de 2 et 5 si et seulement si c'est un multiple de 10, et l'on dénombre 10 multiples de 10 dans [1..100]. Ainsi :

$$\mathrm{p}((\text{"}X \text{ multiple de 2"}) \cap (\text{"}X \text{ multiple de 5"})) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

Les événements A_1 et A_2 sont bien indépendants en probabilité puisque :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{p}((\text{"}X \text{ multiple de 2"}) \cap (\text{"}X \text{ multiple de 5"})) \\
&\qquad = \mathrm{p}(\text{"}X \text{ multiple de 2"}) \times \mathrm{p}(\text{"}X \text{ multiple de 5"}).
\end{aligned}$$

I.2.b. On recommence les calculs de (**I.2.a**) avec $n = 101$. On obtient :

$$\mathrm{p}(\text{"}X \text{ multiple de 2"}) = \frac{50}{101}, \quad \mathrm{p}(\text{"}X \text{ multiple de 5"}) = \frac{20}{101}$$

et :

$$\mathrm{p}\left((\text{"}X \text{ multiple de } 2\text{"}) \cap (\text{"}X \text{ multiple de } 5\text{"})\right) = \frac{10}{101}.$$

Cette fois-ci $\frac{50}{101} \times \frac{20}{101} = \frac{1000}{10\,201} \neq \frac{10}{101}$, donc A_1 et A_2 ne sont plus indépendants en probabilités.

I.3.a. $A = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \text{ est premier avec } n\}$ donc :

$$\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(\text{"}X \text{ est premier avec } n\text{"}) = \frac{|S_n|}{n} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

où nous avons préféré noter $\varphi(n)$ (au lieu de $\phi(n)$ de l'énoncé) la valeur en n de la fonction indicatrice d'Euler (i.e. le cardinal de S_n).

I.3.b. On a :

$$\mathrm{p}(A_i) = \frac{|\{x \in [1..n] \,/\, p_i | x\}|}{n}.$$

Si t est un entier, l'équivalence :

$$1 \leq tp_i \leq n = p_1^{\alpha_1} ... p_i^{\alpha_i} ... p_k^{\alpha_k} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq p_1^{\alpha_1} ... p_i^{\alpha_i - 1} ... p_k^{\alpha_k}$$

montre qu'il existe exactement $p_1^{\alpha_1} ... p_i^{\alpha_i - 1} ... p_k^{\alpha_k} = \frac{n}{p_i}$ multiples de p_i dans $[1..n]$, autrement dit que $|\{x \in [1..n] \,/\, p_i | x\}| = \frac{n}{p_i}$ et l'on déduit $\mathrm{p}(A_i) = \frac{1}{p_i}$.

I.3.c. Si $\{i_1, ..., i_p\}$ est une partie quelconque de $[1..k]$, $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}$ est formé des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ soit divisible par chacun des p_{i_1}, ..., p_{i_p}. Puisque X prend des valeurs équiprobables, on a toujours :

$$\mathrm{p}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}\right) = \frac{\left|\left\{x \in [1..n] \,/\, p_{i_1}|x,\, p_{i_2}|x,\, ...,\, p_{i_p}|x\right\}\right|}{n}.$$

Puisque les p_i sont premiers et distincts entre eux,

$$p_{i_1}|x,\, ...,\, p_{i_p}|x \Leftrightarrow p_{i_1} ... p_{i_p} | x.$$

Par ailleurs $1 \leq p_{i_1} ... p_{i_p} t \leq n$ équivaut à $1 \leq t \leq \frac{n}{p_{i_1} ... p_{i_p}}$, donc il existe exactement $\frac{n}{p_{i_1} ... p_{i_p}}$ multiples de $p_{i_1} ... p_{i_p}$ dans $[1..n]$. Par suite :

$$\mathrm{p}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}\right) = \frac{\left|\left\{x \in [1..n] \,/\, p_{i_1} ... p_{i_p} | x\right\}\right|}{n} = \frac{\frac{n}{p_{i_1} ... p_{i_p}}}{n} = \frac{1}{p_{i_1} ... p_{i_p}},$$

ou encore :

$$\mathrm{p}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}\right) = \mathrm{p}(A_{i_1}) \times \mathrm{p}(A_{i_2}) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_{i_p}\right)$$

si l'on applique (**I.3.b**). Cela montre que les événements A_1, A_2, ..., A_k sont mutuellement indépendants.

I.3.d. Un entier x est premier avec n si et seulement si aucun des p_i (avec $i \in [1..k]$) ne divise x. Ainsi $A = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_k$.

I.3.e. D'après (**I.1.b.ii**) et (**I.3.c**), les événements $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_k$ sont mutuellement indépendants, donc :

$$\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_k\right) = \mathrm{p}\left(\overline{A}_1\right) \times \mathrm{p}\left(\overline{A}_2\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(\overline{A}_k\right),$$

puis :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{p}(A_i)) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Cela nous offre effectivement l'expression classique de la fonction indicatrice d'Euler :

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \qquad (E)$$

I.4.a. Par définition,

$$\begin{array}{rccc} h: & S_{pq} & \to & [0..p-1] \times [0..q-1] \\ & r & \mapsto & (a,b) \end{array}$$

où $r = pu + a$ $(0 \leq a < p)$ et $r = qv + b$ $(0 \leq b < q)$. Nécessairement $a \in S_p$, sinon p et a ne seraient pas premiers entre eux, et il existerait un diviseur $d > 1$ commun à p et a. Alors d diviserait simultanément $r = pu + a$ et pq, ce qui est absurde puisque r et pq sont premiers entre eux. On montrerait de la même façon que b appartient à S_q. En conclusion $h(r) \in S_p \times S_q$.

I.4.b. L'égalité $h(r) = h(s)$ équivaut à :

$$\begin{cases} r \equiv s \ (p) \\ r \equiv s \ (q). \end{cases}$$

Cela revient à dire que les deux nombres premiers p et q divisent simultanément $r - s$. Puisque p et q sont premiers entre eux, le produit pq divisera[1] $r - s$, et

[1] Redémontrer cette propriété en utilisant le Théorème de Gauss...

puisque $|r - s| \leq pq - 1$, on déduit[2] $r = s$. On a prouvé l'implication :

$$h(r) = h(s) \Rightarrow r = s,$$

c'est-à-dire dire l'injectivité de h.

I.4.c. Par hypothèse, p et q sont premiers entre eux et le Théorème de Bezout montre l'existence de deux entiers relatifs α et β tels que $\alpha p + \beta q = 1$. Si $(a, b) \in S_p \times S_q$ et si $x = \alpha pb + \beta qa$, alors :

$$x \equiv \beta qa \equiv (1 - \alpha p)\, a \equiv a \ (p) \quad \text{et} \quad x \equiv \alpha pb \equiv (1 - \beta q)\, b \equiv b \ (q)\,.$$

Si r désigne le reste de la division de x par pq, on obtient $x = pqu + r$ et en remplaçant dans les deux congruences précédentes, $r \equiv a \ (p)$ et $r \equiv b \ (q)$. Ainsi :

$$\forall\, (a, b) \in S_p \times S_q \quad \exists r \in S_{pq} \quad h(r) = (a, b)$$

et h est surjective.

Cette question et la précédente montrent que $h : S_{pq} \to S_p \times S_q$ est bijective, de sorte que $|S_{pq}| = |S_p \times S_q| = |S_p| \times |S_q|$, ce qui se traduit par :

$$\varphi(pq) = \varphi(p)\, \varphi(q)\,.$$

I.4.d. La formule (E) est vraie si n possède un unique diviseur premier. En effet, pour calculer $\varphi(p_1^{\alpha_1})$, on compte le nombre d'entiers de $[1..p_1^{\alpha_1}]$ qui ne sont pas premiers avec $p_1^{\alpha_1}$, autrement dit qui sont divisibles par p_1. Puisque :

$$1 \leq tp_i \leq p_1^{\alpha_1} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq p_1^{\alpha_1 - 1},$$

on en trouve $p_1^{\alpha_1 - 1}$. Et cela entraîne :

$$\varphi(p_1^{\alpha_1}) = \left| S_{p_1^{\alpha_1}} \right| = p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1} = p_1^{\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

Supposons que la formule (E) soit vraie pour tout n dont la décomposition en produit de facteurs premiers utilise moins de k entiers premiers, et considérons un entier n de décomposition $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.

---

[2] Vérifions l'affirmation "si n divise x et $|x| < n$ alors x est nul" dans le détail, ce qui permettra de répondre à des questions plus précises que l'on poserait à l'oral... Si n divise x, alors n divise $|x|$ et l'on fait un petit raisonnement pas l'absurde : si x n'était pas nul, n divise $|x|$ entraîne $n \leq |x|$ (le vérifier in extenso !) en contradiction avec l'hypothèse $|x| < n$. Ouf, cela va mieux en le disant, et c'est ainsi qu'on approfondit ses connaissances... pour répondre à l'oral.

D'après (**I.4.c**), $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}\right)\varphi\left(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\right)$ et l'hypothèse récurrente permet d'écrire :

$$\varphi(n) = \left[\left(p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}\right)\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right]\times\varphi\left(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\right) = n\prod_{i=1}^{k+1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

I.5.a.

$$\begin{aligned}(\mathrm{pgcd}\,(a,n)=d) &\Leftrightarrow \begin{cases} d|a \\ \mathrm{pgcd}\left(\frac{a}{d},\frac{n}{d}\right)=1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}\quad a=kd \\ \mathrm{pgcd}\left(k,\frac{n}{d}\right)=1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists k \text{ premier avec } \frac{n}{d} \text{ tel que } a=kd.\end{aligned}$$

Le nombre d'entiers a de $[1..n]$ tels que $\mathrm{pgcd}\,(a,n) = d$ sera donc égal au nombre d'entiers k premiers avec n/d et vérifiant $1 \leq kd \leq n$.

Puisque $1 \leq kd \leq n$ équivaut à $1 \leq k \leq n/d$, le nombre cherché sera $\varphi(n/d)$. En conclusion :

$$|\{a\in[1..n]\ /\ \mathrm{pgcd}\,(a,n)=d\}| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

I.5.b. Bien sûr :

$$\mathrm{p}(C_d) = \frac{|\{a\in[1..n]\ /\ \mathrm{pgcd}\,(a,n)=d\}|}{n} = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

I.5.c. La partition $[1..n] = \bigcup_{d|n} C_d$ permet d'écrire $\mathrm{p}(\Omega) = \sum_{d|n}\mathrm{p}(C_d)$, ou encore :

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Remarque spéciale "concours" — Seulement si l'on ne sait plus quoi résoudre dans le problème (pendant les 5 heures de l'épreuve), et tout simplement parce que l'on subodore que donner ce type de détails (important néanmoins) rapportera moins de points que si l'on répond à une question supplémentaire du problème, on peut démontrer très précisément ce qui est rapidement admis ici, autrement dit le fait que $\{C_d\}_{d|n}$ est une partition de $[1..n]$. Cela permet au moins de prouver au correcteur que l'on connaît la définition précise (en trois points !) d'une partition.

Tout d'abord, aucun des ensembles C_d n'est vide puisque, un diviseur d de n étant donné, il existe toujours au moins un $a \in [1..n]$ tel que $\mathrm{pgcd}\,(a,n) = d$. Il suffit de choisir $a = d$! Ensuite les ensembles C_d sont disjoints deux à deux.

En effet, s'il existait un élément a dans $C_d \cap C_{d'}$, alors $\mathrm{pgcd}\,(a,n) = d = d'$ et $d = d'$. Pour finir, n'importe quel élément a de $[1..n]$ appartient à l'un des ensembles C_d puisque $\mathrm{pgcd}\,(a,n)$ est forcément un diviseur de n.

Par cette remarque, je voudrais faire réfléchir sur la stratégie à adopter le jour du concours : le candidat a intérêt à choisir systématiquement la réponse qui semblera lui rapporter le maximum de points - comme dans un jeu vidéo - ou ce qui revient au même, les développements qui dévoilent le mieux toutes ses connaissances au correcteur... Par simple application de cette règle, vous saurez quoi traiter, quoi développer et quoi "sauter".

I.5.d. L'application :

$$u : \begin{array}{ccc} D_n & \rightarrow & D_n \\ d & \mapsto & \frac{n}{d} \end{array}$$

est bien définie (puisque $n = dq$ avec $q = n/d \in \mathbb{Z}$ montre aussi que n/d divise n) et injective (puisque $n/d = n/d'$ entraîne $d = d'$), donc nécessairement surjective (puisque u est une application entre deux ensembles de mêmes cardinaux). C'est donc une bijection, et dans la somme du (**I.5.c**), n/d décrit tous les diviseurs de n lorsque d décrit ces mêmes diviseurs. Par un changement d'indexation, on trouve bien $1 = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)$ soit :

$$\sum_{d|n}\varphi(d) = n.$$

PARTIE II

II.A.1. On connaît l'identité remarquable :

$$(b^n - a^n) = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + ... + a^{n-1}\right).$$

Pour la prouver, on peut par exemple écrire :

$$\begin{aligned}(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\left(b^{n-1-k}a^k\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(b^{n-k}a^k - b^{n-1-k}a^{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-k}a^k - \sum_{k'=1}^{n} b^{n-k'}a^{k'} \\ &= b^n - a^n + \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-k}a^k - \sum_{k'=0}^{n-1} b^{n-k'}a^{k'} = b^n - a^n.\end{aligned}$$

II.A.2. Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps, et si $n = ab$, alors $\dot{a}.\dot{b} = \dot{0}$ et l'intégrité de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donne $\dot{a} = \dot{0}$ ou $\dot{b} = \dot{0}$. Si, par exemple, $\dot{a} = \dot{0}$, alors $a = na'$ et $n = na'b$, donc $a'b = 1$ puis $b = \pm 1$. Les seuls diviseurs de n sont donc ± 1 et $\pm n$, et cela signifie que n est premier. Réciproquement, si n est premier, et si $\dot{a}$ est un élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut supposer $1 \leq a \leq n-1$. Le nombre premier n est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas, donc avec a, et le Théorème de Bezout montre l'existence de deux entiers relatifs u, v tels que $un + va = 1$. On en déduit $\dot{v}.\dot{a} = \dot{1}$, et l'on a prouvé que tout élément non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ était inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Autrement dit que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

II.A.3.a. n est premier donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps commutatif fini. Un polynô-me de degré $k = 1$ s'écrit $P(X) = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $a \neq 0$. Puisque $a \neq 0$ on aura :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a},$$

et $P(x)$ n'admettra qu'une seule racine (notons que l'expression $-\frac{b}{a}$ représente l'opposé de ba^{-1}, et que l'inverse a^{-1} est bien définie puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps).

Supposons que tout polynôme de degré $\leq k$ admette au plus k racines, et montrons que la propriété est encore vraie pour tout polynôme $P(X)$ de degré $k+1$. Si $P(X)$ ne possède aucune racine, la propriété est triviale. Si $P(X)$ possède au moins une racine a, $P(a) = 0$.

Dans ce cas, et en notant $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$,

$$P(x) = P(x) - P(a) = \sum_{i=0}^{d} a_i \left(x^i - a^i\right)$$

et (**II.A.1**) permet d'écrire :

$$P(x) = (x - a) \times Q(x) \quad \text{avec } Q(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i \left(x^{n-1} + x^{n-2}a + ... + a^{n-1}\right).$$

L'hypothèse récurrente montre que $Q(X)$ possède au plus k racines. Puisque les seules racines possibles de $P(X)$ sont a et celles de $Q(X)$ (on utilise ici l'intégrité de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), on constate que $P(X)$ possède moins de $k+1$ racines, et la propriété est démontrée au rang $k+1$.

Remarque — Le résultat reste vrai (et avec la même démonstration) pour des polynômes à coefficients dans n'importe quel anneau intègre.

II.A.3.b. L'expression $P(X) = X(X-1)$ montre que 0 et 1 sont racines de $P(X)$, mais ne donne aucune indication sur les autres racines possibles puisque $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas un corps (en en particulier n'est pas intègre). Le tableau :

x	0	1	2	3	-2	-1
x^2-x	0	0	2	0	0	2

montre que $X^2 - X$ admet 4 racines dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ce qui est un exploit et prouve que l'hypothèse "n premier" est cruciale dans l'énoncé de la propriété (**II.A.3.a**).

II.A.3.c. Puisque $2 \times 3 = 0$, $P(X) = X(X-1) = (X+2)(X-3)$.

II.A.4.a. • L'ensemble $\Lambda = \left\{1, x, ..., x^k\right\}$ est un sous-groupe de G car :

a) il n'est pas vide (il contient 1),

b) Si x^s et x^l sont deux éléments quelconques de Λ (avec $s, l \in [1..k]$), et si r désigne le reste de la division euclidienne de $s-l$ par k, il existe un entier q tel que $s - l = kq + r$, et :

$$x^s \left(x^l\right)^{-1} = x^{s-l} = \left(x^k\right)^q x^r = x^r \in \Lambda$$

(puisque $r \in [1..k]$).

• Le cardinal du sous-groupe Λ divise le cardinal n de G d'après le Théorème de Lagrange. On pourra donc affirmer que k divise n si l'on vérifie que le cardinal de Λ est k. Pour cela, on vérifie l'implication :

$$\forall s, l \in [1..k] \quad x^s = x^l \Rightarrow s = l.$$

Si $x^s = x^l$, alors $x^{|s-l|} = 1$. Si l'on avait $s \neq l$, on aurait $0 < |s-l| \leq k-1$ en contradiction avec la définition de k, donc $s = l$.

• Il existe donc q tel que $n = qk$, et $x^n = \left(x^k\right)^q = 1$.

Remarque — On a supposé connu le Théorème de Lagrange (« l'ordre d'un sous-groupe Λ divise l'ordre du groupe »). Pour démontrer ce Théorème, il suffit de noter $G/\Lambda = \{\Lambda, x_1\Lambda, ..., x_m\Lambda\}$ le groupe-quotient de G par Λ, puis de constater que

- la famille $\{\Lambda, x_1\Lambda, ..., x_m\Lambda\}$ est une partition de G,

- $|x_i\Lambda| = |\Lambda|$ pour tout i puisque l'application $\Lambda \to x_i\Lambda\,;\, x \mapsto x_i x$ est une bijection.

II.A.4.b. Si x n'est pas divisible par p, alors x est premier avec p, et sa classe $\dot{x}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc $\dot{x} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Puisque p est premier,

$|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = \varphi(p) = p-1$ et (**II.A.4.a**) donne $\dot{x}^{p-1} = 1$, autrement dit $x^{p-1}-1$ est divisible par p. On vient de prouver le petit Théorème de Fermat.

II.B.1. Notons Γ_d l'ensemble des éléments d'ordre d dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Tout élément x de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ possède un ordre d qui est un diviseur de $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = n-1$, donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \subset \bigcup_{d|n-1} \Gamma_d$. Comme l'inclusion inverse est triviale, on a :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \bigcup_{d|n-1} \Gamma_d$$

et l'on note que deux parties Γ_d et $\Gamma_{d'}$ sont toujours disjointes dès que $d \neq d'$ (en effet, un élément ne peut avoir qu'un seul ordre !). La famille $\{\Gamma_d\}_{d|n-1}$ est donc presque une partition de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$: la réunion de toutes les parties est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, les parties Γ_d sont disjointes deux à deux, mais malheureusement certaines parties Γ_d peuvent être vides. Cela suffit néanmoins pour déduire $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \sum_{d|n-1} \zeta(d)$, c'est-à-dire :

$$n-1 = \sum_{d|n-1} \zeta(d).$$

II.B.2.a. Les d éléments $\dot{1}$, $\dot{a}$, $\dot{a}^2$, ..., $\dot{a}^{d-1}$ sont distincts, et sont racines de $X^d - \dot{1}$ puisque :

$$(\dot{a}^k)^d = (\dot{a}^d)^k = \dot{1}^k = \dot{1}$$

pour tout entier k. Puisque le polynôme $X^d - \dot{1}$, de degré d, possède moins de d racines dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (**II.A.3.a**), toutes ses racines seront celles déjà exhibées ci-dessus.

II.B.2.b. Par hypothèse, il existe un entier $t > 1$ et des entiers k' et d' tels que :

$$\begin{cases} k = k't \\ d = d't. \end{cases}$$

Les égalités $(\dot{a}^k)^{d'} = \dot{a}^{k'td'} = (\dot{a}^d)^{k'} = (\dot{1})^{k'} = \dot{1}$ montrent que l'ordre de $\dot{a}^k$ est inférieur ou égal à d', donc strictement inférieur à d puisque $d' < d$.

II.B.2.c. • Les éléments de Γ_d sont des zéros du polynôme $X^d - \dot{1}$, donc appartiennent à $\{\dot{1}, \dot{a}, \dot{a}^2, ..., \dot{a}^{d-1}\}$. Parmi ces $\dot{a}^k$ ($k \in [0..d-1]$), seuls ceux définis à l'aide d'une puissance k première avec d sont susceptibles d'être d'ordre d (**II.B.2.b**). Donc :

$$\Gamma_d \subset \left\{\dot{a}^k \,/\, k \in [0..d-1] \text{ et } k \text{ premier avec } d\right\}$$

et $\zeta(d) \leq \varphi(d)$.

• S'il existait un d tel que $\zeta(d) < \varphi(d)$, l'on aurait :

$$\sum_{d|n-1} \zeta(d) < \sum_{d|n-1} \varphi(d)$$

en contradiction avec (**I.5.d**) et (**II.B.1**) suivant lesquels les deux membres de cette inégalité sont égaux à $n-1$. Ainsi $\zeta(d) = \varphi(d)$ pour tout diviseur d. En particulier $\zeta(n-1) = \varphi(n-1) \geq 1$ et il existe au moins un élément $\dot{b}$ de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ d'ordre $n-1$. La partie $\{\dot{1}, \dot{b}, \dot{b}^2, ..., \dot{b}^{n-2}\}$ est incluse dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ et de cardinal $n-1$, tout comme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\dot{1}, \dot{b}, \dot{b}^2, ..., \dot{b}^{n-2}\}$.

II.C.1. Supposons par l'absurde que $b^{p-1} \equiv 1 \left(p^2\right)$ et $(b+p)^{p-1} \equiv 1 \left(p^2\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}(b+p)^{p-1} \equiv 1 \left(p^2\right) &\Rightarrow b^{p-1} + (p-1)\, b^{p-2}p \equiv 1 \left(p^2\right) \\ &\Rightarrow b^{p-1} - b^{p-2}p \equiv 1 \left(p^2\right).\end{aligned}$$

Puisque $b^{p-1} \equiv 1 \left(p^2\right)$, la dernière congruence donne $b^{p-2}p \equiv 0 \left(p^2\right)$, ou encore $b^{p-2} \equiv 0 \ (p)$, et p divisera b^{p-2}. C'est absurde (si $p \neq 2$, cela entraîne $p|b$, à rejeter, et si $p = 2$, on lit $p|1$, ce qui est aussi à rejeter).

II.C.2. • Montrons la propriété :

$$\mathcal{P}(r) : \quad \exists k_r \in \mathbb{N} \quad k_r \wedge p = 1 \quad c^{p^r(p-1)} = 1 + k_r \times p^{r+1}$$

par récurrence sur r.

α) b est choisi tel que $b^{p-1} \equiv 1 \ (p)$. Si $c = b$, on obtient :

$$c^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \ (p),$$

et si $c = b + p$, on obtient encore $c^{p-1} \equiv (b+p)^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \ (p)$. Dans tous les cas $c^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ et il existe un entier k_0 tel que $c^{p-1} = 1 + k_0 \times p$. De plus k_0 n'est pas divisible par p puisque $c^{p-1} \neq 1 \left(p^2\right)$. On a prouvé $\mathcal{P}(0)$.

β) Si $\mathcal{P}(r)$ est vérifiée, la formule du binôme montre l'existence d'un entier A tel que :

$$c^{p^{r+1}(p-1)} = \left(1 + k_r \times p^{r+1}\right)^p = 1 + p^{r+2}(k_r + pA)$$

d'où $c^{p^{r+1}(p-1)} = 1 + k_{r+1} \times p^{r+2}$ en posant $k_{r+1} = k_r + pA$. Bien entendu, k_{r+1} n'est pas divisible par p autrement k_r le serait aussi. On vient de prouver $\mathcal{P}(r+1)$.

• Vérifier que $\dot{c}$ appartient à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ revient à prouver que c et p sont premiers entre eux, ou encore que p ne divise pas c. Puisque $c = b$ ou $b + p$, supposer que p divise c entraîne que p divise b, ce qui est absurde puisque $\dot{b}$ engendre $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

Remarque — On peut aussi vérifier que $\dot{c}$ appartient à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ en écrivant $\mathcal{P}(\alpha - 1)$: il existe $k_{\alpha-1} \in \mathbb{N}$ tel que $c^{p^{\alpha-1}(p-1)} = 1 + k_{\alpha-1} \times p^\alpha$, ou encore $\dot{c}^{p^{\alpha-1}(p-1)} = \dot{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Comme $p^{\alpha-1}(p-1) > 0$, cela s'écrit :

$$t\dot{c} \times \dot{c}^{p^{\alpha-1}(p-1)-1} = \dot{1}$$

et montre que $\dot{c}$ est inversible d'inverse $\dot{c}^{p^{\alpha-1}(p-1)-1}$.

II.C.3.a. On a besoin du résultat fondamental suivant :

Lemme — Si G est un groupe abélien noté multiplicativement et si x est un élément de G d'ordre fini ω, alors, pour tout entier relatif m, $x^m = 1$ si et seulement si ω divise m.

Preuve du Lemme — Si $x^m = 1$, notons $m = \omega q + w$ la division euclidienne de m par ω. On constate que $x^m = (x^\omega)^q\, x^w = x^w$ donc $x^w = 1$. Comme $0 \leq w < \omega$, la définition même de ω permet d'obtenir $w = 0$, et donc ω divise m. La réciproque est triviale. ■

La remarque de la question précédente nous a donné $\dot{c}^{p^{\alpha-1}(p-1)} = \dot{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et le Lemme montre que r divise $p^{\alpha-1}(p-1)$. D'autre part, $c = b$ ou $c = b + p$. Puisque $c^r = 1\ (p^\alpha)$, on aura toujours $b^r = 1\ (p)$, et le Lemme appliqué à $\dot{b}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ montre que $p - 1$ divise r.

II.C.3.b. Puisque $p - 1$ divise r et r divise $p^{\alpha-1}(p-1)$, l'entier $\frac{r}{p-1}$ divise $p^{\alpha-1}$, et par conséquent la décomposition de $\frac{r}{p-1}$ en produit de facteurs premiers est de la forme p^β où $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$. On obtient bien $r = p^\beta(p-1)$.

II.C.3.c. Si $\beta < \alpha - 1$, $c^{p^\beta(p-1)} = 1\ (p^\alpha)$. Mais $\mathcal{P}(\beta)$ montre qu'il existe $k_\beta \in \mathbb{N}$ tel que $c^{p^\beta(p-1)} = 1 + k_\beta \times p^{\beta+1}$. Il existe donc $t \in \mathbb{N}$ tel que :

$$c^{p^\beta(p-1)} = 1 + p^\alpha t = 1 + k_\beta \times p^{\beta+1}$$

d'où $p^{\alpha-\beta-1}t = k_\beta$ avec $\alpha - \beta - 1 > 0$. C'est impossible puisque p ne divise pas k_β. En conclusion $\beta = \alpha - 1$, $\dot{c}$ est d'ordre :

$$r = p^{\alpha-1}(p-1) = \varphi(p^\alpha) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|,$$

et $\dot{c}$ engendre le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

II.C.4. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \left\{\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5},\dot{6}\right\}$ est engendré par $\dot{3}$ puisque $\dot{3}^2 = \dot{2}$; $\dot{3}^3 = \dot{6}$; $\dot{3}^4 = \dot{4}$; $\dot{3}^5 = \dot{5}$; $\dot{3}^6 = \dot{1}$. Si $c = b + p = 3 + 7 = 10$, alors $c^6 = 10^6 = (100)^3 = 2^3 = 8$ (49) et c^6 n'est pas congru à 1 modulo p^2. Les questions précédentes montrent que $\dot{10}$ engendre $(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^*$.

Remarque — En fait il était inutile de rajouter la condition $n \geq 3$ dans la partie II.B puisque si $n = 2$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* = \{\dot{1}\}$ est cyclique et engendré par $\dot{1}$. Par contre, la condition p premier ≥ 3 *a été oubliée* dans l'énoncé au début de la partie II. Si $p = 2$, le résultat peut être mis en défaut.

Ainsi $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \{\dot{1},\dot{3},\dot{5},\dot{7}\}$ et $\dot{3}^2 = \dot{5}^2 = \dot{7}^2 = \dot{1}$, de sorte que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ soit isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui n'est pas cyclique !

Complément — Voici un programme MuPad qui sort tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la valeur de $\varphi(n)$ et les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$:

```
/* programme mu03315a */
/* calcul des éléments inversibles de Z/nZ et de l'indicateur d'Euler
*/
input(n) : k :=1 :
for x from 0 to 48 do
if igcd(x,n)=1 then a[k] :=x : print(Unquoted,NoNL," k=".expr2text(k).",
".expr2text(x)." ; ") ;
k :=k+1 : end_if :
end_for :
phi :=k-1 :
print(Unquoted,"on a trouvé ".expr2text(phi)." éléments inversibles") ;
/* recherche des générateurs de (Z/nZ)* */
print(Unquoted,"Les générateurs du groupe multiplicatif
de Z/nZ seront :") :
for k from 2 to phi do
c :=a[k] : v :=1 : i :=0 :
repeat i :=i+1 : v := v*c mod n :
until v=1 end :
if i=phi then print(Unquoted,NoNL,expr2text(c)." ,") : end_if
end_for :
```

Pour l'entrée $n = 49$, il fournit la sortie :

k=1, 1 ; k=2, 2 ; k=3, 3 ; k=4, 4 ; k=5, 5 ; k=6, 6 ; k=7, 8 ; k=8, 9 ; k=9, 10 ; k=10, 11 ; k=11, 12 ; k=12, 13 ; k=13, 15 ; k=14, 16 ; k=15, 17 ; k=16, 18 ; k=17, 19 ; k=18, 20 ; k=19, 22 ; k=20, 23 ; k=21, 24 ; k=22, 25 ; k=23, 26 ; k=24, 27 ; k=25, 29 ; k=26, 30 ; k=27, 31 ; k=28, 32 ; k=29, 33 ; k=30, 34 ; k=31, 36 ; k=32, 37 ; k=33, 38 ; k=34, 39 ; k=35, 40 ; k=36, 41 ; k=37, 43 ; k=38, 44 ; k=39, 45 ; k=40, 46 ; k=41, 47 ; k=42, 48 ;

On a trouvé 42 éléments inversibles

Les générateurs du groupe multiplicatif de Z/nZ seront :

3 ,5 ,10 ,12 ,17 ,24 ,26 ,33 ,38 ,40 ,45 ,47 ,

Ces calculs retrouvent bien le générateur 10 que nous avions obtenu par la théorie. Il montre aussi qu'il existe 12 générateurs de $(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})^*$, ce qui est normal puisque $\varphi(42) = \varphi(2 \times 3 \times 7) = (2-1)(3-1)(7-1) = 12$.

PARTIE III

III.1.a. On a $a^{p-1} - 1 = 0 \ \ (p)$ d'après le petit Théorème de Fermat. Par suite :

$$(a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 0 \ \ (p)$$

et, puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, $a^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1 \ \ (p)$.

III.1.b. On réitère le raisonnement du (**III.1.a**). Tout d'abord :

$$a^{q2^s} = a^{p-1} = 1 \ \ (p)\,.$$

Cela entraîne $a^{q2^{s-1}} = \pm 1 \ \ (p)$ et nous donne la seconde ligne du tableau de la FIG. 12.1. Si $a^{q2^{s-1}} = 1 \ \ (p)$, on recommence le même raisonnement et l'on obtient $a^{q2^{s-2}} = \pm 1 \ \ (p)$. Et ainsi de suite... jusqu'à arriver aux deux possibilités $a^q = \pm 1 \ \ (p)$.

La FIG. 12.1 nous donne l'idée d'un raisonnement rigoureux : $H_a(p)$ sera démontrée si l'on montre la propriété :

$$\mathcal{R}(t) : \quad a^{q2^{s-t}} = 1 \ \ (p) \quad \text{ou} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad 0 < r \leq t \quad a^{q2^{s-r}} = -1 \ \ (p)$$

par récurrence finie pour t variant de 1 à s (dans ce cas $H_a(p) = \mathcal{R}(s)$).

$\mathcal{R}(1)$ est vraie puisque $a^{q2^s} = a^{p-1} = 1 \ \ (p)$ entraîne $a^{q2^{s-1}} = \pm 1 \ \ (p)$. Si $\mathcal{R}(t)$ est vraie, et dans le cas où $a^{q2^{s-t}} = 1 \ \ (p)$, on trouve $a^{q2^{s-(t+1)}} = \pm 1 \ \ (p)$, et cela prouve $\mathcal{R}(t+1)$.

III.2. Si l'on avait $\text{pgcd}(a,p) = d$ avec $d > 1$, d diviserait a et p, et l'on aurait deux cas possibles :

- ou bien $a^q = 1 \ \ (p)$, et dans ce cas d divise 1, ce qui est absurde,

- ou bien il existe $r \in [0..s[$ tel que $a^{q2^r} = -1 \ \ (p)$, et dans ce cas d divise -1, ce qui est encore absurde.

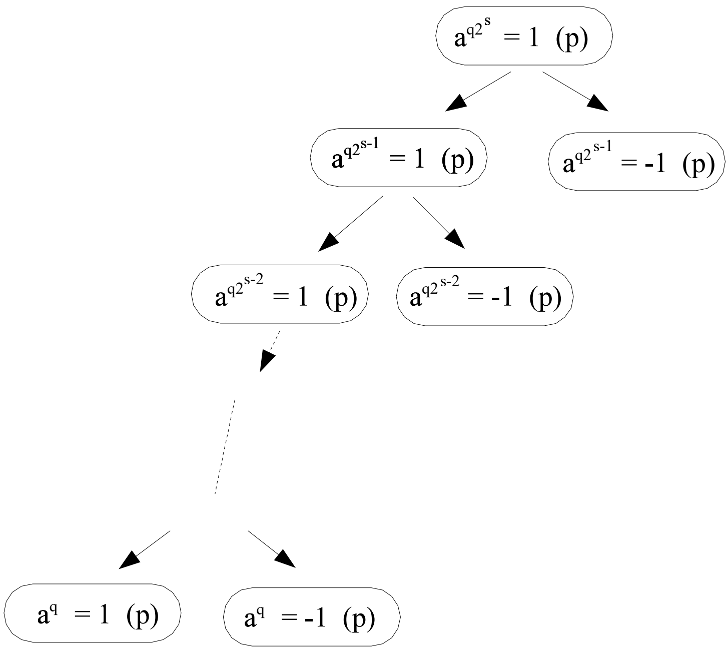


FIG. 12.1 – Tableau de choix

III.3.a. Voici un programme pour MuPad, où l'on a pris son temps pour créer une belle sortie :

```
/* mu03315b */
/* Décomposition de p-1 sous la forme q*2^s */
s :=0 : input(p,a) : print(Unquoted,"p = ".expr2text(p).
" et a = ".expr2text(a)) :
q :=p-1 : print(Unquoted,expr2text(p)." est-t-il ".expr2text(a)."-ppf ?") :
while q mod 2 = 0 do q :=q/2 : s :=s+1 :
end_while :
print(Unquoted,"q = ".expr2text(q)." s = ".expr2text(s)." donc ".
expr2text(p-1)." = ".expr2text(q)." x 2^".expr2text(s)) :
/* ******** */
/* Calcul de a^q modulo p, résultat dans c */
c :=a :
for i from 2 to q do c :=c*a mod p : end_for :
print(Unquoted,expr2text(a)."^".expr2text(q)." = "
.expr2text(c)) :
```

```
if c=1 or c=p-1 then print(Unquoted,"OUI") else
 /* ******** */
   /* Calcul des c^(2^s), résultat dans d */
   d :=c : r :=0 :
   while d<>p-1 and r<s do
   d :=d*d mod p :
   r :=r+1
   end_while :
   if r=s then print(Unquoted,"NON")
   else print(Unquoted,"OUI, avec r = ".expr2text(r))
   end_if :
end_if :
```

III.3.b. On obtient les sorties suivantes :

```
p = 49 et a = 30
49 est-t-il 30-ppf ?
q = 3 s = 4 donc 48 = 3 x 2^4
30^3 = 1
OUI

p = 91 et a = 74
91 est-t-il 74-ppf ?
q = 45 s = 1 donc 90 = 45 x 2^1
74^45 = 1
OUI

p = 111 et a = 28
111 est-t-il 28-ppf ?
q = 55 s = 1 donc 110 = 55 x 2^1
28^55 = 28
NON

p = 121 et a = 94
121 est-t-il 94-ppf ?
q = 15 s = 3 donc 120 = 15 x 2^3
94^15 = 120
OUI

p = 135 et a = 43
135 est-t-il 43-ppf ?
q = 67 s = 1 donc 134 = 67 x 2^1
43^67 = 7
NON
```

p = 1225 et a = 999
1225 est-t-il 999-ppf ?
q = 153 s = 3 donc 1224 = 153 x 2^3
999^153 = 1224
OUI

D'où le tableau :

p	49	91	111	121	135	1225
a	30	74	28	94	43	999
p est a-ppf	oui	oui	non	oui	non	oui

III.3.c. Un programme MuPad calcule les puissances successives de 50 modulo 561 :

```
for i from 1 to 10 do
print(NoNL, 50^i mod 561) : print(NoNL," ") :
end
```

et l'on obtient : 50 256 458 460 560 511 305 103 101 1

L'ensemble proposé est donc égal au sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{Z}/561\mathbb{Z})^*$ engendré par 50.

PARTIE IV

IV.A.1. $n = p_1...p_k$ n'est pas premier. Si a est premier avec n, a est premier avec chacun des p_i et le petit Théorème de Fermat donne $a^{p_i-1} \equiv 1 \ \ (p_i)$. Puisque $p_i - 1$ divise $n-1$, cette congruence entraîne $a^{n-1} \equiv 1 \ \ (p_i)$, et p_i divisera $a^{n-1}-1$ pour tout i. Comme les p_i sont des entiers premiers distincts deux à deux, cela prouve que le produit $n = p_1...p_k$ divise $a^{n-1}-1$, autrement dit que n est un nombre de Carmichaël (on suppose ici $k \geq 2$ pour que n ne soit pas premier).

561 est un nombre de Carmichaël puisque $561 = 3 \times 11 \times 17$ et que chacun des entiers 2, 10, 16 divise 560. De même $10585 = 5 \times 29 \times 73$ où 4, 28 et 72 divisent 10584.

IV.A.2.a. D'après la première partie du problème,

$$|(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^*| = \varphi(\alpha) = 2^\alpha - 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}.$$

Un nombre impair a est premier avec 2^α, donc appartient à $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^*$, et (**II.A.4.a**) donne $a^{2^{\alpha-1}} = 1 \ (n)$. Ainsi, si a est impair :

$$a^{2^\alpha-1} \equiv 1 \ \ (n) \Leftrightarrow (a^{2^{\alpha-1}})^2 \equiv a \ \ (n) \Leftrightarrow 1 \equiv a \ \ (n)\,.$$

Si 2^α est un nombre de Carmichaël, alors $a^{2^\alpha - 1} \equiv 1 \ \ (2^\alpha)$ et donc $1 \equiv a \ \ (2^\alpha)$ pour tout nombre impair a. C'est absurde puisque 3 ne s'écrit sous la forme $3 = 1 + u2^\alpha$ (autrement $1 = u2^{\alpha-1}$ avec $\alpha \geq 2$, et 2 diviserait 1). On a prouvé qu'un nombre de Carmichaël possédait nécessairement au moins un nombre premier impair dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.

IV.A.2.b.(i). • On a besoin de généraliser la construction de la bijection $h : S_{pq} \to S_p \times S_q$ faite en (**I.4**) à k nombres q_i premiers entre eux deux à deux. C'est l'objet du Lemme suivant :

Lemme C — Soient q_1, ..., q_k des entiers premiers entre eux deux à deux. L'application

$$\begin{array}{cccc} h_k : & S_{q_1 \dots q_k} & \to & S_{q_1} \times \dots \times S_{q_k} \\ & r & \mapsto & (a_1, \dots, a_k) \end{array}$$

qui à r associe $(a_1, ..., a_k)$ où a_i désigne le reste de la division euclidienne de r par q_i, est bien définie et bijective.

preuve du Lemme C — Elle se fait par récurrence sur k, le cas où $k = 2$ ayant déjà été prouvé en (**I.4**). Si le Lemme est vrai au rang $k-1$, on remarque d'abord que h_k est bien définie, i.e. prend ses valeurs dans $S_{q_1} \times ... \times S_{q_k}$. Si ce n'était pas le cas, il existerait au moins un indice i pour lequel a_i n'est pas premier avec q_i. Il existerait alors un diviseur non trivial d commun à a_i et q_i. Comme $r = qq_i + a_i$, ce diviseur d diviserait r et $q_1 ... q_k$, ce qui est absurde puisque r et $q_1 ... q_k$ sont premiers entre eux.

On remarque ensuite que $h_k = (h_{k-1} \times Id) \circ h$ suivant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} S_{q_1 \dots q_k} & \overset{h}{\to} & S_{q_1 \dots q_{k-1}} \times S_{q_k} & \overset{h_{k-1} \times Id}{\to} & S_{q_1} \times \dots \times S_{q_k} \\ r & \mapsto & (a, a_k) & \mapsto & (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k) \, . \end{array}$$

C'est évident, puisque si a désigne le reste de la division euclidienne de r par $q_1 ... q_{k-1}$, et si a_i désigne le reste de la division euclidienne de a par q_i, alors :

$$r = qq_1 ... q_{k-1} + a \quad \text{et} \quad a = q' q_i + a_i \text{ avec } 0 \leq a_i < q_i$$

entraînent $r = (qq_1 ... \widehat{q_i} ... q_{k-1} + q') \, q_i + a_i$, si bien que a_i représente bien le reste de la division euclidienne de r par q_i. L'hypothèse récurrente montre que $h_{k-1} \times Id$ est bijective. Comme h est bijective d'après (**I.4**), h_k sera bien une bijection comme la composée de deux bijections. ■

Posons $q_i = p_i^{\alpha_i}$. D'après le Lemme C, l'application $h_k : S_{q_1 \dots q_k} \to S_{q_1} \times ... \times S_{q_k}$ est bijective. Par hypothèse ω est premier avec $p_1^{\alpha_1}$, donc :

$$(\omega, 1, ..., 1) \in S_{q_1} \times S_{q_2} \times ... \times S_{q_k},$$

et puisque l'application h_k est surjective, il existe au moins un entier t premier avec l'entier n tel que $h_k(t) = (\omega, 1, ..., 1)$, c'est-à-dire :

$$t \equiv \omega \ (p_1^{\alpha_1}) \ \text{ et } \ t \equiv 1 \ (p_i^{\alpha_i}) \ \text{ pour tout } i \in [2..k] \, .$$

• Par hypothèse n est un nombre de Carmichaël. On aura donc $t^{n-1} \equiv 1 \ (n)$ si l'on prouve que t est premier avec n. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un diviseur premier p_i commun à n et t. Si $i > 1$, p_i divise t et $t \equiv 1 \ (p_i^{\alpha_i})$, donc p_i divise 1, ce qui est absurde. Si $i = 1$, p_1 divise t et $t \equiv \omega \ (p_i^{\alpha_i})$, donc p_1 divise ω, ce qui est absurde (ω et p_1 sont premiers entre eux par hypothèse !). Dans les deux cas, on aboutit à une absurdité.

IV.A.2.b.(ii). La congruence $t^{n-1} \equiv 1 \ (n)$ entraîne $t^{n-1} \equiv 1 \ (p_1^{\alpha_1})$, ou encore $\omega^{n-1} \equiv 1 \ (p_1^{\alpha_1})$ puisque $t \equiv \omega \ (p_1^{\alpha_1})$. L'ordre multiplicatif :

$$\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right) = p_1^{\alpha_1 - 1}\left(p_1 - 1\right)$$

de ω modulo $p_1^{\alpha_1}$ divisera donc $n - 1$, c'est-à-dire :

$$p_1^{\alpha_1 - 1}\left(p_1 - 1\right) \ \text{ divise } n - 1. \quad (\natural)$$

Ainsi $p_1^{\alpha_1 - 1}$ divise $n - 1$ et n, donc divise 1, et cela entraîne $\alpha_1 = 1$ (en effet, si $\alpha_1 > 1$ l'entier premier p_1 diviserait 1, absurde). En remplaçant dans ($\natural$), on constate que $p_1 - 1$ divise $n - 1$.

IV.A.2.b.(iii). • On vient de voir que $p_1 - 1$ divise $n - 1$, et l'on sait que $p_1 - 1$ est pair, donc n est impair. On peut donc écrire $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_1}$ où tous les nombres premiers p_i sont impairs, et recommencer le raisonnement de **(ii)** avec p_i à la place de p_1 pour obtenir $\alpha_i = 1$ et $(p_i - 1) \,|\, (n - 1)$ pour tout indice i.

• Soit n un nombre de Carmichaël. De deux choses l'une :

- si n est pair, alors n ne peut admettre de diviseur premier impair d'après le premier point, donc $n = 2^\alpha$ et (**IV.A.2.a**) entraîne $n = 2$. Mais 2 est premier, donc il n'existe pas de nombre de Carmichaël pair.

- si n est impair, le premier point montre que $n = p_1 ... p_k$ où les nombres premiers p_i sont impairs, et que $p_i - 1$ divise $n - 1$ pour tout indice i.

On vient de prouver la réciproque de (**IV.A.1**).

IV.A.3. Si $n = pq$ est un nombre de Carmichaël avec p, q premiers distincts, alors par exemple $p < q$ et $q - 1$ doit diviser $pq - 1 = (p - 1)\, q + q - 1$, donc devra aussi diviser $(p-1)\,q$. Comme $\mathrm{pgcd}\,(q-1,q)=1$, le Théorème de Gauss entraîne $(q-1)\,|\,(p-1)$ et c'est absurde.

IV.A.4. • Les nombres $16=2^4$ et $85=5\times 17$ sont premiers entre eux, donc il existe des entiers p et k tels que $85p-16k=1$. Ceux-ci sont donnés par l'algorithme d'Euclide étendu. Faisons donc des divisions successives : $85=16\times 5+5$ et $16=5\times 3+1$ donc :

$$1=16-5\times 3=16-(85-16\times 5)\times 3=85\times(-3)+16\times 16.$$

On a trouvé une solution particulière à l'équation de Bezout. On peut alors écrire tout simplement :

$$\begin{aligned}85p-16k=1 &\Leftrightarrow 85p-16k=85\times(-3)+16\times 16\\ &\Leftrightarrow 85\,(p+3)=16\,(k+16)\quad (*)\end{aligned}$$

Puisque 16 et 85 sont premiers entre eux, le Théorème de Gauss montre l'existence d'un entier relatif u tel que $k+16=85u$, ce qui entraîne $p+3=16u$. D'où $(k,p)=(85u-16,16u-3)$. Réciproquement, si $(k,p)=(85u-16,16u-3)$ avec $u\in\mathbb{Z}$, il est facile de vérifier que l'équation $(*)$ est vraie. Les solutions (k,p) cherchées sont donc $(k,p)=(85u-16,16u-3)$ où $u\in\mathbb{Z}$.

• Un nombre de Carmichaël est divisible par $85=5\times 17$ si et seulement si il s'écrit $n=85p$ où p est un nombre premier non pair distinct de 5 et 17, et où 4, 16 et $p-1$ divisent $85p-1$. En particulier il existe un entier k tel que $85p-1=16k$, et la résolution demandée ci-dessus montre l'existence d'un entier u tel que $p=16u-3$. Ainsi les entiers n cherchés sont caractérisés par :

$$(C)\quad\begin{cases} n=85p\\ p=16u-3 \text{ est premier (avec } u\in\mathbb{Z})\\ 4|(n-1)\\ (p-1)\,|\,(n-1)\,.\end{cases}$$

Puisque :

$$4|(n-1)\Leftrightarrow 85\,(16u-3)-1\equiv 0\ (4)\Leftrightarrow 85-1\equiv 0\ (4)\Leftrightarrow 0\equiv 0\ (4)\,,$$

la caractérisation s'écrit plus simplement :

$$(C)\quad\begin{cases} n=85p\\ p=16u-3 \text{ est premier (avec } u\in\mathbb{Z})\\ (p-1)\,|\,(n-1)\,.\end{cases}$$

On teste donc avec $u = 1$, pour lequel $p = 16u - 3 = 13$ est bien premier. Alors $n = 1105$ et 12 divise 1105. Le plus petit nombre de Carmichaël divisible par 5 et 17 sera donc $1105 = 5 \times 17 \times 13$.

IV.B.1. Si n n'est pas un nombre de Carmichaël, il existe $a \in \mathbb{Z}$ premier avec n et tel que $a^{n-1} \neq 1 \ (n)$. On montre alors que n n'est pas a-ppf en raisonnant par l'absurde.

Si n était a-ppf, on aurait :

$$(a) : \quad a^q = 1 \ (n) \quad \text{ou bien} \quad (b) : \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad 0 \leq r < s \quad a^{q2^r} = -1 \ (n)$$

en posant $n - 1 = q2^s$. Si (a) a lieu,

$$a^{\frac{n-1}{2^s}} = 1 \ (n) \Rightarrow a^{n-1} = 1 \ (n) \,,$$

absurde. Si (b) a lieu,

$$a^{n-1} = a^{q2^s} = \left(a^{q2^r}\right)^{2^{s-r}} = (-1)^{2^{s-r}} = 1 \ (n) \,,$$

ce qui est encore absurde.

IV.B.2. L'énoncé nous demande d'admettre que l'ensemble :

$$A = \left\{\dot{a} \,/\, n \text{ est } a\text{-ppf}\right\}$$

est inclus dans un sous-groupe propre H de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. On sait qu'un sous-groupe propre d'un groupe d'ordre N possède au plus $N/2$ éléments (utiliser le Théorème de Lagrange). On peut donc affirmer que le cardinal $|A|$ de A est inférieur ou égal à $\varphi(n)/2$.

Si n est composé, la probabilité de choisir un élément a dans $\{1, ..., n-1\}$ pour lequel n est a-ppf sera égale à :

$$\zeta = \frac{|A|}{n-1} \leq \frac{\varphi(n)}{2(n-1)} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{car } \varphi(n) \leq n - 1.$$

La probabilité pour que le nombre n soit "déclaré premier" à l'issue des k tests indépendants sera donc :

$$\mathrm{p}\,(\text{"}n \text{ est déclaré premier"}) = \zeta^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Remarque — Le Théorème de Rabin, démontré dans l'ouvrage de Michel Demazure ([10], Th. 2.17 p. 64) propose la majoration $|A| \leq \varphi(n)/4$ lorsque n est impair composé et > 9.

Chapitre 13

CAPES externe 2004, épreuve 2

13.1 Énoncé

RAPPELS ET NOTATIONS

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices à coefficients réels et à trois lignes et trois colonnes. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A[i,j]$ le coefficient de A dont l'indice de ligne est égal à i et l'indice de colonne est égal à j.

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont entiers.

1. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $\langle u, v\rangle$. La norme euclidienne d'un vecteur v est notée $\|v\|$. La distance associée à cette norme est notée d. Si u et v sont deux vecteurs de E ; on a, donc $d(u,v) = \|u-v\|$.

E est rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

On note S^2 la sphère unité de E :

$$S^2 = \{v \in E \,/\, \|v\| = 1\}.$$

On note Id_E l'application identique de E.

$\mathrm{O}(E)$ est le groupe des automorphismes orthogonaux de E.

Si f et g sont deux éléments de $\mathrm{O}(E)$, on note fg au lieu de $f \circ g$ l'automorphisme composé de g et de f.

---

[0] [ag59e] v1.01

On rappelle que :

• Le déterminant d'un automorphisme orthogonal est égal à 1 ou à -1.

• Les rotations vectorielles (ou plus simplement les rotations) sont les éléments de $\mathrm{O}(E)$ dont le déterminant est égal à 1. Leur ensemble noté $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$.

• D étant une droite vectorielle de E, on appelle demi-tour d'axe D la symétrie orthogonale par rapport à D ; il s'agit d'une rotation vectorielle.

• $\mathrm{SO}(3)$ est le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. Rappelons que l'application qui à toute rotation de E associe la matrice qui la représente dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathrm{SO}(E)$ sur $\mathrm{SO}(3)$.

2. Ensembles dénombrables

On rappelle que :

• Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

• L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable.

• Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

3. Partitions

Soit A un ensemble non vide. On rappelle que la famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A constitue une partition de A si :

(*i*) Aucun des sous-ensembles A_i n'est vide.

(*ii*) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

(*iii*) $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_i = \varnothing$.

4. Groupes, sous-groupe engendré par une partie

• Etant donné un groupe $(G,.)$ dont la loi est notée multiplicativement, g étant un élément de G, l'application de G dans G : $h \to gh$ est bijective. Si H est un sous-ensemble de G, on note

$$gH = \{gh \,/\, h \in H\}.$$

• Etant donné un groupe $(G,.)$ dont la loi est notée multiplicativement et S un sous-ensemble de G, on appelle sous-groupe engendré par S le plus petit sous-groupe de G contenant S ; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent S.

5. Déplacements

On note $\text{Dep}(E)$ l'ensemble des déplacements de E lorsque ce dernier est muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien sur lui-même. On rappelle que $(\text{Dep}(E), \circ)$ est un groupe.

PRELIMINAIRES

Soit Ω un ensemble quelconque non vide. A et B étant deux sous-ensembles de Ω, on note $A\backslash B$ l'intersection de A et du complémentaire de B ; en d'autres termes :

$$A\backslash B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

$\mathfrak{S}(\Omega)$ désigne le groupe des bijections de Ω sur lui-même.

Soit f appartenant à $\mathfrak{S}(\Omega)$; si A est un sous-ensemble de Ω, on note $f(A)$ le sous-ensemble de Ω dont les éléments sont les images des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in \Omega \,/\, \exists x \in A \quad y = f(x)\}.$$

On rappelle que :

(i) $f(A) = \emptyset$ si et seulement si $A = \emptyset$.

(ii) Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω,

$$A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B).$$

(iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de Ω indexée par l'ensemble I, on a :

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

(iv) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de Ω indexée par l'ensemble I, on a :

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

(v) Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω, on a :

$$f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B).$$

1. Démontrer les propriétés (iv) et (v).

2. Prouver ensuite que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si et seulement si $(f(A_i))_{i\in I}$ est une partition de Ω.

PARTIE I : QUELQUES PROPRIETES DES ROTATIONS DE L'ESPACE

1. Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de E.

a) On suppose que ρ_1 et ρ_2 ont le même axe. Prouver que $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$.

b) On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours d'axes respectifs D_1 et D_2 orthogonaux. Prouver que $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$ et déterminer cette rotation.

2. Réciproque :

Soit ρ une rotation vectorielle distincte de Id_E, d'axe $D = r\omega$ où $\|\omega\| = 1$.

a) Soit Δ une droite vectorielle distincte de D et telle que $\rho(\Delta) = \Delta$. Prouver que D et Δ sont orthogonales et que ρ est un demi-tour.

b) Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles distinctes de Id_E dont les axes respectifs D_1 et D_2 sont distincts. Montrer que si $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$, alors D_1 est une droite invariante par ρ_2. En déduire que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.

c) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments ρ_1, ρ_2 de $\mathrm{SO}(E)$ commutent (c'est-à-dire $\rho_2\rho_1 = \rho_1\rho_2$).

Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de E et $\mathbf{G}$ *le sous-groupe de* $\mathrm{SO}(E)$ *engendré par ρ_1 et ρ_2.*

3. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont les rotations d'angles respectifs α_1, α_2 autour de la droite D dirigée et orientée par le vecteur unitaire ω.

a) On note $\mathbf{H} = \left\{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} \;/\; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ et, que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) On suppose de plus que l'égalité

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\pi = 0$$

où x, y, z sont des entiers relatifs n'est possible que si $x = y = z = 0$. Démontrer que pour tout $r \in \mathbf{G}$, il existe un unique couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r = \rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$.

4. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux. Démontrer que $\mathbf{G}$ contient exactement quatre éléments que l'on explicitera. On donnera la table du groupe de $\mathbf{G}$.

5. On suppose que ρ_1 et ρ_2 ne commutent pas. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathrm{SO}(E)$ formé des éléments de la forme $s_1^{a_1}s_2^{a2}...s_n^{a_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, ..., s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

a) Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) Soit $g \in \mathbf{G} \backslash \{Id_E\}$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, ..., s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, ..., a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a2} ... s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n[,\ s_i \neq s_{i+1}. \qquad (1)$$

Cette décomposition n'est en général pas unique (si ρ_1 est un demi-tour, alors $\rho_1 = \rho_1^3$). Dans la partie suivante on construit un exemple où cette fois la décomposition sera unique.

PARTIE II : ETUDE D'UN SOUS-GROUPE DE SO (3)

On pose dans ce qui suit $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

I_3, R et T sont les matrices de SO (3) définies par :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

ρ et τ sont les rotations de E de matrices respectives R, T dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathbb{G}$ est le sous-groupe de SO (3) engendré par $\{R, T\}$. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de SO (E) engendré par $\{\rho, \tau\}$. Il est manifestement isomorphe à $\mathbb{G}$.

On rappelle que la relation $p \equiv q \bmod 5$ où p et q sont des entiers relatifs, signifie que 5 divise $q - p$.

1. Pour tout entier relatif n, on pose $a_n = 5^{|n|} \cos(n\alpha)$ et $b_n = 5^{|n|} \sin(n\alpha)$.

a) Factoriser $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}$.

b) Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à zéro :

$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n.$$

c) Prouver que pour tout entier relatif n, a_n et b_n sont des entiers relatifs.

d) Montrer que si n est différent de zéro, alors $a_n \equiv 3 \bmod 5$.

e) Montrer que si n est un entier strictement positif, alors $b_n \equiv 4 \bmod 5$. Montrer que si n est un entier strictement négatif, alors $b_n \equiv 1 \bmod 5$.

2. On note $\equiv$ la relation définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ par $M \equiv M'$ si et seulement si pour tout couple (i, j) de $[1, 3]^2$, on a :

$$M[i, j] \equiv M'[i, j] \bmod 5.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

a) Démontrer que cette relation est compatible avec le produit matriciel, c'est-à-dire si A, B, C, D sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ tels que $A \equiv B$ et $C \equiv D$, alors $AC \equiv BD$.

b) Démontrer que pour tout entier k, $5^{|k|}R^k$ et $5^{|k|}T^k$ appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^* \quad 5^{|k|}R^k \equiv \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 5^{|k|}T^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 3 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_k = 1$ si $k > 0$ et $\varepsilon_k = -1$ si $k < 0$. Existe-t-il un entier relatif k différent de 0, tel que $R^k = I_3$ ou $T^k = I_3$?

c) Démontrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^{*2} \quad 5^{|m|+|n|}T^m R^n \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Soient $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. On pose $q = \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)$. Démontrer que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs qui ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

e) En déduire que

$$T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} \neq I_3 \qquad (2)$$
$$T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta} \neq I_3 \qquad (3)$$

3. Soient $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. Déduire des égalités précédentes que

$$R^{a_1} T^{b_n} ... R^{a_n} T^{b_n} \neq I_3 \qquad (4)$$
$$R^{a_1} T^{b_n} ... R^{a_n} T^{b_n} R^{\beta} \neq I_3 \qquad (5)$$

4. Conclure que pour tout g appartenant à $\mathbf{G} \backslash \{Id_E\}$, il existe de *façon unique* un entier n strictement positif, une famille $(s_1, s_2, ..., s_n)$ de $\{\rho, \tau\}^n$ et une famille $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} ... s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n-1], \ s_i \neq s_{i+1}.$$

On appelle terme de tête de g l'élément s_1 lorsque $a_1 > 0$ et s_1^{-1} lorsque $a_1 < 0$. Ce terme de tête sera noté $t(g)$.

5. Démontrer que $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable.

6. Pour tout élément σ de $\left\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\right\}$, on note $L(\sigma)$ l'ensemble des éléments g de $\mathbf{G}\backslash\{Id_E$ pour lesquels $t(g) = \sigma$.

a) Vérifier que $\mathbf{G} = \{Id_E\} \cup L(\rho) \cup L\left(\rho^{-1}\right) \cup L(\tau) \cup L\left(\tau^{-1}\right)$ et que l'obtient ainsi une partition de $\mathbf{G}$.

b) Vérifier que $L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L\left(\tau^{-1}\right)$ et que l'obtient ainsi une partition de $L(\rho)$.

De la même manière on a

$$\begin{aligned}
&L\left(\rho^{-1}\right) = \left\{\rho^{-1}\right\} \cup \rho^{-1} L\left(\rho^{-1}\right) \cup \rho^{-1} L(\tau) \cup \rho^{-1} L\left(\tau^{-1}\right) \\
&L(\tau) = \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L\left(\rho^{-1}\right) \\
&L\left(\tau^{-1}\right) = \left\{\tau^{-1}\right\} \cup \tau^{-1} L\left(\tau^{-1}\right) \cup \tau^{-1} L(\rho) \cup \tau^{-1} L\left(\rho^{-1}\right).
\end{aligned}$$

On ne demande pas de démontrer ces trois égalités.

c) En déduire que $\mathbf{G} = L(\rho) \cup \rho L\left(\rho^{-1}\right) = L(\tau) \cup \tau L\left(\tau^{-1}\right)$ et que, dans les deux cas, on obtient ainsi une partition de $\mathbf{G}$.

PARTIE III : ETUDE DE SOUS-ENSEMBLES DE S^2

Les données et les notations de cette partie sont celles de la Partie II. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$ engendré par $\{\rho, \tau\}$. On considère l'ensemble

$$F = \left\{v \in S^2 \,/\, \exists g \in \mathbf{G}\backslash\{Id_E\} \quad g(v) = v\right\}$$

et son complémentaire dans S^2, soit $X = S^2 \backslash F$.

1. Démontrer que l'ensemble F est un sous-ensemble dénombrable de S^2. En déduire que X n'est pas vide.

2. Vérifier que pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $v \in X$, $g(v) \in X$.

3. Démontrer que si g et h sont deux éléments de $\mathbf{G}$ tels qu'il existe v appartenant à X vérifiant $g(v) = h(v)$, alors $g = h$.

4. a) Démontrer que pour tout g appartenant à $\mathbf{G}$, la restriction de g à X induit une bijection de X sur lui-même que l'on notera g_X.

b) Démontrer que l'application

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{G} & \rightarrow & \mathfrak{S}(X) \\
g & \mapsto & g_X
\end{array}$$

est un homomorphisme injectif de groupes. Cela permet d'identifier $\mathbf{G}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.

5. On considère la relation $\sim_{\mathbf{G}}$ définie sur X par

$$a \sim_{\mathbf{G}} b \;\Leftrightarrow\; \exists g \in \mathbf{G} \quad a = g(b).$$

Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

On sait que les classes d'équivalence de $\sim_{\mathbf{G}}$ forment une partition de X. On admet alors en utilisant l'axiome du choix l'existence d'un sous-ensemble M de X dont l'intersection avec chaque classe d'équivalence contient un et un seul point.

6. Prouver que la famille $(g(M))_{g\in\mathbf{G}}$ constitue une partition de X.

7. On pose

$$X_0 = M, \quad X_1 = \bigcup_{g\in L(\rho)} g(M), \quad X_2 = \bigcup_{g\in L(\tau)} g(M),$$
$$X_3 = \bigcup_{g\in L(\rho^{-1})} g(M), \quad X_4 = \bigcup_{g\in L(\tau^{-1})} g(M).$$

a) Prouver que $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ constitue une partition de X.

b) Prouver que

$$X = X_1 \cup \rho(X_3) \text{ et } X_1 \cap \rho(X_3) = \varnothing \qquad (6)$$
$$X = X_2 \cup \tau(X_4) \text{ et } X_2 \cap \tau(X_4) = \varnothing \qquad (7)$$

8. On note $\Lambda = \{(u,v) \in F \times F \,/\, u \neq v\}$.

a) Vérifier que Λ est un ensemble dénombrable.

b) Si $(u,v) \in \Lambda$, on considère $\Gamma_{u,v} = \left\{w \in S^2 \,/\, \|w-u\| = \|w-v\|\right\}$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

c) Soit $\Gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$. Démontrer que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine et que $\Gamma \cup F$ est strictement inclus dans S^2. Indication : on pourra considérer l'intersection de $\Gamma \cup F$ avec un cercle tracé sur S^2 qui ne soit pas centré à l'origine.

d) Démontrer qu'il existe un élément r de $\mathrm{SO}(E)$ dont l'axe ne rencontre pas $\Gamma \cup F$ et tel que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^* \quad r^p \neq Id_E.$$

e) Soit (u,v) appartenant à $F\times F$. Montrer que pour tout entier k strictement positif, $r^k(u)$ est différent de v. On distinguera les cas : $u=v$ et $u\neq v$. En déduire que si m et n sont deux entiers naturels distincts, alors

$$r^n(F)\cap r^m(F)=\varnothing.$$

f) On pose

$$Y=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F) \quad \text{et} \quad Z=S^2\backslash Y.$$

g) Démontrer que $r(Y)\cap Z=\varnothing$ et $S^2\backslash F=r(Y)\cup Z$.

PARTIE IV : EQUIDECOMPOSABILITE

Soient A et B deux parties non vides de E. On dit que A est équidécomposable à B s'il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de A, une partition finie $(B_i)_{i\in I}$ de B et une famille finie $(g_i)_{i\in I}$, de déplacements de E telles que

$$\forall i\in I \quad B_i=g_i(A_i)$$

(les trois familles sont indexées par un même ensemble fini I). On écrira alors $A\sim B$.

1. Les notations étant celles de la question III. 8, vérifier que S^2 est équidécomposable à $S^2\backslash F$.

2. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des sous-ensembles non vides de E tels que :

$$A_1\cap A_2=B_1\cap B_2=\varnothing, \quad A_1\sim B_1, \quad A_2\sim B_2.$$

a) Vérifier que $A_1\cup A_2\sim B_1\cup B_2$.

b) Généraliser.

3. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties non vides de E. Pour démontrer la transitivité, on observera que si $(A_i)_{i\in I}$ et $(A'_j)_{j\in J}$ sont deux partitions de A, et que si l'on pose

$$K=\{(i,j)\in I\times J\,/\,A_i\cap A'_j\neq\varnothing\}$$

alors la famille $(A_i\cap A'_j)_{(i,j)\in K}$ est encore une partition de A.

4. On suppose que $A\sim B$. Démontrer qu'il existe une bijection ψ de A sur B telle que pour tout sous-ensemble non vide C de A, on ait : $C\sim\psi(C)$.

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E, On posera $A\preccurlyeq B$ lorsqu'il existe un sous-ensemble non vide B' de B tel que $A\sim B'$. En particulier, si $A\sim B$, alors $A\preccurlyeq B$.

La relation $\preccurlyeq$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de E. Les preuves sont analogues à celles des questions précédentes. On observera par ailleurs que si A et B sont des sous-ensembles non vides de X tels que $A \subset B$, il est évident que $A \preccurlyeq B$.

On admettra dans la suite du problème le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, qui s'énonce de la manière suivante :

Si A et B sont deux sous-ensembles non vides de E tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$, alors $A \sim B$.

PARTIE V : ENSEMBLES PARADOXAUX

Les définitions et les notations sont les mêmes que dans la partie précédente. Un sous-ensemble A de E est paradoxal s'il existe deux sous-ensembles non vides B, C de A tels que

$$B \sim A, \quad C \sim A \quad \text{et} \quad B \cap C = \varnothing. \qquad (8)$$

1. Les notations étant celles de la partie III, vérifier que X est paradoxal.

2. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E tels que $A \sim B$. Démontrer que si A est paradoxal, alors il en est de même de B. On pourra utiliser le résultat de la question 4 de la partie IV.

3. Soit A un sous-ensemble paradoxal de E, B, C deux sous-ensembles de A non vides vérifiant les relations (8).

a) En utilisant le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, démontrer que $(A \backslash C) \sim A$.

b) En déduire qu'il existe une partition (A_1, A_2) de A telle que :

$$A_1 \sim A \quad \text{et} \quad A_2 \sim A.$$

4. Démontrer que S^2 est paradoxal.

5. En déduire que si Σ_1 et Σ_2 sont deux sphères disjointes de rayon 1, alors

$$S^2 \sim (\Sigma_1 \cup \Sigma_2).$$

13.2 Corrigé

PRELIMINAIRES

P.1. ▶ **Preuve de** (iv) : Si $y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i)$, il existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. L'élément x appartient à A_i pour tout indice i, et donc $y \in f(A_i)$ pour tout i, ce qui s'écrit $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. L'inclusion

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

est donc prouvée. Réciproquement, si $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, pour tout i il existe $x_i \in A_i$ tel que $y = f(x_i)$. Mais f est injective (c'est une bijection de Ω sur lui-même), donc $f(x_i) = f(x_j)$ entraîne $x_i = x_j$, et ceci pour tout couple (i,j) d'indices distincts dans I. On peut donc poser $x = x_i$ (pour tout i). Dans ce cas $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ et $y = f(x) \in f(\bigcap_{i\in I} A_i)$. L'inclusion $\bigcap_{i\in I} f(A_i) \subset f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ est prouvée.

▶ **Preuve de** (v) : Si $y \in f(A\backslash B)$, il existe $x \in A\backslash B$ tel que $y = f(x)$. Clairement $x \in A$, donc $y \in f(A)$. Si y appartenait à $f(B)$, il existerait $b \in B$ tel que $y = f(x) = f(b)$, et l'injectivité de f donnerait $x = b \in B$, ce qui est absurde. Donc $y \notin f(B)$. On a finalement montré l'inclusion

$$f(A\backslash B) \subset f(A)\backslash f(B).$$

Montrons l'inclusion réciproque. Si $y \in f(A)\backslash f(B)$, il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. En fait a ne peut pas appartenir à B, autrement y appartiendrait à $f(B)$. En conclusion, il existe $a \in A\backslash B$ tel que $y = f(a)$, et cela signifie que y appartient à $f(A\backslash B)$.

P.2. ▶ Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω, montrons que $(f(A_i))_{i\in I}$ aussi. Tout d'abord aucune des parties $f(A_i)$ n'est vide puisqu'aucune partie A_i n'est vide. Ensuite, pour tous i, j distincts,

$$f(A_i) \cap f(A_j) = f(A_i \cap A_j) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

ceci puisque f est bijective. Enfin, toujours puisque f est bijective,

$$\Omega = f(\Omega) = f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

▶ Pour montrer l'implication réciproque, il suffit d'utiliser l'implication directe démontrée ci-dessus avec $f(A_i)$ à la place de A_i, et f^{-1} à la place de f, en remarquant que $f^{-1}(f(A_i)) = A_i$ pour tout i.

[0] [ag59] v2.01

PARTIE I : QUELQUES PROPRIETES DES ROTATIONS DE L'ESPACE

I.1.a. Notons D l'axe commun à ρ_1 et ρ_2. La restriction de ρ_i au plan $P = D^\perp$ orthogonal à D est une rotation plane, et l'on sait que le groupe des rotations vectorielles du plan est commutatif. Les restrictions $\rho_1|_P$ et $\rho_2|_P$ commutent donc entre elles. Les applications linéaires $\rho_2\rho_1$ et $\rho_1\rho_2$ vont

- coïncider avec l'identité sur D,
- coïncider sur P,

donc seront égales.

I.1.b. On vérifie que $\rho = \rho_1\rho_2$ est le demi-tour d'axe $D = (D_1 \oplus D_2)^\perp$. Pour cela, on rappelle que

$$(D_1 \oplus D_2)^\perp = D_1^\perp \cap D_2^\perp$$

et l'on montre que ρ laisse fixe tout vecteur de D, puis que ρ transforme tout vecteur de $D^\perp$ en son opposé :

• Si $x \in D = D_1^\perp \cap D_2^\perp$,

$$\rho(x) = \rho_1(\rho_2(x)) = \rho_1(-x) = -(-x) = x.$$

• Si $x \in D^\perp = D_1 \oplus D_2$, il existe $x_1 \in D_1$ et $x_2 \in D_3$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \rho_1(\rho_2(x_1)) + \rho_1(\rho_2(x_2)) \\ &= \rho_1(-x_1) + \rho_1(x_2) \\ &= -x_1 + (-x_2) = -x.\end{aligned}$$

On montrerait de la même façon que $\rho_2\rho_1$ est le demi-tour d'axe D, ce qui prouve l'égalité $\rho = \rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$.

Remarques : α) Le résultat est classique et vrai en dimension quelconque. Il intéresse les symétries orthogonales dans un espace vectoriel euclidien E de dimension n quelconque. Il est bon de se souvenir des deux résultats suivants. Si l'on note σ_H la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel H, et si F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E,

a) Si F et G sont perpendiculaires, alors $\sigma_F \circ \sigma_G = \sigma_{F\cap G}$.

b) Si F et G sont orthogonaux, alors $\sigma_F \circ \sigma_G = \sigma_{(F\oplus G)^\perp}$.

Le résultat a) est montré dans [21] (§7.4 Lemme 6 p. 147) à l'occasion d'un Lemme qui permet de prouver les Théorèmes de Cartan-Dieudonné. Le résultat b), demandé dans cette composition, était placé en exercice dans [21], à la même page.

β) Il existe une autre façon sympathique de démontrer que $\rho = \rho_1\rho_2$ est le demi-tour d'axe $D = (D_1 \oplus D_2)^\perp$. La méthode est matricielle : elle consiste à choisir un vecteur directeur i de D_1, un vecteur directeur j de D_2, et un vecteur k non nul orthogonal simultanément à i et à j. Les matrices des demi-tours ρ_1 et ρ_2 dans la base $e = (i, j, k)$ sont respectivement

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple montre que

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_2M_1,$$

de sorte que les endomorphismes $\rho_1\rho_2$ et $\rho_2\rho_1$ soient tous les deux égaux à la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}k$ (c'est-à-dire le demi-tour d'axe $\mathbb{R}k$).

I.2.a. Le plan vectoriel $\Pi = D \oplus \Delta$ est globalement invariant par ρ, donc $\rho|_\Pi$ est soit une rotation, soit une réflexion. Comme $D \subset \operatorname{Inv}(\rho|_\Pi)$ (de façon générale, on notera $\operatorname{Inv}(f)$ l'espace des vecteurs invariants par l'endomorphisme f), $\rho|_\Pi$ sera soit la réflexion par rapport à D, soit l'identité. En fait, on ne peut pas avoir $\rho|_\Pi = Id_\Pi$ autrement $\Pi \subset \operatorname{Inv}(\rho)$, et cela est absurde car une rotation vectorielle ρ de E distincte de l'identité admet exactement une droite de vecteurs invariants (son axe !). Donc $\rho|_\Pi$ est la réflexion par rapport à D.

Les seuls sous-espaces vectoriels propres de $\rho|_\Pi$ sont donc D et $D^\perp \cap \Pi$ (voir remarque ci-dessous). Comme $\rho(\Delta) = \Delta$ et $\Delta \neq D$, on aura $\Delta = D^\perp \cap \Pi$, et cela prouve que D et Δ sont orthogonales. Mieux : $\Delta = D^\perp \cap \Pi$ est l'espace propre de $\rho|_\Pi$ associé à la valeur propre -1, donc $\rho|_\Delta = -Id_\Delta$. Finalement ρ est une rotation d'axe D qui transforme au moins un vecteur x non nul et orthogonal à D (prendre un vecteur x de Δ) en $-x$. C'est bien le demi-tour d'axe D.

Remarque : Cette remarque n'est donnée que pour parfaire notre entraînement, et il n'est pas utile de la rédiger le jour du concours. Mais travaillez bien ce genre de questions pour préparer vos oraux. Il s'agit de démontrer qu'une symétrie s par rapport à un sous-espace F parallèlement à un autre sous-espace G n'admet que deux sous-espaces propres : F et G, associés aux valeurs propres 1 et -1 (pourrait-il en être autrement ?). Retournons à la définition de s. On sait que

$$s : \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2. \end{array}$$

Il n'y a plus qu'à chercher quand $s(x) = \lambda x$. On a

$$\begin{aligned} s(x) = \lambda x &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = \lambda (x_1 + x_2) \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1) x_1 + (\lambda + 1) x_2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\lambda - 1) x_1 = 0 \\ (\lambda + 1) x_2 = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si x_1 et x_2 ne sont pas nuls, ce système est incompatible : il n'y a donc pas de vecteurs propres autres que les vecteurs de F ou de G. Clairement, tout vecteur x de F vérifie $s(x) = x$, et tout vecteur x de G vérifie $s(x) = -x$. Cela achève la vérification.

Autre solution : La rotation ρ admet deux directions propres distinctes D et Δ (donc deux valeurs propres réelles), c'est un demi-tour. L'axe D est associé à la valeur propre 1 donc Δ est associée à -1, on en déduit que D et Δ sont orthogonales.

[Cette solution, très raccourcie mais néanmoins juste, m'a été proposée par Marie-Claude David. Elle suppose que l'on sait qu'une rotation de l'espace distincte de l'identité ou d'un demi-tour admet une seule direction propre, à savoir son axe formé de tous les vecteurs invariants. Ce résultat semble raisonnable à admettre et utiliser le jour du concours.]

I.2.b. Pour tout $x \in D_1$,

$$\rho_1(\rho_2(x)) = \rho_2(\rho_1(x)) \Leftrightarrow \rho_1(\rho_2(x)) = \rho_2(x) \Leftrightarrow \rho_2(x) \in D_1.$$

Ainsi $\rho_2(D_1) \subset D_1$, et puisque les dimensions sont égales (ρ_2 est un automorphisme de E, donc conserve les dimensions), $\rho_2(D_1) = D_1$. D'après **I.2.a**, comme D_1 et D_2 sont dictinctes, ρ_2 est un demi-tour et D_1 et D_2 sont orthogonales. Par le même raisonnement, on montre que ρ_1 est un demi-tour.

I.2.c. Si ρ_1 et ρ_2 sont deux rotations vectorielles distinctes de l'identité,

$$\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ ont même axe} \\ \text{ou} \\ \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ sont des demi-tours d'axes orthogonaux.} \end{array} \right. \quad (\natural)$$

Le sens ($\Leftarrow$) a été prouvé en **I.1**. Montrons le sens ($\Rightarrow$). Si $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$, de deux choses l'une :

- ou bien ρ_1 et ρ_2 ont même axe, et il n'y a rien à démontrer,
- ou bien ρ_1 et ρ_2 ont des axes distincts, et l'on peut appliquer **I.2.b** pour obtenir ($\natural$).

I.3.a. L'ensemble $\mathbf{H} = \left\{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} \,/\, (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ n'est pas vide puisque contient $Id = \rho_1^0\rho_2^0$. Si $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$ et $\rho_1^{m_1}\rho_2^{m_2}$ sont deux éléments de $\mathbf{H}$, le produit

$$(\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2})\,(\rho_1^{m_1}\rho_2^{m_2})^{-1} = \rho_1^{n_1-m_1}\rho_2^{n_2-m_2} \quad \text{(ici } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ commutent)}$$

appartient encore à $\mathbf{H}$. On vient de prouver que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}\,(E)$. N'importe quel sous-groupe M contenant ρ_1 et ρ_2 contiendra nécessairement tous les produits $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$ où $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, donc contiendra $\mathbf{H}$. Le groupe $\mathbf{H}$ est donc bien le plus petit sous-groupe de $\mathrm{SO}\,(E)$ contenant ρ_1 et ρ_2, autrement dit le sous-groupe engendré par ces deux éléments, et $\mathbf{G} = \mathbf{H}$.

I.3.b. On a

$$\begin{aligned}
\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} = \rho_1^{m_1}\rho_2^{m_2} &\Leftrightarrow \rho_1^{n_1-m_1} = \rho_2^{m_2-n_2} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad (n_1 - m_1)\,\alpha_1 = (m_2 - n_2)\,\alpha_2 + k2\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad (n_1 - m_1)\,\alpha_1 + (n_2 - m_2)\,\alpha_2 - k2\pi = 0 \\
&\Leftrightarrow (n_1, n_2, k) = (m_1, m_2, 0)\,,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'unicité de l'écriture $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$.

I.4. Comme ρ_1 et ρ_2 commutent, le raisonnement du **I.3.a** peut être ré-utilisé, et

$$\mathbf{G} = \left\{\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} \,/\, (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Ici ρ_1 et ρ_2 sont des demi-tours. Ils sont donc involutifs. Si $n_i = 2q_i + r_i$ représente la division euclidienne de n_i par 2 (avec $0 \leq r_i < 2$), alors $\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} = \rho_1^{r_1}\rho_2^{r_2}$, si bien que $\mathbf{G}$ ne contienne plus que les quatre éléments Id, ρ_1, ρ_2 et $\rho_1\rho_2$ (ces éléments sont clairement distincts entre eux deux à deux).

La table du groupe $\mathbf{G}$ est :

$\nearrow \circ$	Id	ρ_1	ρ_2	$\rho_1\rho_2$
Id	Id	ρ_1	ρ_2	$\rho_1\rho_2$
ρ_1	ρ_1	Id	$\rho_1\rho_2$	ρ_2
ρ_2	ρ_2	$\rho_1\rho_2$	Id	ρ_1
$\rho_1\rho_2$	$\rho_1\rho_2$	ρ_2	ρ_1	Id

et $\mathbf{G}$ est isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

I.5.a. L'ensemble

$$\mathbf{H} = \{s_1^{a_1}...s_n^{a_n} \,/\, n \in \mathbb{Z} \quad (s_1, ..., s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n \quad (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

est un sous-groupe de SO (E) car :

- Il n'est pas vide (il contient Id).
- Si $f = s_1^{a_1}...s_n^{a_n}$ et $g = s_1^{b_1}...s_n^{b_n}$ sont deux éléments de $\mathbf{H}$,

$$fg^{-1} = (s_1^{a_1}...s_n^{a_n})(s_1^{b_1}...s_n^{b_n})^{-1} = s_1^{a_1}...s_n^{a_n}s_n^{-b_n}...s_1^{-b_1} \in \mathbf{H}.$$

C'est le sous-groupe engendré par $\{\rho_1, \rho_2\}$ car tout sous-groupe M qui contient ρ_1 et ρ_2 contient tous les produits $s_1^{a_1}...s_n^{a_n}$, donc contient $\mathbf{H}$.

I.5.b. Si $g = s_1^{a_1}...s_n^{a_n}$, il suffit de remplacer tous les sous-produits $s_i^{a_i}s_{i+1}^{a_{i+1}}$ tels que $s_i = s_{\overline{i}+1}$, par $s_i^{a_i+a_{i+1}}$ (un nombre fini de fois !) pour obtenir la décomposition demandée.

PARTIE II : ETUDE D'UN SOUS-GROUPE DE SO (3)

II.1.a. Si $n \geq 1$, $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2\cos n\alpha \cos\alpha$ s'écrit successivement

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} + \frac{a_{n-1}}{5^{n-1}} &= 2\frac{a_n}{5^n} \times \frac{3}{5} \\ a_{n+1} + 25a_{n-1} &= 6a_n, \end{aligned}$$

comme demandé.

II.1.b. On a $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. Si $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} = 3b_n + 4a_n &\Leftrightarrow 5^{n+1}\sin(n+1)\alpha = 3 \times 5^n \sin n\alpha + 4 \times 5^n \cos n\alpha \\ &\Leftrightarrow 5\sin(n+1)\alpha = 3\sin n\alpha + 4\cos n\alpha \\ &\Leftrightarrow 5(\sin n\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos n\alpha) = 3\sin n\alpha + 4\cos n\alpha \\ &\Leftrightarrow 5\left(\frac{3}{5}\sin n\alpha + \frac{4}{5}\cos n\alpha\right) = 3\sin n\alpha + 4\cos n\alpha, \end{aligned}$$

et cette dernière égalité est vraie.

Remarque : En 5 heures, on trouve la solution au plus vite... et tous les coups sont permis, par exemple ce genre de preuve utilisant des équivalences logiques. Bien sûr, on pourrait ensuite tout "maquiller" différemment. Est-ce utile ?

II.1.c. • On montre la propriété $H(n)$: "a_0, ..., a_n sont entiers" par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies car $a_0 = 1$ et $a_1 = 5\cos\alpha = 3$. Si $H(n)$ est vraie, $a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}$ montre que a_{n+1} est un entier, et donc que $H(n+1)$ est vraie.

On remarque ensuite que si $n \in \mathbb{N}$, $a_{-n} = 5^n \cos n\alpha = a_n$, donc tous les a_n seront encore des entiers lorsque n est négatif.

• La relation $b_{n+1} = 3b_n + 4a_n$ démontrée pour $n \in \mathbb{N}$ permet de prouver par récurrence que b_n est entier dès que $n \in \mathbb{N}$ (on a $b_0 = 0$).

Comme $b_{-n} = -5^n \sin n\alpha = -b_n$, tous les b_n seront entiers lorsque n est négatif.

II.1.d. On raisonne par récurrence sur n pour $n \geq 1$. $a_1 = 3$ est bien congru à 3 modulo 5. Si a_0, ..., a_n le sont, $a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1} \equiv a_n \equiv 3\ (5)$, donc la propriété est héréditaire. Si $-n < 0$, $a_{-n} = a_n \equiv 3\ (5)$ aussi bien.

II.1.e. • On a $b_1 = 5\sin\alpha = 4 \equiv 4\ (5)$. Si $b_1 \equiv b_2 \equiv ... \equiv b_n \equiv 4\ (5)$,

$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n \equiv 3 \times 4 + 4 \times 3 \equiv 24 \equiv 4\ (5)\,.$$

Cela prouve que $b_n \equiv 4\ (5)$ pour tout $n \geq 1$.

• Si $n > 0$, $b_{-n} = -5^n \sin n\alpha = -b_n \equiv -4 \equiv 1\ (5)\,.$

II.2.a. Notons $A = (a_{ij})$, ..., $D = (d_{ij})$. Si $A \equiv B$ et $C \equiv D$, a_{ij} et c_{ij} sont respectivement congrus à b_{ij} et d_{ij} et

$$\forall i,j \in [1..3] \quad AC\,[i,j] = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}c_{kj} \equiv \sum_{k=1}^{3} b_{ik}d_{kj} = BD\,[i,j]\,.$$

Cela montre que $AC \equiv BD$.

II.2.b. • Puisque

$$R^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha & 0 \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on trouve

$$5^{|k|}R^k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k & 0 \\ b_k & a_k & 0 \\ 0 & 0 & 5^{|k|} \end{pmatrix}.$$

Il suffit d'appliquer **II.1.d** et **II.1.e** pour obtenir les écritures annoncées. Le calcul est identique pour $5^{|k|}T^k$.

• $R^k = I_3$ entraîne

$$5^{|k|}I_3 \equiv \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } 5^{|k|} = 0, \text{ et } k = 0.$$

Il n'existe donc aucun entier k différent de 0 tel que $R^k = I_3$. On montrerait la même chose avec T^k.

Remarque : Les matrices R et T ne sont donc pas d'ordre multiplicatif fini.

II.2.c. Puisque la relation $\equiv$ est compatible avec la multiplication matricielle,

$$\begin{aligned}
5^{|m|+|n|}T^m R^n &= 5^{|m|}T^m \times 5^{|n|}R^n \\
&\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_m \\ 0 & -\varepsilon_m & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon_n & 0 \\ -\varepsilon_n & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3\varepsilon_n & 9 & 0 \\ \varepsilon_m\varepsilon_n & -3\varepsilon_m & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_m\varepsilon_n & 2\varepsilon_m & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

II.2.d. On raisonne par récurrence sur n. La propriété est vraie au rang $n = 1$ (c'est le résultat de la question précédente). Si elle est vraie jusqu'au rang $n-1$,

$$\begin{aligned}
5^q T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} &= \left(5^{q-|a_n|-|b_n|} T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_{n-1}} R^{b_{n-1}}\right) \times 5^{|a_n|+|b_n|} T^{a_n} R^{b_n} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 \\ c' & d' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_{b_n} & 4 & 0 \\ \varepsilon_{a_n}\varepsilon_{b_n} & 2\varepsilon_{a_n} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2b'\varepsilon_{b_n} & 4b' & 0 \\ 2d'\varepsilon_{b_n} & 4d' & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où aucun des entiers primés n'est congru à 0. Il suffit de poser $a = 2b'\varepsilon_{b_n}$, $b = 4b'$, $c = 2d'\varepsilon_{b_n}$, $d = 4d'$ et de voir qu'aucun de ces entiers n'est congru à 0 (prenons par exemple le cas de a : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps, donc $a \equiv 0$ (5) si et seulement si 2, b' ou ε_{b_n} est congru à 0, ce qui n'est pas le cas) pour conclure.

II.2.e. • Si l'on avait $T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} = I_3$, on aurait

$$5^q I_3 = 5^q T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $c \equiv 0$ (5), en contradiction avec la question précédente.

• Si l'on avait $T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta} = I_3$, on aurait

$$T^{\beta}\left(T^{a_1} R^{b_1} ... T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta}\right) T^{-\beta} = I_3$$

soit $T^\beta T^{a_1}R^{b_1}...T^{a_n}R^{b_n} = I_3$, ce qui est impossible d'après le premier point.

II.3. • Si l'on avait $R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n} = I_3$, et si α désigne un entier non nul distinct de b_n, on aurait

$$T^\alpha \left(R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n}\right) T^{-\alpha} = I_3$$

soit $T^\alpha R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n-\alpha} = I_3$, en contradiction avec (3).

• Si l'on avait $R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n}R^\beta = I_3$, et si α désigne un entier non nul distinct de β, on aurait

$$T^\alpha \left(R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n}R^\beta\right) T^{-\alpha} = I_3$$

soit $T^\alpha R^{a_1}T^{b_n}...R^{a_n}T^{b_n}R^\beta T^{-\alpha} = I_3$, en contradiction avec (3).

II.4. On sait d'après **I.5.b** que tout élément de $G\backslash\{Id\}$ admet un telle écriture. Montrons l'unicité en raisonnant par l'absurde. Supposons que l'élément g de $G\backslash\{Id\}$ admette deux écritures différentes

$$s_1^{a_1}...s_n^{a_n} = r_1^{b_1}...r_m^{b_m}$$

avec $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{Z}^{*n}$, $(b_1,...,b_m) \in \mathbb{Z}^{*m}$, $s_i \neq s_{i+1}$ et $r_j \neq r_{j+1}$ pour tous $i \in \{1,...,n\}$ et $j \in \{1,...,m\}$. Posons

$$k = \begin{cases} 0 \text{ si } (s_1 \neq r_1 \text{ ou } a_1 \neq b_1) \\ \operatorname{Max}\{i \in \{1,...,\operatorname{Min}(n,m)\} \ / \forall j \in \{1,...,i\} \ s_i = r_i \text{ et } a_i = b_i\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'hypothèse suivant laquelle les deux écritures de g sont différentes impose $k < \operatorname{Max}(n,m)$, et l'on obtient $s_{k+1}^{a_{k+1}}...s_n^{a_n} = r_{k+1}^{b_{k+1}}...r_m^{b_m}$, soit

$$r_m^{-b_m}...r_{k+1}^{-b_{k+1}}s_{k+1}^{a_{k+1}}...s_n^{a_n} = Id_E$$

avec $s_{k+1} \neq r_{k+1}$ ou $a_{k+1} \neq b_{k+1}$. De deux choses l'une :

► Si $s_{k+1} \neq r_{k+1}$, on obtient l'égalité $r_m^{-b_m}...r_{k+1}^{-b_{k+1}}s_{k+1}^{a_{k+1}}...s_n^{a_n} = Id_E$,

► Si $s_{k+1} = r_{k+1}$ et $a_{k+1} \neq b_{k+1}$, alors $r_m^{-b_m}...r_{k+2}^{-b_{k+2}}s_{k+1}^{a_{k+1}-b_{k+1}}...s_n^{a_n} = Id_E$.

Dans tous les cas, il y a contradiction avec **II.2.b**, (2), (3), (4) ou (5).

II.5. *Première solution* : Soit Θ l'ensemble formé par les deux suites "alternées" $(\rho,\tau,\rho,\tau,...)$ et $(\tau,\rho,\tau,\rho,...)$. A chacune des suites $s = (s_1,...,s_i,...)$ de Θ, on associe l'application

$$\begin{array}{rccc} f_s: & E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}((\mathbb{Z}^*)^n \cup \{(0,...,0)\}) & \to & \mathbf{G} \\ & (a_1,...,a_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n & \mapsto & s_1^{a_1}...s_n^{a_n} \\ & (0,...,0) & \mapsto & Id. \end{array}$$

Puisque E est dénombrable (E est infini et c'est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, le produit cartésien $(\mathbb{Z}^*)^n$ étant dénombrable comme produit d'ensembles dénombrables), l'image $\mathbf{G}_s$ de E par f_s est au plus dénombrable (d'après le rappel du début du problème : "L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable" ; notons au passage que, dans ce rappel, la conclusion aurait dû être "est un ensemble au plus dénombrable", c'est-à-dire ou bien un ensemble fini, ou bien un ensemble dénombrable). L'ensemble $\mathbf{G} = \bigcup_{s\in\Theta} \mathbf{G}_s$ sera alors au plus dénombrable comme réunion finie d'ensembles au plus dénombrables. Comme $\mathbf{G}$ est infini d'après **II.2.b**, ce sera bien un ensemble dénombrable.

Seconde solution : On a $\mathbf{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{G}_n$ où

$$\mathbf{G}_n = \left\{ s_1^{a_1}...s_n^{a_n} \;/\; (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ et } (s_1, ..., s_n) \in \{\rho, \tau\}^n \right\}.$$

L'application

$$\begin{array}{cccc} \xi_n : & \mathbb{Z}^n \times \{\rho,\tau\}^n & \to & \mathbf{G}_n \\ & ((a_1, ..., a_n), (s_1, ..., s_n)) & \mapsto & s_1^{a_1}...s_n^{a_n} \end{array}$$

est surjective et d'ensemble de départ $\mathbb{Z}^n \times \{\rho,\tau\}^n$ dénombrable, donc $\mathbf{G}_n$ est au plus dénombrable. L'ensemble $\mathbf{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{G}_n$ est alors au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. On conclut comme dans la première solution : puisque $\mathbf{G}$ est infini, ce sera nécessairement un ensemble dénombrable.

II.6.a. Tout élément g de $\mathbf{G}\backslash\{Id\}$ s'écrit de façon unique $g = s_1^{a_1}...s_n^{a_n}$, avec bien entendu $s_1 \in \{\rho,\tau\}$ et $a_1 \in \mathbb{Z}^*$. Si $a_1 > 0$, $t(g) = s_1$, et si $a_1 < 0$, $t(g) = s_1^{-1}$. L'élément g appartiendra donc à une et une seule partie parmi

$$\{Id\}, \quad L(\rho), \quad L(\rho^{-1}), \quad L(\tau), \quad L(\tau^{-1}).$$

Puisque aucune de ces parties n'est vide, cela signifie que

$$\mathbf{G} = \{Id\} \cup L(\rho) \cup L(\rho^{-1}) \cup L(\tau) \cup L(\tau^{-1})$$

et que l'on a trouvé une partition de $\mathbf{G}$.

II.6.b. Tout élément de $L(\rho)$ s'écrit de façon unique $g = \rho^{a_1} s_2^{a_2}...s_n^{a_n}$ avec $a_1 > 0$. Donc $g = \rho h$ où $h = \rho^{a_1-1} s_2^{a_2}...s_n^{a_n}$ appartient à l'un seulement des ensembles de la partition du **II.6.a**, excepté $L(\rho^{-1})$. Donc

$$L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L(\tau^{-1}),$$

et l'on obtient une partition de $L(\rho)$.

II.6.c. Tout d'abord

$$L(\rho) \cup \rho L\left(\rho^{-1}\right) = L(\rho) \cup \rho\left(\left\{\rho^{-1}\right\} \cup \rho^{-1} L\left(\rho^{-1}\right) \cup \rho^{-1} L(\tau) \cup \rho^{-1} L\left(\tau^{-1}\right)\right)$$
$$= L(\rho) \cup \{Id\} \cup L\left(\rho^{-1}\right) \cup L(\tau) \cup L\left(\tau^{-1}\right) = \mathbf{G}.$$

Ensuite aucune des parties $L(\rho)$ ou $\rho L\left(\rho^{-1}\right)$ n'est vide. Pour terminer, on vérifie que $L(\rho)$ et $\rho L\left(\rho^{-1}\right)$ sont disjoints. Si $g \in L(\rho) \cap \rho L\left(\rho^{-1}\right)$, il existe $a_1 > 0$ et $b_1 < 0$ tels que $g = \rho^{a_1} ...$ et $g = \rho(\rho^{b_1} ...) = \rho^{b_1+1} ....$

Alors $\rho^{a_1} ... = \rho^{b_1+1} ....$ avec $a_1 > 0$ et $b_1 + 1 \leq 0$, ce qui contredit l'unicité de l'écriture de g démontrée en **II.4**.

PARTIE III : ETUDE DE SOUS-ENSEMBLES DE S^2

III.1. $F = \bigcup_{g \in \mathbf{G} \setminus \{Id\}} \left\{v \in S^2 \,/\, g(v) = v\right\}$ est dénombrable comme une réunion dénombrable d'ensembles finis. En effet, $\mathbf{G}$ est dénombrable d'après **II.5**, et les seuls vecteurs v de S^2 invariants par une rotation g donnée sont ceux de l'axe de la rotation (il y en a donc exactement deux, et ils sont opposés). L'ensemble X n'est pas vide. Dans le cas contraire, F serait équipotent à S^2 qui n'est pas dénombrable (en effet S^2 privé d'un point est en bijection avec le plan affine $\mathbb{R}^2$, comme on le voit en prenant une projection stéréographique).

III.2. On remarque d'abord que $\|v\| = 1$ entraîne $\|g(v)\| = 1$ (puisque g est une isométrie vectorielle) et donc $g(v) \in S^2$. L'application g transforme donc des vecteurs de S^2 en des vecteurs de S^2. Montrer l'implication

$$v \in X \Rightarrow g(v) \in X$$

revient alors à prouver que

$$\left(\begin{array}{l} v \text{ ne dirige pas l'axe} \\ \text{d'une rotation de } \mathbf{G} \setminus \{Id\} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} g(v) \text{ ne dirige pas l'axe} \\ \text{d'une rotation de } \mathbf{G} \setminus \{Id\} \end{array}\right).$$

On va montrer la contraposée de cette dernière implication. Supposons que $g(v)$ dirige l'axe de $h \in \mathbf{G} \setminus \{Id\}$. Dans ce cas $h(g(v)) = g(v)$, d'où

$$g^{-1} h g(v) = v$$

et v dirige l'axe de la rotation $g^{-1}hg$ qui appartient bien à $\mathbf{G} \setminus \{Id\}$.

III.3. L'égalité $g(v) = h(v)$ entraîne $h^{-1}g(v) = v$. Si $h^{-1}g$ était différente de l'identité, v serait un vecteur directeur de l'axe de la rotation $h^{-1}g$ qui appartient bel et bien à $\mathbf{G} \setminus \{Id\}$, ce qui contredit l'hypothèse $v \in X$. Donc $h^{-1}g = Id$ et $g = h$.

III.4.a. L'application

$$\begin{array}{rccc} g_X : & X & \rightarrow & X \\ & v & \mapsto & g(v) \end{array}$$

- est bien définie puisque ($v \in X \Rightarrow g(v) \in X$) comme démontré en **III.2**.

- est injective puisque ($g(v) = g(w) \Rightarrow v = w$) (on utilise le caractère bijectif de g).

- est surjective car si $w \in X$, **III.2** donne $g^{-1}(w) \in X$, d'où

$$g_X\left(g^{-1}(w)\right) = g\left(g^{-1}(w)\right) = w,$$

et par conséquent $w \in g_X(X)$.

III.4.b. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbf{G} & \rightarrow & \mathfrak{S}(X) \\ & g & \mapsto & g_X \end{array}$$

est bien définie et c'est un homomorphisme de groupes puisque pour tout $v \in X$,

$$\begin{aligned} \Psi(gh)(v) &= (gh)(v) \\ &= g(h(v)) = g_X(h(v)) = (g_X \circ h_X)(v) = (\Psi(g) \circ \Psi(h))(v) \end{aligned}$$

soit $\Psi(gh) = \Psi(g) \circ \Psi(h)$. Ce morphisme est injectif parce que son noyau est réduit à $\{Id\}$. En effet

$$\Psi(g) = Id \Rightarrow (\forall v \in X \quad g(v) = v) \underset{\textbf{(III.3)}}{\Rightarrow} g = Id.$$

III.5. La relation $\sim_{\mathbf{G}}$ est :

- réflexive puisque $a \sim_{\mathbf{G}} a$ (en effet $a = Id(b)$ et $Id \in \mathbf{G}$).
- symétrique puisque

$$\begin{aligned} a \sim_{\mathbf{G}} b &\Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{G} \quad a = g(b) \\ &\Leftrightarrow \exists g^{-1} \in \mathbf{G} \quad b = g^{-1}(b) \Leftrightarrow b \sim_{\mathbf{G}} a. \end{aligned}$$

- transitive puisque

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{l} a \sim_{\mathbf{G}} b \\ b \sim_{\mathbf{G}} c \end{array}\right\} &\Rightarrow \exists g, h \in \mathbf{G} \quad a = g(b) \text{ et } b = h(c) \\ &\Rightarrow \exists g, h \in \mathbf{G} \quad a = gh(c) \\ &\Rightarrow \exists l \in \mathbf{G} \quad a = l(c) \\ &\Rightarrow a \sim_{\mathbf{G}} c. \end{aligned}$$

III.6. Posons $X/\sim_{\mathbf{G}}=\left\{\dot{v}_i\right\}_{i\in I}$ et $M=\{v_i\}_{i\in I}$. Les trois points suivants prouvent que $(g(M))_{g\in\mathbf{G}}$ est une partition de X.

• On a $X=\bigcup_{g\in\mathbf{G}} g(M)$. L'inclusion $X\supset\bigcup_{g\in\mathbf{G}} g(M)$ est triviale. Réciproquement, si $v\in X$, il existe $i\in I$ tel que $v\sim_{\mathbf{G}} v_i$, et donc il existe $g\in\mathbf{G}$ tel que $v=g(v_i)\in g(M)$.

• Les parties $g(M)$ sont disjointes deux à deux. En effet,

$$\begin{aligned} v\in g(M)\cap h(M) &\Rightarrow \exists i,j\quad v=g(v_i)=h(v_j)\\ &\Rightarrow \exists i,j\quad h^{-1}g(v_i)=v_j\\ &\Rightarrow v_i\sim_{\mathbf{G}} v_j. \end{aligned}$$

Comme v_i et v_j représentent deux classes distinctes modulo $\sim_{\mathbf{G}}$ dès que $i\neq j$, on aura $i=j$, d'où $h^{-1}g(v_i)=v_i$. Dans ce cas, les deux rotations $h^{-1}g$ et Id de $\mathbf{G}$ coïncident en $v_i\in X$, et **III.3** entraîne $h^{-1}g=Id$, d'où $g=h$.

• Pour tout $g\in\mathbf{G}$ la partie $g(M)$ n'est pas vide (en effet $M\neq\emptyset$ et g est une application de E dans E).

III.7.a. La question précédente montre que $(g(M))_{g\in\mathbf{G}}$ est une partition de X, donc

$$X=\bigsqcup_{g\in\mathbf{G}} g(M)$$

et il suffit de rappeler que $\left\{\{Id\},L(\rho),L\left(\rho^{-1}\right),L(\tau),L\left(\tau^{-1}\right)\right\}$ est une partition de $\mathbf{G}$ (**II.6.a**) pour obtenir le résultat demandé.

III.7.b. Montrons (6), la preuve de (7) étant identique. D'après la question précédente, on a la partition $X=X_0\cup X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4$, soit

$$X=X_1\cup(X_0\cup X_2\cup X_3\cup X_4),$$

et montrer (6) revient à prouver que $\rho(X_3)=X_0\cup X_2\cup X_3\cup X_4$. On a

$$\begin{aligned} v\in\rho(X_3) &\Leftrightarrow \exists i\quad \exists g\in L\left(\rho^{-1}\right)\quad v=\rho(g(v_i))\\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists i\quad \exists b\leq 0\quad \exists(n,a_2,...,a_n)\in\mathbb{N}^*\times(\mathbb{Z}^*)^{n-1}\\ \exists s_i\in\{\rho,\tau\}\quad v=\rho\left(\rho^{-1}\rho^b s_2^{a_2}...s_n^{a_n}(v_i)\right) \end{array}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists i\quad \exists b\leq 0\quad \exists n,a_2,...,a_n,s_i\quad v=\rho^b s_2^{a_2}...s_n^{a_n}(v_i). \qquad (*) \end{aligned}$$

Avec les notations de $(*)$,

- $b=0$ et $n\geq 2$ équivaut à $v=h(v_i)$ avec $h\in L(\tau)\cup L\left(\tau^{-1}\right)$, i.e. à $v\in X_2\cup X_4$,

- $b=0$ et $n=1$ équivaut à $v=v_i$, i.e. à $v\in X_0$,

- $b < 0$ équivaut à $v = h(v_i)$, avec $h \in L\left(\rho^{-1}\right)$, soit à $v \in X_3$,

et par conséquent $(*)$ équivaut à $v \in X_0 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ comme espéré.

III.8.a. F est dénombrable, donc le produit $F \times F$ aussi. La partie Λ est incluse dans $F \times F$, donc sera encore dénombrable.

III.8.b. $\Gamma_{u,v}$ est l'intersection de la sphère S^2 et de l'ensemble

$$\Pi_{u,v} = \{w \in E \,/\, \|w - u\| = \|w - v\|\}.$$

$\Pi_{u,v}$ est l'ensemble des vecteurs w situés à égale distance de u et v : on reconnaît l'hyperplan affine médiateur du segment $[u, v]$. Comme $u, v \in S^2$, on a $\|0 - u\| = \|0 - v\|$ et 0 appartient à $\Pi_{u,v}$. Le plan $\Pi_{u,v}$ est donc vectoriel et passe par le centre de la sphère S^2. Finalement $\Gamma_{u,v}$ est l'intersection de la sphère S^2 et du plan $\Pi_{u,v}$ médiateur de $[u, v]$, c'est un cercle tracé sur S^2 et centré à l'origine.

III.8.c. • Soit s la symétrie par rapport à l'origine. On a

$$\begin{aligned} v \in F &\Leftrightarrow v \text{ dirige l'axe d'une rotation } g \text{ de } \mathbf{G} \backslash \{Id\} \\ &\Rightarrow -v \text{ aussi} \\ &\Rightarrow s(v) = -v \in F, \end{aligned}$$

donc $s(F) \subset F$. En appliquant s des deux côtés, on obtient $s^2(F) \subset s(F)$ soit $F \subset s(F)$. On a montré l'égalité $s(F) = F$. Par ailleurs $s(\Pi_{u,v}) = \Pi_{u,v}$ et $s\left(S^2\right) = S^2$ puisque le plan $\Pi_{u,v}$ contient 0 et puisque la sphère S^2 est centrée en 0. L'application s étant une isométrie, elle est bijective et

$$s(\Gamma_{u,v}) = s\left(S^2 \cap \Pi_{u,v}\right) = s\left(S^2\right) \cap s(\Pi_{u,v}) = S^2 \cap \Pi_{u,v} = \Gamma_{u,v}.$$

Cela entraîne

$$s(\Gamma) = s\left(\bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}\right) = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} s(\Gamma_{u,v}) = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v} = \Gamma.$$

Finalement $s(\Gamma \cup F) = s(\Gamma) \cup s(F) = \Gamma \cup F$ et $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine.

Autre solution (plus sobre) : L'axe d'une rotation admet deux vecteurs directeurs unitaires opposés donc F est symétrique par rapport à l'origine. L'ensemble $\Gamma_{u,v}$ est un grand cercle de la sphère centrée en O donc il est symétrique par rapport à l'origine. On en déduit que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine.

• Remarquons d'abord que si deux cercles sur S^2 ont trois points communs distincts, u, v et w, alors ils sont confondus comme intersection de S^2 et du plan affine engendré par u, v et w.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle tracé sur S^2 et ne passant pas par l'origine, $\mathcal{C}$ n'est confondu avec aucun cercle $\Gamma_{u,v}$, donc intercepte chacun de ces cercles en au plus deux points. Comme Λ est dénombrable, $\mathcal{C} \cap \Gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} (\mathcal{C} \cap \Gamma_{u,v})$ sera dénombrable. Puisque F est dénombrable, il en est de même de $\mathcal{C} \cap F$ et l'intersection

$$\mathcal{C} \cap (\Gamma \cup F) = (\mathcal{C} \cap \Gamma) \cup (\mathcal{C} \cap F)$$

sera dénombrable comme réunion de deux dénombrables. Puisque $\mathcal{C} \cap S^2 = \mathcal{C}$ n'est pas dénombrable, cela entraîne que $\mathcal{C} \cap (\Gamma \cup F)$ est strictement contenu dans $\mathcal{C} \cap S^2 = \mathcal{C}$, et par conséquent que $\Gamma \cup F$ est strictement contenu dans S^2.

III.8.d. Il suffit de choisir un vecteur v dans $S^2 \backslash (\Gamma \cup F)$ (non vide d'après la question précédente) et une rotation r d'axe $\mathbb{R}v$ et d'angle de mesure $\omega\pi$ où ω est un irrationnel (pour un choix donné de l'orientation du plan orthogonal à la droite $\mathbb{R}v$). Dans ce cas, si $p \in \mathbb{Z}$,

$$r^p = Id \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad p\omega\pi = k2\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad p\omega = k2 \Leftrightarrow p = 0.$$

III.8.e. • Par hypothèse $(u, v) \in F \times F$ donc il existe $f, g \in \mathbf{G} \backslash \{Id\}$ tels que $f(u) = u$ et $g(v) = v$. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $r^k(u) = v$. De deux choses l'une :

► Si $u = v$, l'axe de r^k sera $\mathbb{R}u$, et ce sera aussi l'axe de r. C'est impossible puisque l'axe de r ne rencontre pas $\Gamma \cup F$, et donc pas F.

► Si $u \neq v$, l'axe $\mathbb{R}w$ de r^k est inclus dans l'hyperplan médiateur $\Pi_{u,v}$ de $[u, v]$ puisque

$$\|w - v\| = \|r^k(w) - r^k(u)\| = \|w - u\|.$$

On peut toujours supposer que w appartient à S^2, et dans ce cas

$$w \in S^2 \cap \Pi_{u,v} = \Gamma_{u,v} \subset \Gamma,$$

ce qui est absurde d'après le choix de r.

• On raisonne par l'absurde en supposant $m > n \geq 0$. S'il existait un vecteur x appartenant à $r^n(F) \cap r^m(F)$, il existerait u et v dans F tels que $x = r^n(v) = r^m(u)$, d'où $v = r^{m-n}(u)$ et on est en contradiction avec le début de la question.

III.8.f. Posons-le donc !

III.8.g. Comme F n'est pas vide, de **III.8.e** on déduit que $\{r^n(F)\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partition de Y. Comme F est dénombrable, Y l'est aussi et Z n'est pas vide. De

$$r(Y) = r\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} r^n(F),$$

on déduit

$$S^2 = Y \sqcup Z = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F)\right) \sqcup Z = F \sqcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} r^n(F)\right) \sqcup Z = F \sqcup r(Y) \sqcup Z$$

où $\sqcup$ indique une réunion disjointe. Aucune des parties F, $r(Y)$, Z n'étant vide, la famille $\{F, r(Y), Z\}$ est une partition de S^2, et cela entraîne bien évidemment $r(Y) \cap Z = \emptyset$ et $S^2 \backslash F = r(Y) \cup Z$.

PARTIE IV : EQUIDECOMPOSABILITE

IV.1. S^2 est équidécomposable à $S^2\backslash F$ car :

- $S^2 = Y \bigsqcup Z$ et $S^2\backslash F = r(Y) \bigsqcup Z$ sont des partitions de ces deux ensembles ;
- $r(Y)$ est l'image de Y par la rotation r, qui est un déplacement ;
- Z est l'image de Z par l'identité r, qui est encore un déplacement.

IV.2.a. Par hypothèse, pour $j \in \{1, 2\}$, il existe une partition finie $\{A_{ij}\}_{i\in I_j}$ de A_j, une partition finie $\{B_{ij}\}_{i\in K_j}$ de B_j, et des déplacements g_{ij} tels que $B_{ij} = g_{ij}(A_{ij})$. Puisque les ensembles A_1 et A_2, mais aussi B_1 et B_2, sont disjoints :

- $\{A_{i1}\}_{i\in I_1} \cup \{A_{i2}\}_{i\in I_2}$ est une partition de $A_1 \cup A_2$,
- $\{B_{i1}\}_{i\in K_1} \cup \{B_{i2}\}_{i\in K_2}$ est une partition de $B_1 \cup B_2$,
- toutes ces parties se correspondent via les déplacements g_{ij}.

Ainsi $A_1 \cup A_2$ est équidécomposable à $B_1 \cup B_2$.

IV.2.b. On montre par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

> $\mathcal{P}(n)$: Si A_1, ..., A_n (resp. B_1, ..., B_n) désignent n sous-ensembles de E non vides et disjoints deux à deux, et si $A_j \sim B_j$ pour tout $j \in [1..n]$, alors $A_1 \cup ... \cup A_n \sim B_1 \cup ... \cup B_n$.

La propriété au rang $n = 2$ a été démontrée à la question **IV.2.a**. Si elle est vraie au rang $n-1$, soient A_1, ..., A_n (resp. B_1, ..., B_n) disjoints deux à deux et tels que $A_j \sim B_j$ pour tout $j \in [1..n]$. Posons $A' = A_1 \cup ... \cup A_{n-1}$

et $B' = B_1 \cup ... \cup B_{n-1}$. L'hypothèse récurrente entraîne $A' \sim B'$. Puisque $A' \cap A_n = B' \cap B_n = \varnothing$, $A' \sim B'$ et $A_n \sim B_n$, la question **IV.2.a** donne $A' \cup A_n \sim B' \cup B_n$, autrement dit $A_1 \cup ... \cup A_n \sim B_1 \cup ... \cup B_n$, et la propriété est démontrée au rang n.

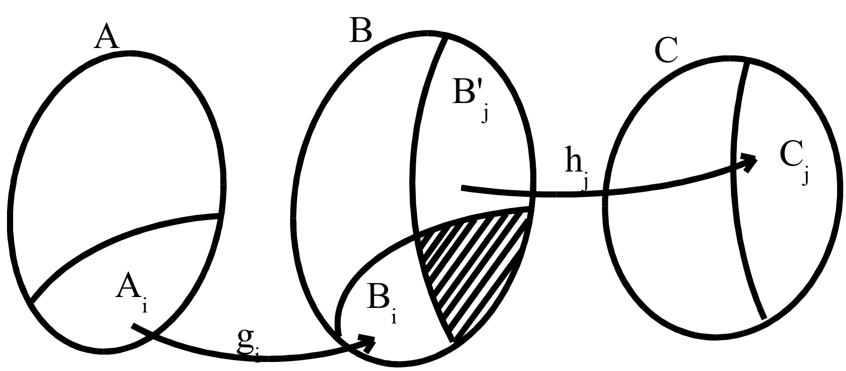
IV.3. La relation est réflexive car $A \sim A$ (on choisit la partition triviale et l'identité comme déplacement) et symétrique ($A \sim B$ entraîne $B \sim A$ de façon évidente, l'inverse d'un déplacement étant encore un déplacement). La preuve de la transitivité est plus délicate. On doit prouver l'implication :

$$\left.\begin{array}{l} A \sim B \\ B \sim C \end{array}\right\} \Rightarrow A \sim C.$$

On suppose donc qu'il existe :

- une partition $\{A_i\}_{i \in I}$ de A, une partition $\{B_i\}_{i \in I}$ de B et des déplacements g_i tels que $g_i(A_i) = B_i$ pour tout i,

- une partition $\{B'_j\}_{j \in J}$ de B, une partition $\{C_j\}_{j \in J}$ de C et des déplacements h_j tels que $h_j(B'_j) = C_j$ pour tout j.



Si $K = \{(i,j) \in I \times J \,/\, B_i \cap B'_j \neq \emptyset\}$, la famille $\{B_i \cap B'_j\}_{(i,j) \in K}$ forme une partition de B. Par suite, $\{g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)\}_{(i,j) \in K}$ est une partition de A. Comme $g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \subset A_i$ pour tout $(i,j) \in K$, on a $g_i(g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)) = B_i \cap B'_j$ et chaque déplacement g_i applique $g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)$ sur $B_i \cap B'_j$.

Comme $h_j(B'_j) = C_j$, $h_j(B_i \cap B'_j) = h_j(B_i) \cap C_j$ et $\{h_j(B_i) \cap C_j\}_{\{i \,/\, (i,j) \in K\}}$ est une partition de C_j, pour tout j fixé. De là on déduit que $\{h_j(B_i) \cap C_j\}_{(i,j) \in K}$ est encore une partition de C. Pour résumer, nous avons trouvé :

- une partition $\{g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)\}_{(i,j) \in K}$ de A,

- une partition $\{h_j(B_i) \cap C_j\}_{(i,j) \in K}$ de C,

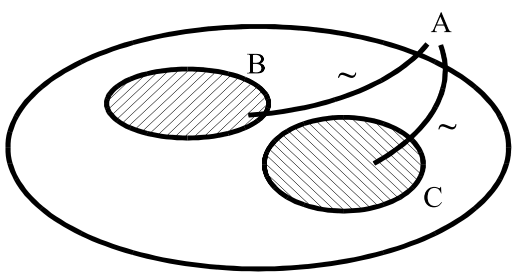
- et des déplacements $h_j \circ g_i$ tels que $(h_j \circ g_i)\left(g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)\right) = h_j(B_i) \cap C_j$ pour tout $(i,j) \in K$,

et cela signifie que $A \sim C$.

IV.4. L'application $\psi : A \to B$ définie par $\psi(x) = g_i(x)$ pour tout $x \in A_i$ (les notations sont celles du début de la partie IV) est une bijection. Posons $I_C = \{i \in I \,/\, C \cap A_i \neq \emptyset\}$. La famille $\{C \cap A_i)\}_{i \in I_C}$ est clairement une partition de C. On peut utiliser ψ pour "transporter" cette partition sur $\psi(C)$, obtenant la partition $\{\psi(C \cap A_i))\}_{i \in I_C}$ de $\psi(C)$, et chaque déplacement g_i vérifie évidemment $g_i(C \cap A_i) = \psi(C \cap A_i)$. Cela prouve que $C \sim \psi(C)$.

PARTIE V : ENSEMBLES PARADOXAUX

V.1. L'ensemble A est paradoxal si et seulement si l'on peut trouver deux sous-ensembles non vides et disjoints B et C de A tels que $B \sim A$ et $C \sim A$.



La question **III.7** permet d'écrire $X = X_1 \cup \rho(X_3)$ avec $X_1 \cap \rho(X_3) = \emptyset$. Si $B = X_1 \cup X_3$, alors I et ρ sont des rotations telles que

$$X_1 \overset{Id}{\longmapsto} X_1 \quad \text{et} \quad X_3 \overset{\rho}{\longmapsto} \rho(X_3),$$

et par conséquent $B \sim X$. La même question permet d'écrire $X = X_2 \cup \tau(X_4)$ avec $X_2 \cap \tau(X_4) = \emptyset$, d'obtenir

$$X_2 \overset{Id}{\longmapsto} X_2 \quad \text{et} \quad X_4 \overset{\tau}{\longmapsto} \tau(X_4),$$

et de conclure à $C \sim X$, en posant $C = X_2 \cup X_4$. Finalement B et C sont non vides et disjoints, et véifient $B \sim X$ et $C \sim X$. cela prouve que X est paradoxal.

V.2. Par hypothèses :

$\star$ A est paradoxal, donc il existe deux sous-ensembles non vides et disjoints U et V de A tels que $U \sim A$ et $V \sim A$.

$\star$ $A \sim B$ donc il existe (d'après **IV.4**) une bijection $\psi : A \to B$ telle que pour tout C inclus dans A, l'on ait $C \sim \psi(C)$.

Les ensembles $\psi(U)$ et $\psi(V)$ sont non vides, inclus dans B, et disjoints puisque

$$\psi(U) \cap \psi(V) = \psi(U \cap V) = \psi(\emptyset) = \emptyset.$$

De plus

$$\begin{cases} (U \sim A) \Rightarrow (\psi(U) \sim U \sim A \sim B) \Rightarrow (\psi(U) \sim B) \\ (V \sim A) \Rightarrow (\psi(V) \sim V \sim A \sim B) \Rightarrow (\psi(V) \sim B), \end{cases}$$

ce qui prouve que B est paradoxal.

V.3.a. Démontrer que $(A \backslash C) \sim A$ revient à démontrer que $(A \backslash C) \preceq A$ et $A \preceq (A \backslash C)$ (d'après le Théorème de Banach-Schröder-Bernstein). La vérification est aisée :

• On a bien $(A \backslash C) \preceq A$, puisqu'il existe une partie B' de A, à savoir $B' = A \backslash C$, telle que $(A \backslash C) \sim B'$ (la relation $\sim$ est réflexive).

• On a $A \preceq (A \backslash C)$, puisque la partie B est incluse dans $A \backslash C$ et vérifie $A \sim B$.

V.3.b. On prend $A_1 = C$ et $A_2 = A \backslash C$. La paire $\{A_1, A_2\}$ est bien une partition de A telle que $A_1 = C \sim A$ (par hypothèse sur C) et $A_2 = A \backslash C \sim A$ (d'après la question précédente).

V.4. Les questions **III.8.f** et **III.8.g** nous donnent deux partitions

$$S^2 = Y \bigsqcup Z \quad \text{et} \quad X = S^2 \backslash F = r(Y) \bigsqcup Z$$

de S^2 et X. Comme $r(Y)$ se déduit de Y par la rotation r et comme Z se déduit de Z par l'identité (qui est bien un déplacement), on obtient $S^2 \sim X$, et puisque X est paradoxal (**V.1**), S^2 sera aussi paradoxal (**V.2**).

V.5. La sphère S^2 est paradoxale, donc admet une partition $S^2 = A_1 \bigsqcup A_2$ avec $A_1 \sim S^2$ et $A_2 \sim S^2$ (d'après **V.3.b**). Une simple translation fait passer de S^2 à Σ_i ($1 \leq i \leq 2$), ce qui prouve que $S^2 \sim \Sigma_1$ et $S^2 \sim \Sigma_2$. Par transitivité

$$A_1 \sim \Sigma_1 \quad \text{et} \quad A_2 \sim \Sigma_2.$$

Puisque $\{A_1, A_2\}$ (resp. $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$) est une partition de S^2 (resp. $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$), la question **IV.2** permet d'écrire $S^2 \sim (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ comme escompté.

Je remercie Marie-Claude David pour ses remarques et ses apports pertinents concernant les questions I.2.a, I.2.b, II.4, III.8.c, III.8.e et III.8.g.

13.3 Complément : que dit le rapport du jury ?

Citons ici les commentaires sur le "contenu du sujet" figurant dans le rapport du jury sur le CAPES externe 2004.

"Le problème d'algèbre-géométrie de la session 2004 avait pour but l'étude des notions d'équidécomposabilité et d'ensembles paradoxaux dans un cadre euclidien. L'objectif final était d'obtenir une preuve de la forme faible du théorème de Banach-Tarski concernant le caractère paradoxal de la sphère unité dans un espace affine eucidien de dimension trois. Le lecteur intéressé par ces notions pourra consulter avec profit l'excellent livre de Stan Wagon : The Banach-Tarski paradox (Cambridge University Press).

• La partie préliminaire consistait à redémontrer quelques propriétés élémentaires de théorie des ensembles. Beaucoup de candidats ne s'aperçoivent pas que le point essentiel dans la démonstration de la propriété (iv) est l'injectivité de l'application f.

• La partie I présentait quelques propriétés des rotations vectorielles d'un espace vectoriel euclidien de dimension trois. Seule la dernière question de cette partie était délicate.

• La partie II avait pour objectif la construction d'un groupe libre engendré par deux éléments de SO (3). Cette partie nécessitait quelques connaissances de base concernant le raisonnement par récurrence, les congruences dans $\mathbb{Z}$ ainsi qu'une certaine pratique du calcul matriciel dans le groupe SO (3). Le jury a pu constater que dans de trop nombreuses copies la rédaction des raisonnements par récurrence était très approximative. Par ailleurs le calcul des puissances d'une matrice telle que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est évident dès que l'on interprète géométriquement ce calcul.

• La partie III mettait en place un sous-ensemble X de S^2 sur lequel le groupe SO (E) opère fidèlement. On faisait également démontrer que cet ensemble X était paradoxal pour l'action du groupe SO (E). Le caractère non dénombrable de la sphère S^2 ainsi que l'utilisation de l'axiome du choix sont les clefs de l'obtention de ces résultats.

• Enfin les parties IV et V proposaient une étude de l'équidécomposabilité ainsi que de la notion d'ensemble paradoxal. Le caractère paradoxal de la sphère S^2 concluait le sujet. Signalons que le véritable théorème de Banach-Tarski montre que les boules de E sont paradoxales, grâce à quoi il est possible de prouver un résultat encore plus remarquable : deux sous-ensembles de E qui sont bornés et d'intérieur non vides sont équidécomposables."

Chapitre 14

CAPES externe 2005, épreuve 2 (annulée)

14.1 Énoncé

Notations

$\mathcal{P}$ est un plan euclidien. Étant donné deux points distincts A et B du plan $\mathcal{P}$, on note $]AB[$ le segment $[AB]$ privé de ses extrémités.

Si Γ est un cercle de centre Ω, de rayon R, on appellera « intérieur du cercle Γ » et on notera $\mathcal{I}(\Gamma)$ le disque ouvert, de centre Ω, de rayon R qui est limité par Γ. On a donc $\mathcal{I}(\Gamma) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M < R\}$. De même, l'extérieur du cercle Γ, noté $\mathcal{E}(\Gamma)$ est l'ensemble : $\mathcal{E}(\Gamma) = \{M \in \mathcal{P} \,/\, \Omega M > R\}$

Recommandations importantes

Les sept parties de ce problème sont très largement dépendantes. Il est recommandé de les traiter dans l'ordre, mais on pourra toujours admettre un résultat pour continuer le problème.

Dans ce problème, on demande plusieurs fois de proposer une *construction géométrique* d'une figure ou d'un élément d'une figure. Ceci signifie que l'on demande une suite d'instructions permettant de réaliser de façon théorique cette figure ou cet élément à l'aide de la règle et du compas. *On réalisera effectivement cette construction dans une figure.*

Cependant, on supposera connues, on ne détaillera pas et on pourra utiliser sans explication les constructions géométriques élémentaires classiques suivantes :

- tracé de la médiatrice ou du milieu d'un bipoint ;
- tracé du cercle passant par trois points non alignés ;
- tracé de la parallèle à une droite passant par un point donné ;
- tracé de la perpendiculaire à une droite passant par un point donné.

Partie I : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit Γ un cercle de $\mathcal{P}$ de centre Ω, de rayon $R > 0$.

1. Soit M un point de $\mathcal{P}$, et soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M et coupant Γ en deux points T_1 et T_2. On pose

$$p_{[\mathcal{D},\Gamma]}(M) = \overline{MT_1} \cdot \overline{MT_2}.$$

   Montrer que $p_{[\mathcal{D},\Gamma]}(M) = \Omega M^2 - R^2$ donc que $p_{[\mathcal{D},\Gamma]}(M)$ ne dépend pas de la droite sécante $\mathcal{D}$. (On pourra, introduire le point H, projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$).
   Dans cette situation, on pose $p_\Gamma(M) = p_{[\mathcal{D},\Gamma]}(M)$ (quelle que soit la droite $\mathcal{D}$ passant par M et coupant Γ en deux points) et on appelle cette quantité $p_\Gamma(M)$ la *puissance du point M par rapport au cercle* Γ.

2. Quel rapport y a-t-il entre le signe de la puissance d'un point M par rapport à un cercle Γ et sa position dans le plan ?

3. Quelle est la puissance du centre d'un cercle par rapport à ce cercle ?

4. Soit Γ un cercle et soit $\mathcal{D}_0$ une droite passant par M et tangente au cercle Γ en un point T. Que peut-on dire du point M si une telle droite $\mathcal{D}_0$ existe ? $\mathcal{D}_0$ est-elle unique ?
   Montrer que $p_\Gamma(M) = MT^2$.

5. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en deux points A et B. Montrer que la droite (AB) est exactement l'ensemble de tous les points M du plan qui vérifient la relation $p_{\Gamma_1}(M) = p_{\Gamma_2}(M)$.

6. Déterminer la nature de l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles lorsque ceux-ci ne sont pas forcément sécants. Que peut-on en dire si les deux cercles sont tangents ?

7. $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit Γ un cercle dont l'équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ est $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Déterminer la puissance du point O (origine du repère) par rapport à ce cercle.

Partie II : Construction d'une $\prod$-droite

Dans cette partie, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R, et $\prod$ le disque ouvert limité par $\mathcal{C}$ et A et B sont deux points distincts de $\prod$.

Le but de cette partie est de montrer qu'en général, pour toute paire $\{A, B\}$ de points du disque ouvert $\prod$, il y a existence et unicité, d'un cercle Γ passant par A et B, et coupant $\mathcal{C}$ en deux points *diamétralement opposés,* tout en proposant une construction géométrique de ce cercle Γ.

1. On suppose que A et B sont situés sur un même diamètre du cercle $\mathcal{C}$. Montrer qu'aucun cercle passant par A et B ne rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés. (On pourra calculer de deux manières la puissance de O par rapport à un cercle Γ qui passerait par A et B et qui couperait $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés).
2. On suppose que A et B ne sont pas situés sur un même diamètre et que $OA = OB$. Montrer dans ce cas l'existence et l'unicité d'un cercle Γ qui passe par A et B et qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés. Proposer une construction géométrique de ce cercle.
3. On suppose que $OA \neq OB$ et que A et B ne sont pas sur un même diamètre. On suppose qu'il existe un cercle Γ, de centre Ω, qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2.
   (a) Montrer que (AB) rencontre (T_1T_2) en un point unique S.
   (b) Comparer $p_{\mathcal{C}}(S)$ et $p_{\Gamma}(S)$.
   (c) Soit Γ' un cercle quelconque passant par A et B et rencontrant $\mathcal{C}$ en deux points U_1 et U_2 distincts. Comparer la puissance de S par rapport aux cercles $\mathcal{C}$, Γ et Γ' et en déduire que $S \in (U_1U_2)$.
   (d) Lorsqu'on ne connaît pas le cercle Γ, déduire de ce qui précède une construction géométrique du point S, puis du cercle Γ.
   (e) Justifier l'existence et l'unicité de Γ.
4. Autre démonstration de l'existence et l'unicité de Γ :
   Dans cette question, le plan euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O, de rayon $R = 1$.
   (a) Montrer qu'un cercle Γ (distinct de $\mathcal{C}$) rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés si et seulement si $p_{\Gamma}(O) = -1$.
   (b) En déduire une méthode analytique pour montrer l'existence et l'unicité de Γ en en déterminant une équation cartésienne puis son centre. Comment, dans cette méthode, reconnaît-on que les coordonnées de A et B sont telles qu'on est dans le cas particulier étudié à la question 1 ?

Partie III : Un problème de lieu géométrique

Dans cette partie, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, de rayon R, et A est un point distinct de O, situé dans le disque ouvert $\prod$ limité par $\mathcal{C}$. Le but de cette partie est de déterminer le lieu $\mathcal{L}$ des centres des cercles qui passent par A et qui coupent $\mathcal{C}$ selon deux points diamétralement opposés, puis d'en déduire une autre construction du cercle Γ de la partie **II**.

1. Soit $[T_0T_0']$ le diamètre de $\mathcal{C}$ perpendiculaire à (OA). Soit Γ_0 le cercle circonscrit au triangle $T_0T_0'A$, et Ω_0 son centre. Soit Ω un point de la perpendiculaire Δ à $(O))$ qui passe par Ω_0. Soit $[T_1T_2]$ le diamètre de $\mathcal{C}$ qui est perpendiculaire à (ΩO).
   (a) Montrer que $\Omega T_i = \Omega A$ pour $i = 1, 2$.
   (b) En déduire que $\Delta \subset \mathcal{L}$.
2. Montrer l'inclusion réciproque.
3. Déduire de cette étude une nouvelle construction géométrique du cercle Γ qui passe par deux points A et B (non situés sur un même diamètre) du disque $\prod$, et qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés.

Partie IV : Un « plan » étonnant

On se place toujours dans un plan euclidien $\mathcal{P}$.
On considère l'ensemble $\prod = \mathcal{I}(\mathcal{C})$, qui est le disque ouvert limité par le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle $\prod$-droite un sous-ensemble de $\prod$ qui est d'un des deux types suivants :

– soit c'est l'intersection de $\prod$ avec un cercle Γ (distinct de $\mathcal{C}$) qui passe par deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$;
– soit c'est l'intersection de $\prod$ avec un diamètre de $\mathcal{C}$.

Le cercle [respectivement la droite] qui contient tous les points d'une $\prod$-droite est le support de la $\prod$-droite.

1. Justifier que par deux points distincts de $\prod$ passe une unique $\prod$-droite. L'unique $\prod$-droite passant par les deux points distincts A et B de $\prod$ sera notée $((AB))$.
2. Deux $\prod$-droites seront dites $\prod$-parallèles lorsqu'elles sont confondues ou que leur intersection est vide.
   (a) Montrer que si les supports de deux $\prod$-droites se coupent en deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$, alors ces $\prod$-droites sont $\prod$-parallèles.

(b) Soit $U =]T_0T_0'[$ une $\prod$-droite dont le support est un diamètre de $\mathcal{C}$ et soit V une $\prod$-droite dont le support est un cercle Γ qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2 (non confondus avec T_0 ou T_0').
En considérant la puissance de O par rapport à Γ, montrer que O est intérieur au cercle Γ puis que la $\prod$-droite $]T_0T_0'[$ rencontre la $\prod$-droite dont le support est Γ en un point unique.

(c) Montrer que si Γ et Γ' sont deux cercles coupant $\mathcal{C}$ en des couples différents de points diamétralement opposés respectivement (T_1, T_2) pour Γ, (T_1', T_2') pour Γ', alors Γ et Γ' se coupent en deux points d'un diamètre de $\mathcal{C}$, dont un seul est dans $\prod$ (on pourra considérer des équations cartésiennes de ces cercles).

(d) Montrer que si deux $\prod$-droites non confondues sont $\prod$-parallèles, alors leurs supports se coupent en deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$.

(e) Montrer que la relation de $\prod$-parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des $\prod$-droites.

3. Montrer que si deux $\prod$-droites ne sont pas $\prod$-parallèles, alors leur intersection est un singleton.

4. Montrer qu'étant donnés un point A de $\prod$ et une $\prod$-droite U, il existe une unique $\prod$-droite V qui est $\prod$-parallèle à U et qui passe par A.
L'ensemble $\prod$ vérifie donc deux axiomes classiques d'incidence dans un plan affine.
Pour compléter l'étude de ce « plan », les parties suivantes vont montrer qu'il peut être mis en bijection avec un plan usuel.

Partie V : Grands cercles d'une sphère et droites d'un plan

Dans cette partie, $\prod_0$ désigne le plan d'équation $z = 1$ dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}' = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, et $\mathcal{P}$ désigne le plan d'équation $z = 0$; un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$ est donc $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$\sum$ désigne la sphère unité, d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et $\sum^+$ désigne le sous-ensemble de $\sum$ formé des points M dont la troisième coordonnée z dans le repère $\mathcal{R}'$ est strictement positive.

On rappelle qu'un grand cercle d'une sphère est l'intersection d'un plan passant par le centre de la sphère avec cette sphère.

$\mathcal{C}$ désigne le cercle du plan $\mathcal{P}$ qui a pour centre O et pour rayon 1. $\mathcal{C}$ est donc aussi un grand cercle de $\sum$.

1. Montrer que l'intersection de deux grands cercles non confondus de $\sum$ consiste toujours en deux points diamétralement opposés pour $\sum$.
2. Soit $\mathcal{Q}$ un plan passant par O, distinct de $\mathcal{P}$. Quelle est l'intersection de $\mathcal{Q}$ avec $\sum$? Et avec $\sum^+$? Et avec $\mathcal{C}$?
3. Montrer qu'on définit correctement une application φ entre $\prod_0$ et $\sum^+$ en associant à chaque point M de $\prod_0$ le point d'intersection M' de la droite (OM) avec $\sum^+$. Montrer que φ est une bijection entre $\prod_0$ et $\sum^+$.
4. Montrer que l'image d'une droite affine de $\prod_0$ par φ est un « demi-grand-cercle » de $\sum$. Définir avec précision cette notion de « demi-grand-cercle ».
   Caractériser analytiquement l'image par φ d'une droite d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}'$:
$$\left\{ \begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ z=1 \end{array} \right. \qquad \text{(avec } (a,b)\neq(0,0)\text{)}.$$

Partie VI : Une autre correspondance entre sphère et plan

Les notations sont les mêmes que dans la partie **V**. $\sum^*$ désigne la sphère $\sum$ privée de son « pôle sud », c'est-à-dire du point S de coordonnées $(0,0,-1)$.

1. Montrer qu'on définit correctement une application ψ entre $\sum^*$ et $\mathcal{P}$ en associant à chaque point M de $\sum^*$ le point d'intersection M' de la droite (SM) avec $\mathcal{P}$. ψ est-elle bijective ?
2. Soit M un point de $\sum^*$ de coordonnées (x,y,z) (dans $\mathcal{R}'$). Déterminer en fonction de (x,y,z) les coordonnées (x',y',z') de $M'=\psi(M)$.
3. Soit N un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$. Déterminer en fonction de (x,y) les coordonnées (X,Y,Z) de l'antécédent éventuel M de N par ψ.
4. Montrer qu'un grand cercle de $\sum$ peut être caractérisé par un système d'équations du type
$$\left\{ \begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{array} \right. \qquad \text{(avec } (a,b,c)\neq(0,0,0)\text{)}.$$
5. Montrer que l'image par ψ d'un grand cercle de $\sum$ ne passant pas par S est un cercle de $\mathcal{P}$. Quelle est l'image par ψ de l'intersection avec $\sum^*$ d'un grand cercle de $\sum$ passant par S ?

6. Soit $\mathcal{D}$ un grand cercle de $\sum$ et soit $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \cap \sum^*$. Que peut-on dire de l'intersection de $\psi(\mathcal{D}^*)$ avec $\mathcal{C}$?
7. On appelle ψ^+ la restriction de ψ à $\sum^+$. Montrer que ψ^+ réalise une bijection de $\sum^+$ vers le disque ouvert $\prod$ limité par $\mathcal{C}$.
8. Montrer que l'image d'un « demi-grand-cercle » (voir **V.3.**) par ψ^+ est une $\prod$-droite (voir partie **IV**).

Partie VII : Synthèse et Application

Les notations sont celles des parties précédentes.

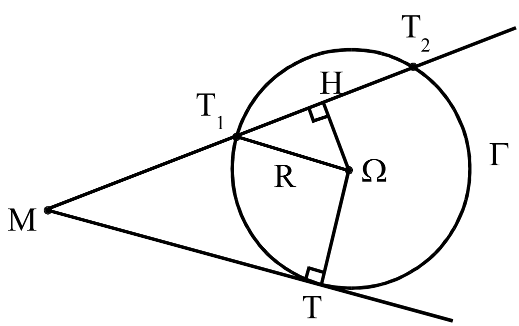
1. Démontrer l'existence d'une bijection h du plan affine $\prod_0$ vers l'ensemble $\prod$ induisant une bijection entre l'ensemble des droites de $\prod_0$ et l'ensemble des $\prod$-droites et conservant le parallélisme (en ce sens que deux droites parallèles de $\prod_0$ sont transformées en deux $\prod$-droites $\prod$-parallèles).
2. Donner des formules analytiques de h, c'est-à-dire un système exprimant les coordonnées (x', y') dans le repère $\mathcal{R}$ de l'image $h(M)$ d'un point M en fonction de ses coordonnées $(x, y, 1)$ dans $\mathcal{R}'$.
3. Inverser le système précédent pour obtenir en fonction des coordonnées d'un point M celles de $h^{-1}(M)$.
4. Voici une *Définition du $\prod$-milieu de deux points de $\prod$.*
Soient A et B deux points de $\prod$.. Soit C un point quelconque de $\prod$, non situé sur $((AB))$. On considère le point D, intersection de la $\prod$-droite qui passe par B et qui est $\prod$-parallèle à $((AC))$ et de la $\prod$-droite qui passe par A et qui est $\prod$-parallèle à $((BC))$. On appelle $\prod$-milieu de la paire $\{A, B\}$ le point I intersection des $\prod$-droites $((AB))$ et $((CD))$.
En utilisant la bijection h, démontrer que cette définition est correcte : on vérifiera que les $\prod$-droites $((AB))$ et $((CD))$ ne sont pas $\prod$-parallèles, et que cette définition ne dépend pas du point C arbitrairement choisi.
5. Soit A le point de $\prod$ de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$. Donner une construction géométrique détaillée du $\prod$-milieu I de $\{A, B\}$ (On fera une figure en prenant 8 cm comme unité).
6. Donner les coordonnées des points $A' = h^{-1}(A)$, $B' = h^{-1}(B)$ et $I' = h^{-1}(I)$. En déduire les coordonnées de I dans le repère $\mathcal{R}$.

14.2 Corrigé

Partie I : Puissance d'un point par rapport à un cercle

1. En utilisant deux fois le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\overline{MT}_1.\overline{MT}_2 &= \left(\overline{MH}+\overline{HT}_1\right)\left(\overline{MH}+\overline{HT}_2\right)\\ &= MH^2 - HT_1^2\\ &= \left(M\Omega^2-\Omega H^2\right)-\left(T_1\Omega^2-\Omega H^2\right)\\ &= M\Omega^2 - r^2.\end{aligned}$$



2. On a

$$p_\Gamma(M)>0 \Longleftrightarrow M\Omega^2>r^2 \Leftrightarrow M\Omega>r \Longleftrightarrow M\in\mathcal{E}(\Gamma),$$

autrement dit la puissance de M par rapport au cercle Γ est strictement positive si et seulement si M est à l'extérieur du cercle Γ. De la même façon :

$$\begin{cases} p_\Gamma(M)<0 \Leftrightarrow M\Omega<r \Leftrightarrow M\in\mathcal{I}(\Gamma)\\ p_\Gamma(M)=0 \Leftrightarrow M\Omega=r \Leftrightarrow M\in\Gamma.\end{cases}$$

3. Une droite passant par le centre Ω de Γ coupe ce cercle en deux points T_1 et T_2 diamétralement opposés, donc $p_\Gamma(\Omega)=\overline{\Omega T}_1.\overline{\Omega T}_2=-\Omega T_1^2=-R^2$.
4. Si M appartient à une tangente $\mathcal{D}_0$ à Γ, alors M est à l'extérieur du cercle Γ ou appartient à Γ. La droite $\mathcal{D}_0$ n'est alors unique que si $M\in\Gamma$. Dans le cas contraire, il est notoire que l'on peut abaisser sur Γ deux tangentes issues de M. Le Théorème de Pythagore donne enfin

$$p_\Gamma(M)=M\Omega^2-r^2=M\Omega^2-\Omega T^2=MT^2=\overline{MT}.\overline{MT}.$$

Remarque 14.1 *On a préféré répondre rapidement à la question* ***I.4*** *en se disant que le problème est long et qu'il y a énormément de choses*

à faire et de points à gagner pendant les 5 heures de l'épreuve. Mais on peut aussi avoir envie d'expliciter pourquoi « il est notoire que l'on puisse abaisser sur Γ deux tangentes issues de M ». Ces explications sont de toute façon les bienvenues dans le cadre d'une préparation au concours...
La question est ici de savoir quand il existe une tangente à Γ issue de M, et combien il en existe. Une droite $\mathcal{D}_0$ est une tangente à Γ issue de M si et seulement si elle coupe Γ en un point T tel que $MT\Omega$ soit rectangle en T. Ainsi, les seuls points de contacts possibles entre Γ et une tangente à Γ issue de M sont les points d'intersection de Γ et du cercle $\mathcal{C}_{M\Omega}$ de diamètre $[M\Omega]$. Réciproquement, tout point T de $\Gamma \cap \mathcal{C}_{M\Omega}$ permet de construire une tangente (MT) qui répond à la question.
Ainsi, trouver les tangentes à Γ issues de M revient à trouver l'intersection $\Gamma \cap \mathcal{C}_{M\Omega}$, et l'on peut appliquer le résultat classique concernant la nature de l'intersection de deux cercles ([21], Théorème 196). Si I désigne le milieu de $[M\Omega]$, on dira par exemple que Γ et $\mathcal{C}_{M\Omega}$ se coupent suivant deux points distincts si et seulement si

$$|I\Omega - R| < I\Omega < I\Omega + R,$$

ce qui équivaut à $R < 2 \times I\Omega = M\Omega$, ou encore à l'affirmation : « M est à l'extérieur de Γ ». On dira ensuite que $\Gamma \cap \mathcal{C}_{M\Omega}$ est un singleton si et seulement si $|I\Omega - R| = I\Omega$ ou $I\Omega = I\Omega + R$ ([21], Théorème 197), ce qui équivaut à $R = M\Omega$ après réduction. Enfin, $\Gamma \cap \mathcal{C}_{M\Omega} = \varnothing$ si et seulement si $R > M\Omega$, ce qui revient à dire que « M est à l'intérieur de Γ ».

5. Tout point M de la droite (AB) vérifie $p_{\Gamma_1}(M) = \overline{MA}.\overline{MB} = p_{\Gamma_2}(M)$. Réciproquement, supposons que M vérifie $p_{\Gamma_1}(M) = p_{\Gamma_2}(M)$ et démontrons que M appartient à (AB). Le point M est différent de A ou de B. Supposons par exemple que M soit différent de A. Pour $i = 1$ ou 2, la droite (MA) recoupe le cercle Γ_i en A_i (éventuellement confondu avec A si l'on ne peut pas faire autrement), et par définition :

$$p_{\Gamma_1}(M) = \overline{MA}.\overline{MA_1} \quad \text{et} \quad p_{\Gamma_2}(M) = \overline{MA}.\overline{MA_2}.$$

Ainsi $\overline{MA}.\overline{MA_1} = \overline{MA}.\overline{MA_2}$, donc $A_1 = A_2$ appartient à $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A, B\}$. Nécessairement $A_1 = A_2 = B$ et $M \in (AB)$.

6. Soit Δ l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport aux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, et de rayons respectifs R_1

et R_2. Si O désigne un point quelconque du plan,

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow p_{\Gamma_1}(M) = p_{\Gamma_2}(M) \\ &\Leftrightarrow M\Omega_1^2 - R_1^2 = M\Omega_2^2 - R_2^2 \\ &\Leftrightarrow M\Omega_1^2 - M\Omega_2^2 = R_1^2 - R_2^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = k \end{aligned}$$

où $k = \frac{1}{2}(R_1^2 - R_2^2 - \Omega_1 O^2 + \Omega_2 O^2)$.
Il existe un unique point M_0 sur la droite $(\Omega_1\Omega_2)$ satisfaisant

$$\overrightarrow{OM_0}.\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = k.$$

En effet, pour un tel point $\overrightarrow{OM_0} = \lambda\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ où λ vérifie $\lambda\Omega_1\Omega_2^2 = k$, d'où une et une seule valeur de λ possible, à savoir : $\lambda = k/\Omega_1\Omega_2^2$. Alors

$$M \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = \overrightarrow{OM_0}.\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = \overrightarrow{0},$$

et Δ est la droite perpendiculaire à $(\Omega_1\Omega_2)$ passant par M_0.
Si les deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents en A, alors $A \in \Delta$ et Δ ne peut être que la droite passant par A et perpendiculaire à $(\Omega_1\Omega_2)$, c'est-à-dire la tangente commune aux deux cercles.

Remarque 14.2 *Les résultats importants concernant le cercle et la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle sont rassemblés dans la Section 10.2 de [21] (en particulier, la construction à la règle et au compas de la droite Δ, appelée **axe radical** des cercles Γ_1 et Γ_2, est donnée en [21], §10.2.3).*

Remarque 14.3 *Répondre à la question **I.5.** est facile si l'on utilise la question **I.6.**. En effet, l'axe radical Δ de deux cercles sécants en deux points A et B est une droite perpendiculaire à $(\Omega_1\Omega_2)$ (question I.6) et passant par A et B (puisque $p_{\Gamma_1}(A) = \overline{AA}.\overline{AB} = 0 = p_{\Gamma_2}(A)$), c'est donc la droite (AB).*

7. L'équation du cercle Γ s'écrit

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

Par hypothèse $\Gamma \neq \varnothing$ et l'on a $a^2/4 + b^2/4 - c \geq 0$, donc Γ est le cercle de centre $\Omega\,(-a/2; -b/2)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2/4 + b^2/4 - c}$. On obtient alors

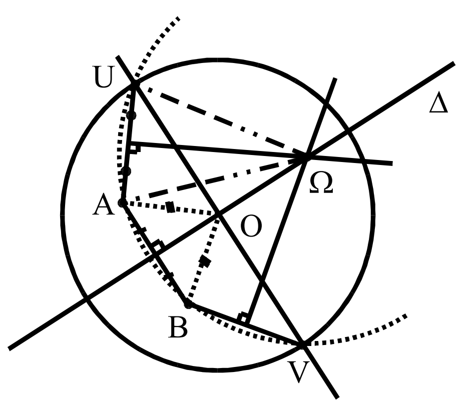
$$p_\Gamma(O) = \Omega O^2 - R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right) = c.$$

Remarque 14.4 *De façon plus générale, la puissance du point M de coordonnées (x_0, y_0) par rapport à Γ est*

$$\begin{aligned} p_\Gamma(M) &= \Omega M^2 - R^2 \\ &= \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c. \end{aligned}$$

Partie II : Construction d'une $\prod$-droite

1. On raisonne par l'absurde. Si le cercle Γ passait par A et B tout en coupant $\mathcal{C}$ en deux points U et V diamétralement opposés, la puissance de O par rapport à Γ serait
$$p_\Gamma(O) = \overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OU}.\overline{OV} = -R^2$$
d'où $OA \times OB = R^2$, ce qui est impossible puisque $OA < R$ et $OB < R$ entraînent $OA \times OB < R^2$.
2. ▶ **Existence (et construction explicite)** : Traçons la médiatrice Δ de $[AB]$. La parallèle à (AB) passant par O coupe $\mathcal{C}$ en deux points U et V diamétralement opposés. On vérifie alors que le cercle $\mathcal{C}_{UAB}$ circonscrit au triangle UAB (ce cercle existe car UAB n'est pas aplati, autrement A et B appartiendraient au diamètre $[UV]$) répond à la question, c'est-à-dire passe par A et B en coupant $\mathcal{C}$ en deux points U et V diamétralement opposés.
En effet, si l'on note Ω le centre de $\mathcal{C}_{UAB}$, on constate que Ω appartient à Δ, que $\mathcal{C}_{UAB}$ contient A, U, B, et que par symétrie par rapport à Δ, les distances ΩU et ΩV sont égales. Donc $V \in \mathcal{C}_{UAB}$.



▶ **Unicité** : Si Γ est un cercle solution, son centre Ω vérifie

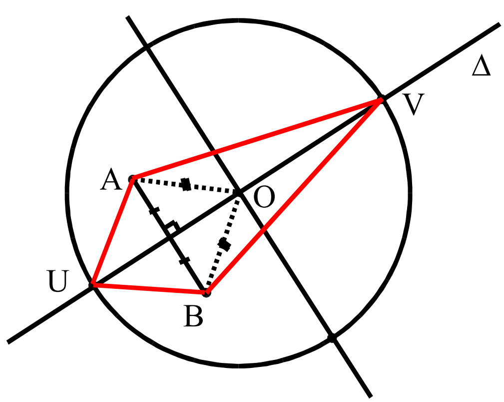
$$\Omega A = \Omega B = \Omega U = \Omega V$$

où U et V sont les extrémités d'un diamètre $[UV]$ de $\mathcal{C}$. Par conséquent Ω appartient à la médiatrice Δ de $[AB]$. On a aussi $O \in \Delta$ (car $OA = OB$), de sorte que Δ soit un axe de symétrie des cercles $\mathcal{C}$ et Γ. Si s_Δ désigne la réflexion de base Δ, on a donc

$$U \in \mathcal{C} \cap \Gamma = \{U, V\} \ \Rightarrow\ s_\Delta(U) \in \mathcal{C} \cap \Gamma = \{U, V\},$$

et deux cas à envisager.

- Si $s_\Delta(U) = U$, alors U et O appartiennent à Δ, donc V aussi, et le quadrilatère $UAVB$ est un « cerf-volant » : ses diagonales $[UV]$ et $[AB]$ sont perpendiculaires et se coupent en un point W milieu de $[AB]$.
  On constate que $UAVB$ n'est pas inscriptible dans un cercle. Précisément, $\Omega A = \Omega B$ implique $\Omega \in \Delta$, et l'égalité $\Omega U = \Omega V$ permet ensuite d'affirmer que $\Omega = O$, d'où $OA = OB = OU = OV$, ce qui est absurde (puisque par hypothèse $OU = OV = R$ et $OA = OB < R$).
- Si $s_\Delta(U) = V$ (c'est la seule possibilité qu'il nous reste), le diamètre $[UV]$ est perpendiculaire à Δ. Comme il existe un et un seul diamètre de $\mathcal{C}$ perpendiculaire à Δ, il existera au plus un cercle Γ solution.



Remarque 14.5 *Voici une autre preuve (sympathique) de l'unicité de* Γ. *Si* Γ *est solution, son centre* Ω *appartient à la médiatrice* Δ *de* $[AB]$ *et à la médiatrice* Δ' *de* $[UV]$ *(on note encore* U *et* V *les points d'intersection de* Γ *et* $\mathcal{C}$ *qui sont diamétralement opposés sur* $\mathcal{C}$*). Mais* O *appartient aussi à* Δ *et à* Δ'.
Comme $OA < R = OU$, *on a* $O \neq \Omega$ *donc* $\Delta = \Delta' = (O\Omega)$. *On peut maintenant affirmer que les droites* (AB) *et* (UV) *sont parallèles, et*

l'unicité de Γ s'en déduit : Γ ne peut être que le cercle circonscrit au triangle UAB où U désigne l'une des intersections de $\mathcal{C}$ et de la parallèle à (AB) issue de O).

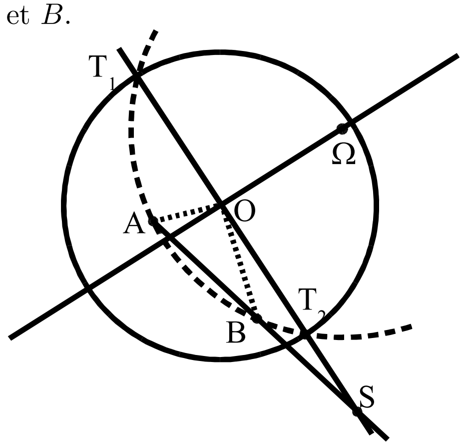
3.

   (a) Il s'agit de prouver que les droites (AB) et (T_1T_2) ne sont pas parallèles. On remarque d'abord que $O \neq \Omega$ (puisque $OA \neq OB$ et $\Omega A = \Omega B$), de sorte que la droite $(O\Omega)$ soit parfaitement définie.

   – **Première solution** : Supposons par l'absurde que (AB) soit parallèle à (T_1T_2). La droite $(O\Omega)$ joignant les centres des cercles $\mathcal{C}$ et Γ est toujours axe de symétrie de $\mathcal{C}$, de Γ, et de (T_1T_2). L'hypothèse $(AB) \,//\, (T_1T_2)$ montre alors que $(O\Omega)$ est encore axe de symétrie de (AB). Notons $s_{O\Omega}$ la réflexion de base $(O\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} s_{O\Omega}(\{A,B\}) = s_{O\Omega}((AB)\cap\Gamma) &= s_{O\Omega}((AB)) \cap s_{O\Omega}(\Gamma) \\ &= (AB)\cap\Gamma = \{A,B\}\,, \end{aligned}$$

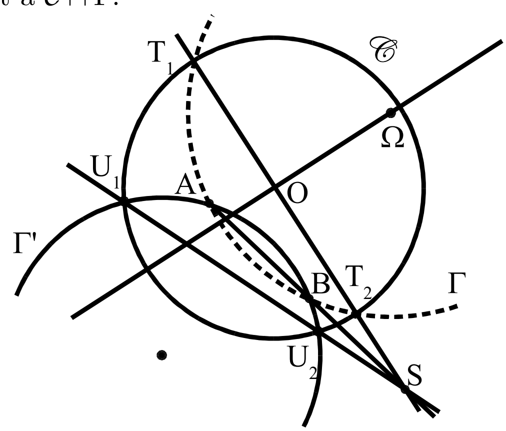
   et deux cas seulement sont possibles :
   – Ou bien $s_{O\Omega}(A) = B$, donc $OA = OB$ et l'on obtient une absurdité.
   – Ou bien $s_{O\Omega}(A) = A$, et dans ce cas $A \in (O\Omega)$ et (AB) est la perpendiculaire à $(O\Omega)$ passant par A, c'est-à-dire la tangente en A à Γ. C'est absurde car (AB) coupe Γ en deux points distincts A et B.



   – **Deuxième solution** (proposée par Vincent Darmegna) : On raisonne toujours par l'absurde en supposant $(AB) \,//\, (T_1T_2)$. La droite (T_1T_2) est l'axe radical de $\mathcal{C}$ et Γ, donc $(T_1T_2) \perp (O\Omega)$. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O et passant par A. L'axe radical de

$\mathcal{C}'$ et Γ est perpendiculaire à $(O\Omega)$ et contient A, c'est donc la droite (AB). On en déduit $p_{\mathcal{C}'}(B) = p_\Gamma(B) = 0$, donc $B \in \mathcal{C}'$, ce qui est absurde.

(b) On a $p_\Gamma(S) = \overline{ST_1}.\overline{ST_2} = p_{\mathcal{C}}(S)$ puisque les points T_1 et T_2 appartiennent à $\mathcal{C} \cap \Gamma$.



(c) On a $p_{\Gamma'}(S) = \overline{SA}.\overline{SB} = p_\Gamma(S)$, donc $p_{\Gamma'}(S) = p_{\mathcal{C}}(S) = p_\Gamma(S)$. Le point S appartient ainsi à l'axe radical de deux cercles quelconques parmi $\mathcal{C}$, Γ et Γ' (la définition d'un axe radical a été donnée dans la remarque suivant la question I.6) . Comme l'axe radical des cercles Γ' et $\mathcal{C}$ est (U_1U_2) (voir I.5), on obtient $S \in (U_1U_2)$.

(d) S'il existe un cercle Γ solution, celui-ci peut être construit de la façon suivante :

- On trace un cercle Γ' quelconque passant par A et B, rencontrant $\mathcal{C}$ en 2 points U_1 et U_2, et tel que les droites (U_1U_2) et (AB) se coupent en un point S.
- On trace les intersections T_1 et T_2 de (OS) et $\mathcal{C}$.
- Le cercle Γ solution ne peut être que le cercle circonscrit au triangle AT_1T_2.

On vient de prouver que, si Γ existe, il est unique.

(e) Il ne reste plus qu'à démontrer l'existence d'un cercle Γ solution, l'unicité découlant immédiatement de la question **II.3.d.** Il s'agit donc de vérifier que le cercle Γ construit en **II.3.d** est bien solution de notre problème. Par construction, Γ passe par A, T_1 et T_2, et $[T_1T_2]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. Comme S appartient aux droites radicales de deux cercles quelconques parmi les trois cercles $\mathcal{C}$, Γ et Γ', la droite (SA) coupe Γ en un point B' qui vérifie

$$\overline{SU_1}.\overline{SU_2} = \overline{ST_1}.\overline{ST_2} = \overline{SA}.\overline{SB'}.$$

Comme par construction $\overline{ST}_1.\overline{ST}_2 = \overline{SA}.\overline{SB}$, on en déduit

$$\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SA}.\overline{SB'}$$

d'où $B = B'$. Le point B appartient donc aussi au cercle Γ, et Γ est bien un cercle solution.

4.

(a) Si Γ coupe $\mathcal{C}$ en deux points T_1 et T_2 diamétralement opposés,

$$p_\Gamma(O) = \overline{OT}_1.\overline{OT}_2 = -1.$$

Réciproquement, si $p_\Gamma(O) = -1$, il faut d'abord vérifier que les cercles Γ et $\mathcal{C}$ se coupent. Si ce n'était pas le cas, le cercle Γ serait inclus soit dans l'intérieur $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$, soit dans l'extérieur $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$. Une sécante (AB) à Γ issue de O permettrait alors d'écrire $|p_\Gamma(O)| = OA \times OB$, donc

$$\begin{cases} |p_\Gamma(O)| < 1 \text{ si } \Gamma \subset \mathcal{I}(\mathcal{C}) \\ |p_\Gamma(O)| > 1 \text{ si } \Gamma \subset \mathcal{E}(\mathcal{C}), \end{cases}$$

ce qui est absurde. On peut donc choisir un point T_1 de $\mathcal{C} \cap \Gamma$. La droite (OT_1) recoupe Γ en T_2 tel que

$$p_\Gamma(O) = -1 = \overline{OT}_1.\overline{OT}_2.$$

Ainsi O est le milieu de $[T_1T_2]$. Comme $T_1 \in \mathcal{C}$ et comme O est le centre de $\mathcal{C}$, le symétrique T_2 de T_1 par rapport à O appartient encore à $\mathcal{C}$. Finalement $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{T_1, T_2\}$ et T_1, T_2 sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

(b) Un cercle Γ admet toujours une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

dans $\mathcal{R}$, et $p_\Gamma(O) = c$ d'après I.7. Compte tenu de II.4.a, on peut donc écrire

$$\Gamma \text{ solution } \Leftrightarrow \begin{cases} A, B \in \Gamma \\ c = -1. \end{cases}$$

Si, de façon générale, on note (x_M, y_M) les coordonnées d'un point M dans $\mathcal{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ solution } &\Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 + y_A^2 + ax_A + by_A - 1 = 0 \\ x_B^2 + y_B^2 + ax_B + by_B - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax_A + by_A = 1 - x_A^2 - y_A^2 \\ ax_B + by_B = 1 - x_B^2 - y_B^2 \end{cases} \qquad (S) \end{aligned}$$

et l'on est amené à résoudre un système linéaire (S) de deux équations à deux inconnues a et b Comme A et B n'appartiennent pas à un même diamètre, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ forment un système libre, et le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Le système (S) est donc un système de Cramer qui admet un unique couple (a, b) solution. L'existence et l'unicité de Γ est ainsi prouvée analytiquement.
Les points A et B appartiennent à un même diamètre (situation du II.1) si et seulement si le déterminant Δ est nul

Remarque 14.6 *Vérifions analytiquement que le système (S) n'admet aucune solution lorsque A et B sont sur un même diamètre, autrement dit lorsque Δ est nul. Supposons par exemple $x_A \neq 0$. La condition de compatibilité de (S) s'écrit alors*

$$(C) \quad \begin{vmatrix} x_A & 1 - x_A^2 - y_A^2 \\ x_B & 1 - x_B^2 - y_B^2 \end{vmatrix} = 0$$

et l'on sait l'existence d'un réel λ tel que $(x_B, y_B) = \lambda\,(x_A, y_A)$. Donc

$$\begin{aligned} (C) &\Leftrightarrow x_A\left(1 - \lambda^2 x_A^2 - \lambda^2 y_A^2\right) - \lambda x_A\left(1 - x_A^2 - y_A^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda) \times x_A\left(1 + \lambda x_A^2 + \lambda y_A^2\right) = 0. \end{aligned}$$

On a $\lambda \neq 1$ et $x_A \neq 0$, donc

$$(C) \ \Leftrightarrow \ \lambda = \frac{-1}{x_A^2 + y_A^2}, \quad (\dagger)$$

et il est facile de voir que cette dernière condition n'est jamais vérifiée : dans le cas contraire $x_A^2 + y_A^2 < 1$ et $\lambda^2 x_A^2 + \lambda^2 y_A^2 < 1$, et $(\dagger)$ entraîne $x_A^2 + y_A^2 > 1$, ce qui est absurde.

Partie III : Un problème de lieu géométrique

1.

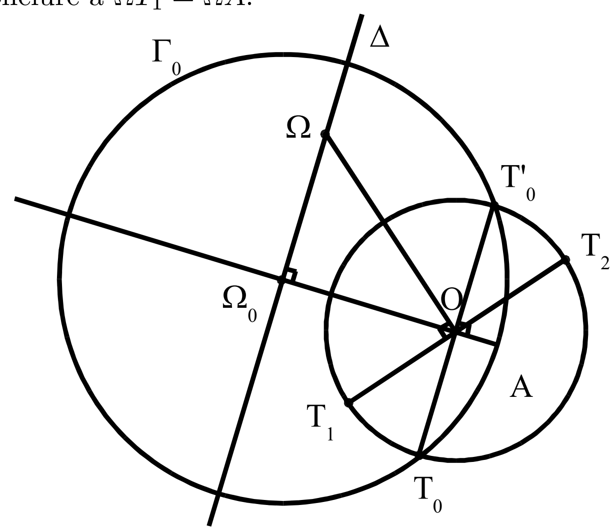
(a) $(O\Omega)$ est la médiatrice de $[T_1T_2]$, donc $\Omega T_1 = \Omega T_2$. Par ailleurs, le Théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\Omega T_1^2 = \Omega O^2 + OT_1^2 = \Omega O^2 + R^2$$

et

$$\begin{aligned}\Omega A^2 &= \Omega\Omega_0^2 + \Omega_0 A^2\\ &= \Omega O^2 - O\Omega_0^2 + \Omega_0 A^2\\ &= \Omega O^2 - O\Omega_0^2 + \Omega_0 T_0^2 = \Omega O^2 + OT_0^2 = \Omega O^2 + R^2,\end{aligned}$$

et de conclure à $\Omega T_1 = \Omega A$.



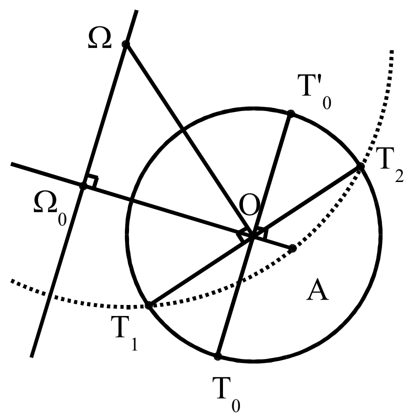
(b) La question précédente montre que tout point Ω de la droite Δ vérifie $\Omega T_1 = \Omega T_2 = \Omega A$, donc est le centre d'un cercle qui passe par A et coupe $\mathcal{C}$ suivant des points diamétralement opposés, et par conséquent appartient à $\mathcal{L}$. Ainsi $\Delta \subset \mathcal{L}$.

2. Réciproquement, si $\Omega \in \mathcal{L}$, Ω est le centre d'un cercle qui passe par A et coupe $\mathcal{C}$ suivant des points diamétralement opposés T_1 et T_2. On peut écrire $\Omega T_1 = \Omega T_2 = \Omega A$. Le triangle $\Omega T_1 T_2$ est isocèle en Ω, donc sa médiane (ΩO) est aussi hauteur et $(\Omega O) \perp (T_1T_2)$.

Soit Ω_0 le projeté orthogonal de Ω sur (OA). Soit $[T_0T_0']$ le diamètre de $\mathcal{C}$

perpendiculaire à (OA). Montrer que Ω appartient à Δ revient à prouver que Ω_0 est le centre du cercle circonscrit à $T_0T_0'A$, autrement dit que

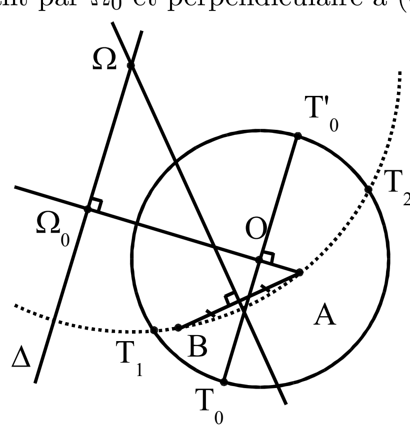
$$\Omega_0T_0 = \Omega_0T_0' = \Omega_0A.$$



L'égalité $\Omega_0T_0 = \Omega_0T_0'$ étant triviale (puisque le point Ω_0 appartient à (OA), médiatrice du segment $[T_0T_0']$), on aura terminé la démonstration si l'on prouve que $\Omega_0T_0 = \Omega_0A$. Cela peut se faire en utilisant plusieurs fois le Théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}\Omega_0T_0^2 &= \Omega_0O^2 + OT_0^2\\ &= \left(\Omega O^2 - \Omega_0\Omega^2\right) + OT_1^2\\ &= \left(\Omega O^2 + OT_1^2\right) - \Omega_0\Omega^2\\ &= \Omega T_1^2 - \Omega_0\Omega^2 = \Omega A^2 - \Omega_0\Omega^2 = \Omega_0A^2.\end{aligned}$$

3. Les points A et B étant donnés, on trace le diamètre $[T_0T_0']$ de $\mathcal{C}$ perpendiculaire à (OA), le centre Ω_0 du cercle circonscrit au triangle $T_0T_0'A$, puis la droite Δ passant par Ω_0 et perpendiculaire à (OA).



On sait que Δ est le lieu des centres des « cercles-solutions » qui passent par A. Pour obtenir le centre du cercle-solution qui contient A et B, il suffit de tracer l'intersection Ω de Δ et de la médiatrice de $[AB]$ (cette intersection existe : autrement (AB) serait perpendiculaire à Δ et les points A, O, B, Ω_0 seraient alignés, en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle A et B n'appartiennent pas à un même diamètre de $\mathcal{C}$). Le point Ω est le centre du cercle cherché.

Partie IV : Un « plan » étonnant

Dans toute la suite du problème, je note $\operatorname{Supp} U$ le support d'une Π-droite, et j'écris $U//V$ pour signifier que les Π-droites U et V sont Π-parallèles. Par commodité, j'écris souvent « parallèles » au lieu de « Π-parallèles ». Dans cette partie $R = 1$, mais cela ne joue pas un rôle essentiel.

1. Soient A et B deux points distincts de Π. De deux choses l'une :
   - Ou bien A et B appartiennent à un même diamètre de $\mathcal{C}$, et la Π-droite de support (AB) passe par ces deux points. Aucune autre Π-droite ne passe alors par ces deux points (cf. **II.1**).
   - Ou bien A et B n'appartiennent pas à un même diamètre de $\mathcal{C}$, et aucune Π-droite de support une droite ne passe par ces deux points. Les parties **II** et **III** (**II.2** et **II.3** ; ou **II.4** ; ou **III.3**) montrent qu'il existe alors une unique Π-droite de support un cercle passant par A et B.
2.
   (a) On va démontrer un peu plus : que deux Π-droites U et V dont les supports *contiennent* deux points T_0 et T_0' diamétralement opposés, sont nécessairement parallèles. On envisage les trois cas possibles :
   - Si $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ sont des cercles,
     - ou bien ces cercles sont égaux, et $U = V$,
     - ou bien ils sont distincts, $(\operatorname{Supp} U) \cap (\operatorname{Supp} V) = \{T_0, T_0'\}$ et donc $U \cap V = \varnothing$.

     Dans les deux cas $U//V$.
   - Si $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ sont des droites, elles passent par T_0 et T_0', donc sont égales. Dans ce cas $U = V$ et $U//V$.
   - Si l'un des supports est un cercle et l'autre une droite, par exemple si $\operatorname{Supp} U$ est un cercle et $\operatorname{Supp} V$ une droite, alors

$$\operatorname{Supp} V = \left(T_0 T_0'\right) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Supp} U) \cap (\operatorname{Supp} V) = \left\{T_0, T_0'\right\}.$$

Par suite $U \cap V = \varnothing$, et U est encore parallèle à V.

(b) • La puissance $p_\Gamma(O) = \overline{OT}_1.\overline{OT}_2 = -R^2$ de O par rapport à Γ est strictement négative, donc O appartient à l'intérieur $\mathcal{I}(\Gamma)$ de Γ.

• La droite (T_0T_0') passe par O intérieur à Γ, donc coupe Γ en deux points distincts W et W', et $p_\Gamma(O) = \overline{OW}.\overline{OW'} = -R^2$. Puisque

$$W, W' \in \mathcal{I}(\mathcal{C}) \Rightarrow (OW < R \text{ et } OW' < R) \Rightarrow |p_\Gamma(O)| < R^2, \text{ absurde,}$$

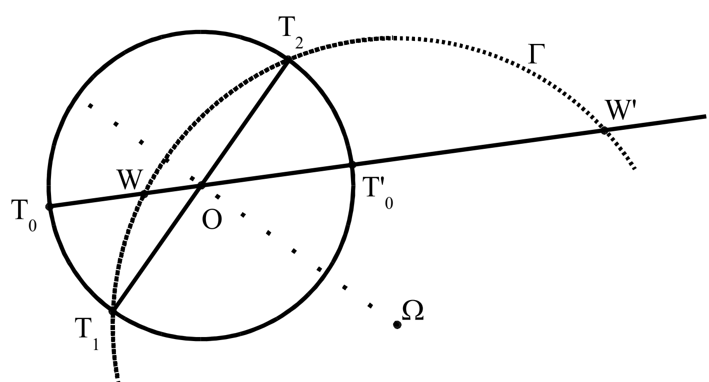
et

$$W, W' \in \mathcal{E}(\mathcal{C}) \Rightarrow (OW > R \text{ et } OW' > R) \Rightarrow |p_\Gamma(O)| > R^2, \text{ absurde,}$$

on peut affirmer que l'un des points W, W' est à l'intérieur de $\mathcal{C}$ tandis que l'autre est à l'extérieur. Si l'on suppose par exemple que W est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, on obtient

$$(\operatorname{Supp} U) \cap (\operatorname{Supp} V) = \left\{W, W'\right\}$$

et $U \cap V = \{W\}$.



(c) On se place dans un repère orthonormal dans lequel $\mathcal{C}$ admet l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Le cercle Γ passe par deux points $T_1(\alpha, \beta)$ et $T_2(-\alpha, -\beta)$ diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$, avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. La forme générale de l'équation de Γ est

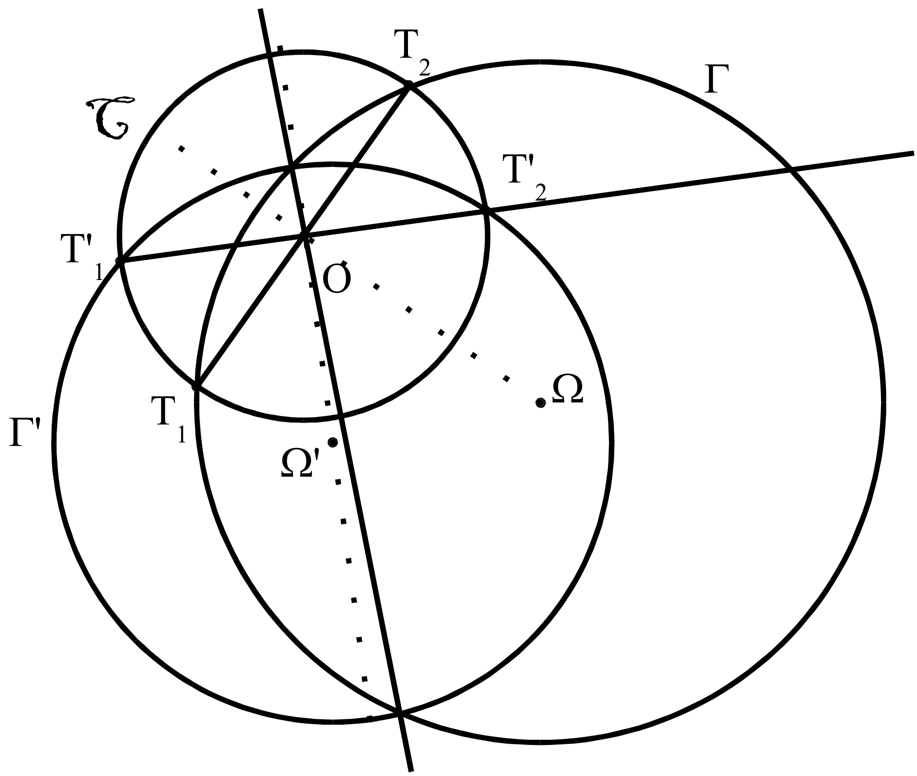
$$\Gamma : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

avec des coefficients a, b, c tels que $c = p_\Gamma(O) = -1$ (I.7) et

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + a\alpha + b\beta - 1 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - a\alpha - b\beta - 1 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $a\alpha + b\beta = 0$. On peut supposer $\beta \neq 0$ (quitte à faire pivoter le repère dans lequel on travaille), de sorte que $b = -a\alpha/\beta$. La forme générale de l'équation d'un cercle Γ passant par T_1 et T_2 est donc

$$\Gamma : x^2 + y^2 + ax - \frac{a}{\beta}\alpha y - 1 = 0.$$



De même, un cercle Γ' passant par $T_1'\left(\alpha', \beta'\right)$ et $T_2'\left(-\alpha', -\beta'\right)$ diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$ admet une équation du style :

$$\Gamma' : x^2 + y^2 + a'x - \frac{a'}{\beta'}\alpha' y - 1 = 0$$

où $a' \in \mathbb{R}$. Les points d'intersection X et Y de $\Gamma \cap \Gamma'$ ont donc des coordonnées (x, y) qui vérifient le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax - \dfrac{a}{\beta}\alpha y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x - \dfrac{a'}{\beta'}\alpha' y - 1 = 0, \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax-\dfrac{a}{\beta}\alpha y-1=0 \\ (a-a')\,x+\left(\dfrac{a'}{\beta'}\alpha'-\dfrac{a}{\beta}\alpha\right)y=0. \quad (*) \end{cases}$$

Les points X et Y appartiennent donc à la droite d'équation $(*)$ qui passe par le centre O de $\mathcal{C}$, et à ce titre appartiennent bien à un même diamètre du cercle $\mathcal{C}$. Pour vérifier qu'un seul point X ou Y appartient à Π, on raisonne comme au IV.2.b en notant que $p_\Gamma(O)=\overline{OT}_1\times\overline{OT}_2=-R^2$, et donc que :

$$\begin{aligned} X,Y\in\mathcal{I}(\mathcal{C}) &\Rightarrow (OX<R \text{ et } OY<R) \\ &\Rightarrow |p_\Gamma(O)|=OX\times OY<R^2, \text{ absurde,} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X,Y\in\mathcal{E}(\mathcal{C}) &\Rightarrow (OX>R \text{ et } OY>R) \\ &\Rightarrow |p_\Gamma(O)|=OX\times OY>R^2, \text{ absurde.} \end{aligned}$$

Autre solution (proposée par Bruno Aebischer) :
Soient $x^2+y^2+ax+by-1=0$ et $x^2+y^2+a'x+b'y-1=0$ les équations respectives de Γ et Γ'. La recherche analytique de l'intersection de Γ et Γ' amène à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by-1=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+ax+by-1=0 \\ (a-a')\,x+(b-b')\,y=0. \end{cases}$$

Soit Ω de coordonnées $(-a/2,-b/2)$ le centre de Γ et Ω' de coordonnées $(-a'/2,-b'/2)$ le centre de Γ'. Le fait que $(T_1T_2)\neq(T_1'T_2')$ implique entre autres que $\Omega\neq\Omega'$ donc on n'a pas simultanément $a=a'$ et $b=b'$.
L'équation $(a-a')x+(b-b')y=0$ caractérise donc une droite qui est un diamètre de $\mathcal{C}$ (elle passe par O). La recherche de l'intersection de Γ et de Γ' se ramène donc à la recherche de l'intersection du cercle Γ avec le diamètre de $\mathcal{C}$ qu'est la droite Δ d'équation

$$(a-a')x+(b-b')y=0.$$

Or cette droite ne passe pas par T_1 et T_2, (sinon ces points seraient aussi des points de Γ' : en effet, si (u,v) sont les coordonnées de T_i, on a $u^2+v^2+au+bv-1=0$ et on aurait $au+bv=a'u+b'v$ donc $u^2+v^2+a'u+b'v-1=0$ et $T_i\in\Gamma'$) donc on peut appliquer

le résultat de la question précédente, qui a montré que dans cette situation, l'intersection d'un tel diamètre de $\mathcal{C}$ et d'un tel cercle qui passe par deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$ est formée de deux points $\{M, N\}$ dont un seul est dans $\prod$.
Or $\Gamma \cap \Gamma' = \Gamma \cap \Delta$, donc le résultat est établi.

(d) Notons (P) la propriété

$$(P): \quad \begin{cases} (\operatorname{Supp} U) \cap (\operatorname{Supp} V) = \{T_0, T_0'\} \\ \text{où } T_0 \text{ et } T_0' \text{ sont diamétralement opposés.} \end{cases}$$

Il s'agit de prouver l'implication

$$(U//V \text{ et } U \neq V) \Rightarrow (P).$$

Si $U//V$ et $U \neq V$, alors $U \cap V = \varnothing$ et l'on envisage les trois cas possibles (à permutation près de U et V) :

- Si $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ sont des cercles, IV.2.c montre que si $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ coupent $\mathcal{C}$ en des couples de points diamétralement opposés distincts, alors $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ se coupent en au moins un point de Π, ce qui entraîne $U \cap V \neq \varnothing$. C'est absurde, donc (P) est vraie.
- Si les supports $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ sont des droites, $U \neq V$ entraîne $U \cap V = \{O\}$, en contradiction avec l'hypothèse $U \cap V = \varnothing$. Ce cas ne se présentera donc jamais !
- Si $\operatorname{Supp} U$ est un cercle et $\operatorname{Supp} V$ une droite, notons $V =]T_0T_0'[$ et posons $(\operatorname{Supp} U) \cap \mathcal{C} = \{T_1, T_2\}$. Si $\{T_1, T_2\} \neq \{T_0, T_0'\}$, la question IV.2.b montre que $U \cap V$ est un singleton, en contradiction avec $U \cap V = \varnothing$.

Donc $\{T_1, T_2\} = \{T_0, T_0'\}$, et (P) est démontrée.

(e) Les questions **IV.2.a** et **IV.2.d** permettent d'énoncer le résultat suivant :

Lemme P : Si U et V désignent deux Π-droites,

$$U//V \Leftrightarrow \begin{cases} U = V \\ \text{ou} \\ (\operatorname{Supp} U) \cap (\operatorname{Supp} V) = \{T_0, T_0'\} \text{ où } T_0 \text{ et } T_0' \text{ diam. opposés.} \end{cases}$$

En utilisant ce lemme, il est facile de vérifier que la relation de Π-parallélisme est une relation d'équivalence.

– Elle est réflexive : $U//U$ puisque $U = U$.
– Elle est symétrique, puisque

$$U//V \Leftrightarrow \begin{cases} U = V \\ \text{ou} \\ U \cap V = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow V//U.$$

– Elle est transitive, autrement dit

$$\left.\begin{array}{l} U//V \\ V//W \end{array}\right\} \Rightarrow U//W.$$

L'implication annoncée est triviale si $U = V$ ou $V = W$. Supposons maintenant $U \neq V$ et $V \neq W$. Le Lemme **P** permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{l} U//V \\ V//W \end{array}\right\} &\Rightarrow \begin{cases} (\operatorname{Supp} U) \cap (\operatorname{Supp} V) = \{T_0, T'_0\} \text{ où } T_0 \text{ et } T'_0 \text{ diam. opposés} \\ (\operatorname{Supp} V) \cap (\operatorname{Supp} W) = \{T_1, T'_1\} \text{ où } T_1 \text{ et } T'_1 \text{ diam. opposés} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \{T_0, T'_0\} = \{T_1, T'_1\} \\ (\operatorname{Supp} U) \cap (\operatorname{Supp} W) = \{T_0, T'_0\} \text{ où } T_0 \text{ et } T'_0 \text{ diam. opposés} \end{cases} \\ &\Rightarrow U//W. \end{aligned}$$

3. Supposons que les Π-droites U et V ne soient pas parallèles, et notons $(\operatorname{Supp} U) \cap \mathcal{C} = \{T_1, T_2\}$ et $(\operatorname{Supp} V) \cap \mathcal{C} = \{T'_1, T'_2\}$. La contraposée de l'implication démontrée en IV.2.a prouve que $\{T_1, T_2\} \neq \{T'_1, T'_2\}$. On envisage les trois cas possibles (à permutation près de U et V).

   – Si $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ sont des cercles, ils coupent $\mathcal{C}$ en des points extrémités de diamètres différents, et IV.2.c montre que $U \cap V$ est un singleton.

   – Si $\operatorname{Supp} U$ et $\operatorname{Supp} V$ sont des droites, elles sont ditinctes (autrement $U = V$) donc se coupent en O.

   – Si $\operatorname{Supp} U$ est un cercle et si $\operatorname{Supp} V$ est une droite, la question IV.2.b montre encore que $U \cap V$ est un singleton.

4. Notons $(\operatorname{Supp} U) \cap \mathcal{C} = \{T_1, T_2\}$. Le lemme **P** montre qu'une Π-droite est parallèle à U si et seulement si son support contient les points T_1 et T_2. De deux choses l'une :

   – Ou bien $A \in]T_1T_2[$, et $V =]T_1T_2[$ est la seule Π-droite passant par A et parallèle à U (dans ce cas aucun cercle ne peut contenir les trois points alignés T_1, T_2 et A).

– Ou bien $A \notin]T_1T_2[$, et le cercle circonscrit au triangle non aplati T_1T_2A est le support de l'unique Π-droite V passant par A et parallèle à U.

Partie V : Grands cercles d'une sphère et droites d'un plan

1. Deux grands cercles distincts $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ de Σ sont les intersections de deux plans distincts $\mathcal{Q}'$ et $\mathcal{Q}''$ passant par O, donc

$$\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = (\Sigma \cap \mathcal{Q}') \cap (\Sigma \cap \mathcal{Q}'') = \Sigma \cap (\mathcal{Q}' \cap \mathcal{Q}'').$$

Comme $\mathcal{Q}' \cap \mathcal{Q}''$ est une droite contenant O, elle contiendra un diamètre de Σ, et $\Sigma \cap (\mathcal{Q}' \cap \mathcal{Q}'')$ sera une paire de points diamétralement opposés pour Σ.

2. L'intersection $\Sigma \cap \mathcal{Q}$ est un grand cercle distinct de $\mathcal{C}$. L'intersection $\Sigma^+ \cap \mathcal{Q}$ est un demi-grand cercle, autrement dit la partie d'un grand cercle située dans le demi-espace d'équation $z > 0$. Enfin, $\mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$ est l'intersection de deux grands cercles distincts de Σ : d'après V.1, c'est une paire de points diamétralement opposés sur Σ donc aussi sur $\mathcal{C}$.

3. • L'application $\varphi : \Pi_0 \to \Sigma^+$ est définie de la façon suivante : au point $M(x, y, 1)$ de Π_0 on associe « le » point $M'(x', y', z')$ dont les coordonnées vérifient :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}, \quad \text{i.e. } (x', y', z') = \lambda (x, y, 1) \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \\ z' > 0 \end{cases}$$

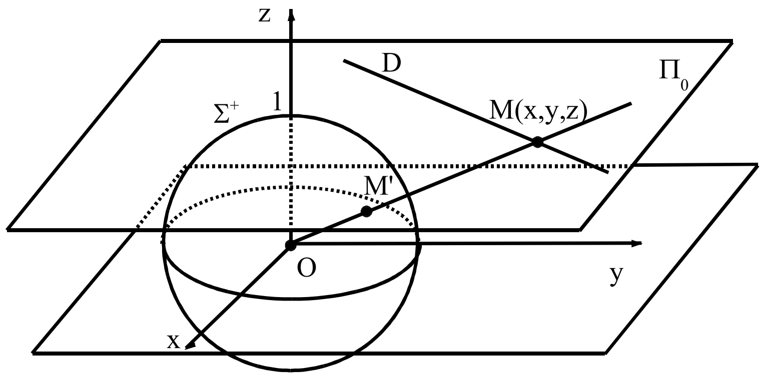
soit

$$\begin{cases} x' = xz' \\ y' = yz' \\ \left(x^2 + y^2 + 1\right) z'^2 = 1 \\ z' > 0 \end{cases}$$

ou encore

$$(A) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}. \end{cases}$$

Puisqu'à chaque point M on peut associer un et un seul point M' dont les coordonnées vérifient (A), on peut affirmer que l'application φ est parfaitement définie.



• A partir de maintenant, identifions points et coordonnées de ces points dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Montrer que $\varphi : \Pi_0 \to \Sigma^+$ est bijective revient à montrer que pour tout $(x', y', z') \in \Sigma^+$ il existe un unique point $(x, y, 1)$ de Π_0 tel que le système (A) soit vrai. Il s'agit donc de résoudre le système (A) en considérant x et y comme des inconnues. Puisque $z' > 0$,

$$(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = xz' \\ y' = yz' \\ \left(x^2 + y^2 + 1\right) z'^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{x'}{z'} \\ y = \dfrac{y'}{z'} \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{x'}{z'} \\ y = \dfrac{y'}{z'}. \end{array} \right.$$

Le système (A) admet donc toujours un et un seul couple (x, y) solution, et $\varphi : \Pi_0 \to \Sigma^+$ est bijective.

Autre façon de raisonner : On peut éviter de tout obtenir à partir de l'expression analytique de φ.

α) Pour montrer que $\varphi : \Pi_0 \to \Sigma^+$ est bien définie, on peut commencer par noter que pour tout point M de Π_0, la droite (OM_0) coupe la sphère Σ en deux points M_1 et M_2 diamétralement opposés, qui n'appartiennent pas au plan $\mathcal{P}$ (sinon (OM_0) serait incluse dans $\mathcal{P}$, donc faiblement parallèle à Π_0, ce qui n'est pas). Un seul des points M_1, M_2 possède une cote z strictement positive : c'est le point $M' = \varphi(M)$ qui est, dès lors, parfaitement défini.

β) Montrons que $\varphi : \Pi_0 \to \Sigma^+$ est bijective. Pour tout point $N \in \Sigma^+$, dire que $M \in \Pi_0$ vérifie $\varphi(M) = N$ revient à dire que M appartient à l'intersection de Π_0 et de la droite (ON). Comme la droite (ON) n'est pas faiblement parallèle à Π_0 (autrement elle serait incluse dans le plan passant par O et parallèle à Π_0, qui n'est autre que $\mathcal{P}$, et N appartiendrait à $\Sigma^+ \cap \mathcal{P} = \varnothing$, ce qui est absurde !) elle coupe Π_0 en un unique point M qui est ainsi l'unique antécédent de N par φ. Cela achève la démonstration.

4. • Comme en **V.2**, on dira qu'un demi-grand cercle est l'intersection d'un grand cercle et du demi-espace d'équation $z > 0$.

   • Soit D une droite de Π_0. L'image d'un point M quelconque de D par φ est un point $M' = \varphi(M)$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ avec $\lambda = 1/OM$. C'est donc un point de côte strictement positive du plan $\mathcal{Q}$ contenant la droite D et le point O. Ainsi $\varphi(D) \subset \mathcal{Q} \cap \Sigma^+$. La réciproque est triviale : Tout point N de $\mathcal{Q} \cap \Sigma^+$ est tel que la droite (ON) du plan $\mathcal{Q}$ coupe D en un unique point M (dans le cas contraire, (ON) serait parallèle à D dans $\mathcal{Q}$, et N serait de côte nulle, absurde) et l'on a $N = \varphi(M) \in \varphi(D)$. En conclusion : $\varphi(D) = \mathcal{Q} \cap \Sigma^+$ est un demi-grand cercle de Σ.

   • Si D a pour équation

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ z = 1, \end{cases}$$

   le plan $\mathcal{Q}$ contenant D et O admet l'équation $ax + by + cz = 0$. L'image $\varphi(D) = \mathcal{Q} \cap \Sigma^+$ est donc caractérisée analytiquement en écrivant :

$$(*) \quad \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z > 0. \end{cases}$$

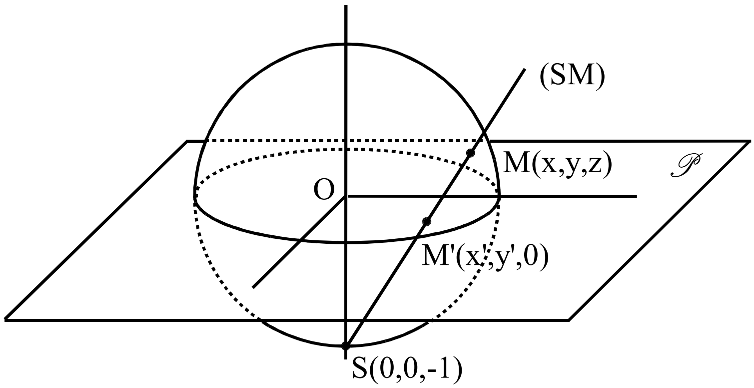
   Remarque 14.7 *On peut obtenir la caractérisation analytique de $\varphi(D)$ en écrivant simplement*

$$M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \varphi(D) \Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} (A) \\ ax + by + c = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \\ a\dfrac{x'}{z'} + b\dfrac{y'}{z'} + c = 0 \\ z' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (*) .$$

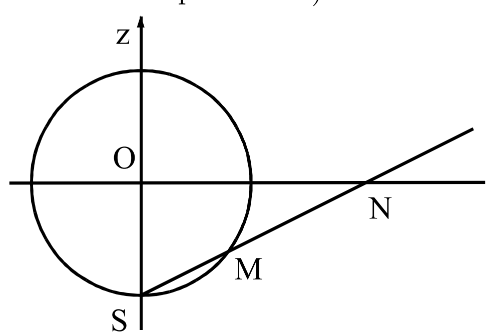
Partie VI : Une autre correspondance entre sphère et plan

1. • La sphère épointée Σ^* est incluse dans le demi-espace ouvert d'équation $z > -1$. Si $M \in \Sigma^*$, la droite (SM) n'est donc jamais horizontale,

et donc jamais faiblement parallèle au plan $\mathcal{P}$. On peut ainsi affirmer que (SM) coupe $\mathcal{P}$ en un point unique M'. L'application $\psi : \Sigma^* \to \mathcal{P}$ est bien définie.



• Montrer que $\psi : \Sigma^* \to \mathcal{P}$ est bijective revient à prouver que, pour tout $N \in \mathcal{P}$ la droite (SN) coupe Σ^* en un unique point M (seul antécédent de N par ψ). Cela provient du fait que la droite (SN) n'est jamais horizontale, n'appartient donc pas au plan tangent à la sphère Σ en S, et à ce titre recoupe la sphère en un unique point M de Σ^* (comme le montre le dessin suivant effectué dans le plan OSN).



2. Soit $M(x,y,z) \in \Sigma^*$. Notons (x',y',z') les coordonnées d'un point M'. On a

$$M' \in (SM) \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \overrightarrow{SM'} = \lambda \overrightarrow{SM} \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \\ 1 = \lambda (z+1) \\ z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{z+1} \\ y' = \dfrac{y}{z+1} \\ z' = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

3. On peut utiliser les formules analytiques (1) qui définissent ψ pour démontrer que $\psi : \Sigma^* \to \mathcal{P}$ est bijective, et répondre ainsi à la seconde partie de la question VI.1. Il suffit de montrer que, pour tout couple de réels (x', y'), le système (1) admet une unique solution (x, y, z) dans Σ^*. On résout donc le système :

$$(2) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{z+1} \\ y' = \dfrac{y}{z+1} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \neq -1. \end{cases}$$

On a

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'(z+1) \\ y = y'(z+1) \\ \left(x'^2 + y'^2\right)(z+1)^2 = 1 - z^2 \\ z \neq -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'(z+1) \\ y = y'(z+1) \\ \left(x'^2 + y'^2\right)(z+1) = 1 - z, \end{cases}$$

soit

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2x'}{1 + x'^2 + y'^2} \\ y = \dfrac{2y'}{1 + x'^2 + y'^2} \\ z = \dfrac{1 - x'^2 - y'^2}{1 + x'^2 + y'^2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Les formules (3) montrent l'existence et l'unicité du triplet (x, y, z) dans Σ^*, et nous offrent une définition analytique de l'application réciproque ψ^{-1}.

4. Un grand cercle de Σ est par définition l'intersection de la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et d'un plan passant par O dont l'équation est de la forme $ax + by + cz = 0$ (avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$).

5. • Soit $\mathcal{D}$ un grand cercle de Σ ne passant pas par S. Son équation est de la forme

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad (4)$$

avec $c \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}M'\left(x', y'\right) \in \psi\left(\mathcal{D}\right) &\Leftrightarrow \exists\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 \quad (3) \text{ et } (4)\\
&\Leftrightarrow \exists\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 \quad \left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ x = \dfrac{2x'}{1 + x'^2 + y'^2} \\ y = \dfrac{2y'}{1 + x'^2 + y'^2} \\ z = \dfrac{1 - x'^2 - y'^2}{1 + x'^2 + y'^2}, \end{array}\right.\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}M'\left(x', y'\right) \in \psi\left(\mathcal{D}\right) &\Leftrightarrow 2ax' + 2by' + c\left(1 - x'^2 - y'^2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2\frac{a}{c}x' - 2\frac{b}{c}y' - 1 = 0. \quad (5)\end{aligned}$$

$\psi\left(\mathcal{D}\right)$ admet l'équation cartésienne

$$\psi\left(\mathcal{D}\right) : \left(x' - \frac{a}{c}\right)^2 + \left(y' - \frac{b}{c}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + b^2}{c^2},$$

qui est celle du cercle de centre $(a/c, b/c)$ et de rayon $\frac{1}{|c|}\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ (strictement positif).

• Si l'on suppose maintenant que $\mathcal{D}$ est un grand cercle de Σ passant par S, on peut recommencer les calculs précédents sous la nouvelle hypothèse $c = 0$. On obtient

$$M'\left(x', y'\right) \in \psi\left(\mathcal{D}\right) \Leftrightarrow ax' + by' = 0,$$

et l'on reconnaît l'équation d'une droite qui contient O.

6. On envisage 2 cas et l'on applique la question précédente.

   – **Premier cas** : Si $\mathcal{D}$ désigne un grand cercle de Σ ne contenant pas S, $\psi\left(\mathcal{D}^*\right) = \psi\left(\mathcal{D}\right)$ est le cercle d'équation (5), et $\psi\left(\mathcal{D}^*\right) \cap \mathcal{C}$ s'obtient en résolvant le système

   $$\left\{\begin{array}{l} x'^2 + y'^2 - 2\dfrac{a}{c}x' - 2\dfrac{b}{c}y' - 1 = 0 \\ x'^2 + y'^2 = 1 \end{array}\right.$$

   c'est-à-dire

   $$\left\{\begin{array}{l} ax' + by' = 0 \\ x'^2 + y'^2 = 1. \end{array}\right.$$

   De deux choses l'une :

- Ou bien $(a,b) \neq (0,0)$, i.e. $\mathcal{D} \neq \mathcal{C}$, et $\psi(\mathcal{D}^*) \cap \mathcal{C}$ est formé de deux points de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés (intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $ax' + by' = 0$ passant par O),
- Ou bien $(a,b) = (0,0)$, i.e. $\mathcal{D} = \mathcal{C}$, et $\psi(\mathcal{D}^*) = \mathcal{C}$.

– **Second cas** : Si $\mathcal{D}$ est un grand cercle de Σ qui contient S, alors $\psi(\mathcal{D}^*)$ est la droite d'équation $ax' + by' = 0$ (VI.5) qui passe par O donc coupe $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés.

7. On pose $\psi^+ = \psi|_{\Sigma^+}$. Comme $\psi : \Sigma \to \mathcal{P}$ est bijective, démontrer que $\psi^+ : \Sigma^+ \to \Pi$ est bijective revient à démontrer que $\psi(\Sigma^+) = \Pi$.

• Montrons l'inclusion $\psi(\Sigma^+) \subset \Pi$. Pour tout $M(x,y,z) \in \Sigma^+$, $\psi(M)$ est un point de coordonnées $(x', y', 0)$ qui vérifient (1), soit

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{z+1} \\ y' = \dfrac{y}{z+1}. \end{cases}$$

On obtient

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2+y^2}{(z+1)^2} = \frac{1-z^2}{(z+1)^2} = \frac{1-z}{1+z} < 1$$

puisque $z > 0$. Cela prouve bien que $\psi(M) \in \Pi$.

• Montrons l'inclusion $\Pi \subset \psi(\Sigma^+)$. Si $M'(x', y', 0) \in \Pi$, l'unique antécédent $M(x,y,z)$ de M' est donné par (3), et montrer que M' appartient à Σ^+ revient à vérifier l'inégalité

$$z = \frac{1 - x'^2 - y'^2}{1 + x'^2 + y'^2} > 0.$$

Celle-ci est triviale puisque par hypothèse $x'^2 + y'^2 < 1$.

8. D'après **V.4**, un demi-grand cercle est l'intersection de Σ^+ et d'un plan passant par O. C'est aussi l'intersection de Σ^+ et d'un grand cercle $\mathcal{D}$ de Σ. Soit $\mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D} \cap \Sigma^+$ un demi-grand cercle. D'après **VI.7**, $\psi(\Sigma^+) = \Pi$ et l'on peut écrire (puisque ψ est injective) :

$$\psi^+\left(\mathcal{D}_{1/2}\right) = \psi\left(\mathcal{D}_{1/2}\right) = \psi\left(\mathcal{D} \cap \Sigma^+\right) = \psi(\mathcal{D}) \cap \psi\left(\Sigma^+\right) = \psi(\mathcal{D}) \cap \Pi.$$

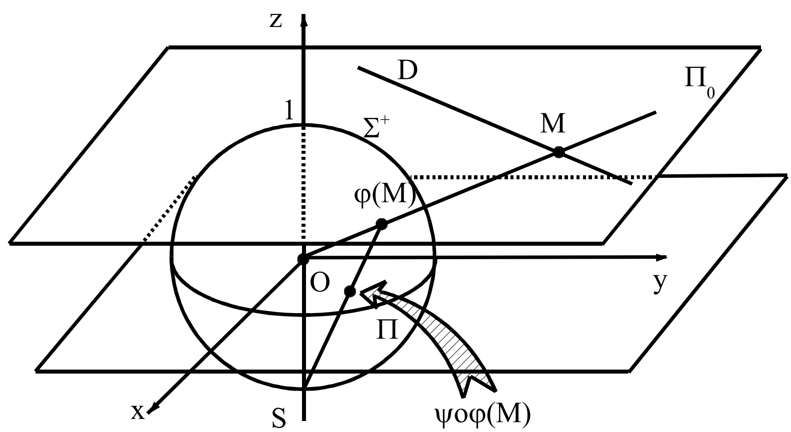
La question **VI.5** montre que $\psi(\mathcal{D})$ est un cercle de $\mathcal{P}$ ou une droite de $\mathcal{P}$ passant par l'origine, et la question **VI.6** montre que $\psi(\mathcal{D})$ coupe toujours $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés. On peut donc affirmer que $\psi^+\left(\mathcal{D}_{1/2}\right)$ est une Π-droite au sens de la partie **IV**.

Partie VII : Synthèse et Application

1. Les applications φ et ψ sont bijectives dans le diagramme :

$$\Pi_0 \xrightarrow{\varphi} \Sigma^+ \xrightarrow{\psi^+} \Pi$$

et il suffit de considérer la composée $h = \psi^+ \circ \varphi$ pour obtenir une bijection de Π_0 sur Π.



L'application $\widetilde{h}$ de l'ensemble $\mathcal{D}(\Pi_0)$ des droites de Π_0 dans l'ensemble $\mathcal{D}(\Pi)$ des Π-droites de Π qui à $D \in \mathcal{D}(\Pi_0)$ associe $h(D) = \psi^+(\varphi(D))$ est :

$\triangleright$ bien définie. En effet, φ transforme une droite D en un demi-grand cercle de Σ (V.4), et ψ^+ transforme un demi-grand cercle $\varphi(D)$ en une Π-droite de Π (d'après VI.8).

$\triangleright$ injective. En effet, h étant une bijection,

$$h(D) = h(D') \Rightarrow D = D'.$$

$\triangleright$ surjective. Si $U \in \mathcal{D}(\Pi)$, considérons deux points A et B de Π tels que $\mathrm{Supp}(U) = (AB)$. Puisque h est bijective, il existe deux points A_0 et B_0 de Π_0 tels que $h(A_0) = A$ et $h(B_0) = B$. Par suite, $h((A_0B_0))$ est une Π-droite passant par A et B, donc $h((A_0B_0)) = ((AB)) = U$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que h conserve le parallélisme. Si D et D' sont deux droites parallèles dans Π_0, de deux choses l'une :

(a) Ou bien $D \cap D' = \varnothing$, et (h étant bijective) :

$$h(D) \cap h(D') = h(D \cap D') = \varnothing,$$

donc $h(D) // h(D')$,

(b) Ou bien $D = D'$, ce qui entraîne $h(D) = h(D')$ puis $h(D) // h(D')$.

2. Les questions **V.3** et **VI.2** nous donnent les formules analytiques qui définissent φ et ψ (formules (A) et (1)) :

$$\varphi : \begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \\ y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} x' = \dfrac{x}{z+1} \\ y' = \dfrac{y}{z+1}. \end{cases}$$

On en déduit

$$h : \begin{cases} x'' = \dfrac{x'}{z'+1} = \dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2+1}} \\ y'' = \dfrac{y'}{z'+1} = \dfrac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2+1}}. \end{cases} \qquad (6)$$

3. Pour inverser les formules (6), remarquons d'abord que $(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $(x'', y'') = (0, 0)$. Supposons alors que ni (x, y), ni (x'', y'') n'est égal à $(0, 0)$. Le système (6) entraîne

$$\frac{y''}{x''} = \frac{y}{x}.$$

En remplaçant y par $y''x/x''$ dans la première équation de (6), on obtient

$$x''\left(1+\sqrt{x^2+\frac{y''^2}{x''^2}x^2+1}\right) = x$$

d'où

$$x^2+\frac{y''^2}{x''^2}x^2+1 = \left(\frac{x}{x''}-1\right)^2$$

et après simplifications

$$x = \frac{2x''}{1-(x''^2+y''^2)}.$$

Par symétrie, on obtiendrait de la même façon

$$y = \frac{2y''}{1-(x''^2+y''^2)}.$$

Les deux formules précédentes nous donnent une expression unique de x et y en fonction de (x'', y'') (notons que la formule obtenue est encore

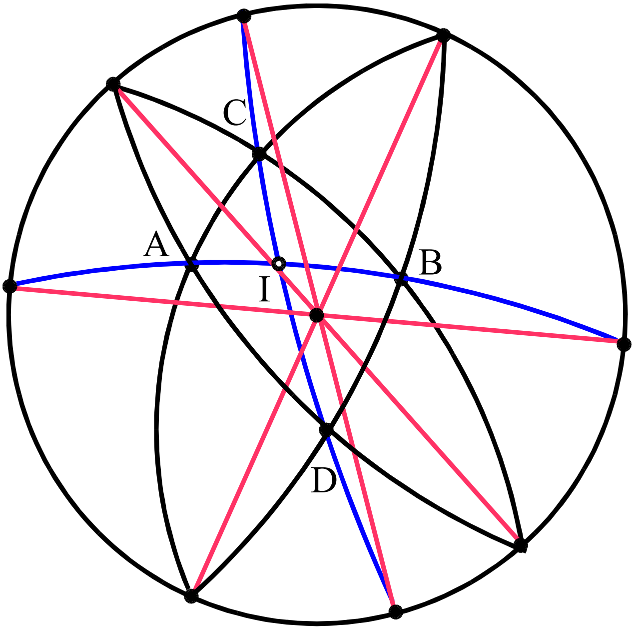


FIG. 14.1 – Question VII.4

valable si les couples sont nuls), de sorte que l'on puisse affirmer que, s'il existe une solution (x, y) à (6), cette solution ne peut être donnée que par ces formules. Il suffit de rappeler que h est bijective pour que l'on sache que le système (6) admet toujours un et un seul couple-solution (x, y), quel que soit la donnée du couple (x'', y'') de réels tels que $x''^2 + y''^2 < 1$. Le système (6) est donc équivalent à

$$h^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{2x''}{1 - (x''^2 + y''^2)} \\ y = \dfrac{2y''}{1 - (x''^2 + y''^2)}. \end{cases} \qquad (7)$$

4. Dans cette question, on note avec des minuscules les antécédents des points par h. Par exemple, si A est un point de Π, a désigne le point de Π_0 tel que $h(a) = A$ (voir FIG. 14.1).
   – Montrons que $((AB))$ n'est pas parallèle à $((CD))$.
   L'application $h : \Pi_0 \to \Pi$ est bijective, transforme une droite en une Π-droite, et conserve le parallélisme. Puisque $((AC)) \,//\, ((BD))$ et $((AD)) \,//\, ((CB))$, on a $(ac) \,//\, (bd)$ et $(ad) \,//\, (cb)$ et le quadrilatère $acbd$ est un parallélogramme dans le plan Π_0. Les diagonales (ab) et

(cd) de ce parallélogramme se coupent donc en leur milieu i, et

$$\{h(i)\} = h[(ab) \cap (cd)] = h((ab)) \cap h((cd)) = ((AB)) \cap ((CD)).$$

Les Π-droites $((AB))$ et $((CD))$ se coupent donc en $I = h(i)$.

– Vérifions que le point I ainsi défini est indépendant du choix de C. Refaisons la construction proposée en partant d'un autre point C' de Π (non situé sur $((AB))$). Le quadrilatère $ac'bd'$ que l'on obtient alors est toujours un parallélogramme, si bien que les diagonales (ab) et (cd) se coupent encore en leur milieu i', et l'on a $i' = i$ où i désigne le milieu de $[ab]$. Le point I' construit à partir de C' vérifie $I' = h(i')$ (comme on l'a montré dans le paragraphe précédent), donc $I' = h(i') = h(i) = I$.

5. La construction de la question **VII.4** fait intervenir n'importe quel point C n'appartenant pas à $((AB))$. Dans un but de simplification, il paraît judicieux de prendre $C = O$, ce que nous ferons bien entendu ! On se reportera à la FIG. 14.2.

   – • **1ère étape** : On trace la Π-parallèle à $((OA))$ passant par B et la Π-parallèle à $((OB))$ passant par A, en pointillé sur le dessin. Ces parallèles se coupent en D.

   – • **2ème étape** : On construit la Π-droite $((OD))$ (facile car O est le centre de $\mathcal{C}$).

   – • **3ème étape** : On construit la Π-droite $((AB))$. On a choisit la construction donnée en **II.3.d**.

     – Un cercle Γ' quelconque passant par A et B coupe $\mathcal{C}$ en 2 points U_1 et U_2, tels que les droites (U_1U_2) et (AB) se coupent en S.
     – On note T_1 et T_2 les intersections de (OS) et $\mathcal{C}$.
     – La Π-droite $((AB))$ admet le cercle Γ circonscrit au triangle AT_1T_2 comme support.

   – • **4ème étape** : Le point I cherché est à l'intersection des Π-droites $((OD))$ et $((AB))$.

6. On considère les points $A(0, 1/2)$ et $B(1/4, 0)$ de la question précédente. Les coordonnées $(x_{A'}, y_{A'})$ de A' sont données par (7) :

$$\begin{cases} x_{A'} = \dfrac{2x_A}{1 - \left(x_A^2 + y_A^2\right)} = 0 \\ y_{A'} = \dfrac{2y_A}{1 - \left(x_A^2 + y_A^2\right)} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

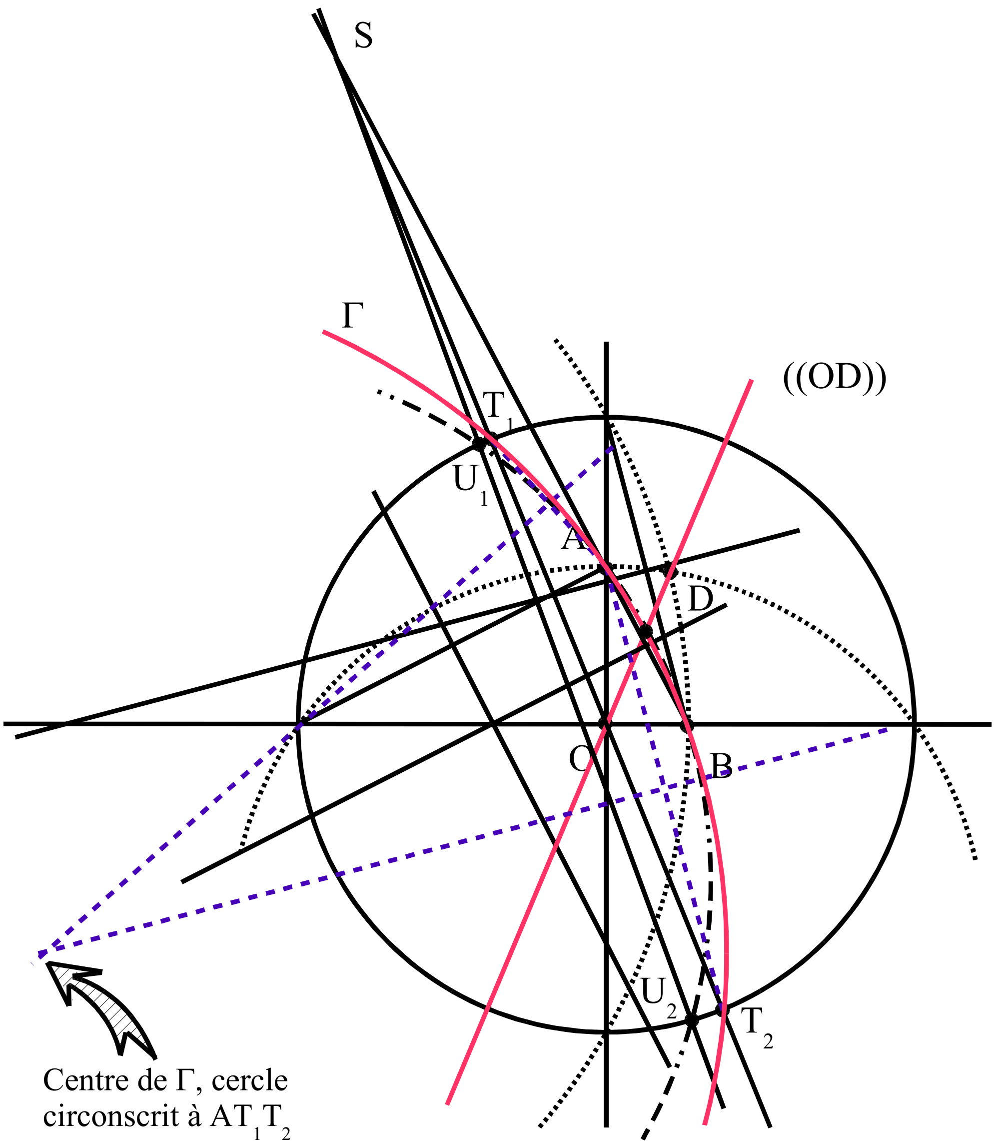


FIG. 14.2 – Question VII.5

On trouve ensuite

$$\begin{cases} x_{B'} = \dfrac{2x_B}{1-\left(x_B^2+y_B^2\right)} = \dfrac{8}{15} \\ y_{B'} = \dfrac{2y_B}{1-\left(x_B^2+y_B^2\right)} = 0. \end{cases}$$

Le milieu I' de $[A'B']$ admet donc les coordonnées $(\frac{4}{15}, \frac{2}{3})$, et celles du Π-milieu $I = h(I')$ sont données par (6) :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_{I'}}{1+\sqrt{x_{I'}^2+y_{I'}^2+1}} \\ y_I = \dfrac{y_{I'}}{1+\sqrt{x_{I'}^2+y_{I'}^2+1}}. \end{cases}$$

Puisque

$$\sqrt{x_{I'}^2+y_{I'}^2+1} = \sqrt{\frac{16}{225}+\frac{4}{9}+1} = \frac{1}{15}\sqrt{341},$$

on trouve

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{4}{15+\sqrt{341}} \\ y_I = \dfrac{10}{15+\sqrt{341}}. \end{cases}$$

14.3 Commentaires

14.3.1 Remarque de D.-J. Mercier

Ce beau sujet de géométrie, proposé par notre collègue Bruno Aebischer[1], a malheureusement donné lieu à l'annulation de l'épreuve, et à son report pour permettre l'égalité de traitement des candidats. Un (seul !) centre de concours a en effet tenu à interdire l'utilisation du compas aux candidats, ce qui a eu deux conséquences prévisibles : faire remuer Pythagore dans sa tombe, et... annuler l'épreuve pour le déséquilibre certain entraîné par cette interdiction dans un problème où l'on demandait explicitement des constructions à la règle et au compas, et entièrement construit autour de la géométrie du cercle.

Quoiqu'il en soit, ce problème demeure un excellent problème d'entraînement, et je compte l'utiliser plus d'une fois avec mes étudiants. Le paragraphe suivant contient les commentaires de l'auteur du problème.

[1] bruno.aebischer@univ-fcomte.fr

14.3.2 Présentation du problème par B. Aebischer

Le point de départ de cet énoncé est un petit problème de construction géomé-trique simple d'aspect et pas si évident à résoudre : étant donnés un cercle $\mathcal{C}$ et deux points A et B distincts du disque ouvert $\prod$ limité par $\mathcal{C}$, comment construire un cercle Γ passant par ces deux points et rencontrant $\mathcal{C}$ en deux points diamétralement opposés (sur $\mathcal{C}$) ? (et est-ce toujours possible ?)

La résolution géométrique de ce problème mobilise des connaissances sur la puissance d'un point par rapport à un cercle, et bien que cette notion soit au programme, j'ai pensé qu'il était plus prudent de faire une première partie pour la redéfinir, et pour démontrer les résultats utilisés dans la suite.

Les parties **II** et **III** proposent deux solutions géométriques et une solution analytique. Dans la partie **IV**, on démontre que les arcs de cercles inclus dans $\prod$ et joignant deux points diamétralement opposés de $\mathcal{C}$ ont des propriétés analogues aux droites d'un plan affine.

Les parties **V** et **VI** permettent de justifier cette intuition, en mettant en bijection le disque avec un plan, en composant deux projections coniques : l'une d'un plan « horizontal » sur la moitié supérieure de la sphère unité, avec comme centre de projection le centre de la sphère ; la deuxième de la sphère sur le plan « équatorial », envoyant l'« hémisphère nord » sur le disque $\mathcal{D}$, le centre de la projection étant cette fois au « pôle sud » de la sphère. Les techniques utilisées dans ces deux parties sont plutôt analytiques.

La partie **VII** propose une synthèse puis une application à la définition du « $\prod$-milieu » d'un bipoint du disque ouvert $\prod$. Enfin on demande de construire effectivement le $\prod$-milieu d'un bipoint dans une application numérique.

Chapitre 15

CAPES externe 2005, épreuve 2 (remplacement)

15.1 Énoncé

Sauf exceptions dûment signalées, chaque partie peut être traitée indépendamment des autres.

Dans tout le problème, on se place dans le cadre d'un plan euclidien $\prod$ *rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *par rapport auquel les coordonnées sont notées* x *et* y*. La droite* Δ *est définie par son équation* $x = a$ *où* a *est une constante réelle strictement positive ; elle coupe l'axe des abscisses au point* A.

La notation :

$$X = \{M \mid \varphi(x, y) = 0\}$$

désigne la partie X *du plan définie comme l'ensemble des points* M *dont les coordonnées* (x, y) *vérifient l'égalité* $\varphi(x, y) = 0$ *; cette relation est alors appelée une équation de* X*. Une définition analogue est posée dans le cas de coordonnées polaires* (ρ, θ) *par rapport au repère formé du point* O *et de la demi-droite* $\mathbb{R}_+\vec{\imath}$.

Première partie

Soit k une constante réelle strictement positive. On note Φ la courbe décrite par le point M de coordonnées :

$$x = a + k\cos(t), \; y = a\tan(t) + k\sin(t)$$

où t décrit la réunion $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. On note H la projection orthogonale de M sur Δ et Ω le point de Δ d'ordonnée $a\tan(t)$.

1.1 Dans le cas particulier $a = 1$, $k = 2$, étudier la courbe Φ (variations, étude asymptotique, points singuliers, représentation graphique, ...) ; on pourra s'aider d'une calculatrice graphique.

1.2 Donner l'allure de Φ dans le cas général, en distinguant :

   (a) les cas où $0 < k < a$,

   (b) le cas où $k = a$,

   (c) les cas où $k > a$.

1.3 Déterminer une fonction polynomiale f à deux variables telle que $f(x, y) = 0$ soit une équation de Φ.

1.4 Donner une équation polaire de Φ.

1.5 Déterminer les points réguliers M de Φ et donner en ces points les coordonnées d'un vecteur normal.

1.6 Calculer les coordonnées du point d'intersection R de la normale en M avec la droite d'équation $y = a\tan(t)$ dans le cas où M n'appartient pas à l'axe des abscisses. Que peut-on dire du triangle $RO\Omega$?

Deuxième partie

Sont traitées ici quelques propriétés des coniques exclusivement utilisées dans les troisième et quatrième parties.

Un axe est défini par une droite D, un point O_1 de D et un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ dirigeant D. Pour tout couple (A, B) de points de D, on appelle mesure algébrique et l'on note $\overline{AB}$ la différence $x_B - x_A$ de leurs abscisses relatives au repère $(O, \overrightarrow{u})$: on remarquera qu'elle est indépendante du point O_1.

La distance de deux points M et N du plan est notée MN. S'ils sont distincts, on note (MN) l'unique droite qui les joint.

Sur l'hyperbole

2.1 Écrire le théorème de Thalès dans le plan, ainsi que sa réciproque, en utilisant les mesures algébriques définies ci-dessus : on se donnera deux axes distincts coupant chacun un triplet de droites (D, D', D'') dont les deux dernières sont parallèles et disjointes, et l'on écrira, sans justification, une condition nécessaire et suffisante sur les six points d'intersection pour que les deux premières le soient, éclairée par une figure à main levée.

2.2 Soient trois axes du plan $\prod$ dont les deux premiers, sécants en un point O_1, sont respectivement l'axe des abscisses (O_1x) et l'axe des ordonnées (O_1y) d'un certain repère affine, le troisième les coupant respectivement en deux points distincts U et V.
Pour tout point M de (UV), autre que U ou V, on note P et Q ses projections respectives sur chacun des deux axes de coordonnées parallèlement à l'autre. Déterminer l'unique hyperbole $\mathcal{H}$ passant par M et admettant (O_1x) et (O_1y) comme asymptotes (on pourra introduire les projections sur les axes d'un point courant M' de $\mathcal{H}$).

2.3 À l'aide par exemple du théorème de Thalès, montrer qu'un point M' de (UV) distinct de M, appartient à $\mathcal{H}$ si, et seulement s'il est symétrique de M par rapport au milieu de $[UV]$.

2.4 Quelle propriété obtient-on si l'on fait tendre un point N de $\mathcal{H}$ vers M ?

Sur la parabole

Dans ce qui suit, M est un point d'une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F, de sommet S et de directrice D, et H sa projection orthogonale sur D.

2.5 Soit T la médiatrice du segment $[FH]$. Montrer que, pour tout point N de T différent de M et se projetant orthogonalement en K sur D, on dispose de l'inégalité $NF > NK$. Ce résultat reste-t-il valable si l'on considère un point N' tel que $N'F > N'H$?

2.6 Déduire de la question précédente que la tangente à $\mathcal{P}$ en M est la médiatrice du segment $[FH]$.

2.7 Quel est l'ensemble des projections orthogonales de F sur les tangentes à la parabole ?

2.8 Cette question établit les principales propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

(a) Si A et B sont deux points d'un cercle du plan alignés avec M, on définit la puissance de M par rapport au cercle comme le nombre $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ s'ils sont distincts, et $\overline{MA}^2$ s'ils sont confondus et si M appartient à la tangente en A. Établir la cohérence de cette définition.

(b) Si (x_0, y_0) est le couple des coordonnées de M relatives à un repère orthonormé dans lequel le cercle a pour équation :

$$C(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

montrer que la puissance de M est égale à $C(x_0, y_0)$.

(c) Que peut-on dire des points de puissance nulle par rapport au cercle ?

(d) Déterminer (par exemple analytiquement) l'axe radical de deux cercles de centres distincts, c'est-à-dire le lieu des points ayant mêmes puissances par rapport à ces cercles.

2.9 Soit (M, M') un couple de points distincts de $\mathcal{P}$, I leur milieu et H et H' leurs projections orthogonales respectives sur D.

(a) Déterminer l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles passant par F et respectivement centrés en M et M'.

(b) Soit J l'intersection de l'axe radical précédent et de la directrice. Que peut-on dire du triplet de points (J, H, H') ?

2.10 Cette question établit la principale propriété des cordes de $\mathcal{P}$ ayant une direction donnée.

(a) Montrer que, lorsque l'on fait varier le couple (M, M') de façon que la droite (MM') reste parallèle à une direction fixe, le point I décrit alors une partie d'une droite orthogonale à D.

(b) Que devient la configuration précédente lorsque la droite (MM') devient tangente à la parabole ? Relier la figure ainsi obtenue au résultat de la question **2.7**.

(c) Soit une droite quelconque perpendiculaire à D. Montrer qu'elle est un axe de symétrie (généralement non orthogonale) pour la parabole et donner une construction géométrique de la direction selon laquelle s'exerce cette symétrie.

2.11 Soit Q un point de $\mathcal{P}$ distinct de S et (N, M) un couple de points distincts de $\mathcal{P}$ déterminant une corde parallèle à SQ. On note L le point défini par $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{SQ}$, A le symétrique orthogonal de N par rapport à l'axe SF de la parabole, Ω et R les projections respectives parallèlement à l'axe de A et de Q sur (NM). Déduire de la question précédente l'égalité $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{\Omega M}$.
Étendre le résultat au cas où $M = N$ et où l'on remplace la droite (NM) par la tangente à $\mathcal{P}$ en N.

Troisième partie

*Soit Γ une courbe du plan $\prod$ privée de ses éventuels points d'abscisse nulle. On dit qu'une courbe C de $\prod$ est la **transformée de Descartes** de Γ relative à O et à Δ si elle est formée des points M tels qu'il existe un point Ω de Δ et un point P commun à $(O\Omega)$ et à Γ tels que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\Omega M}$.*

3.1 Si Γ est définie par des équations paramétriques de la forme :

$$x = \alpha(t)\,,\ y = \beta(t)\,,$$

montrer qu'une représentation paramétrique de sa transformée de Descartes C s'écrit sous la forme :

$$x = a + \alpha(t)\,,\ y = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\left(a + \alpha(t)\right).$$

3.2 Donner une équation cartésienne des transformées de Descartes des droites privées de leurs éventuels points d'abscisse nulle.
Expliquer le résultat trouvé à partir des propriétés mises en évidence dans la deuxième partie.

3.3 Donner une équation cartésienne de la transformée de Descartes de la parabole d'équation $y = cx^2$ $(c > 0)$ privée de son sommet.

3.4 Retrouver ce résultat grâce à une question de la deuxième partie.

3.5 Montrer que C, la courbe d'équation cartésienne :

$$y(x-a) = x\left(c\left(x - a - b^2 + d\right)\right)\ (c \neq 0)$$

privée de ses points d'abscisse a, est la transformée de Descartes de la parabole d'équation $y = c(x-b)^2 + d$ privée du point $\left(0, b^2c + d\right)$.

3.6 Montrer que cette courbe C admet une parabole asymptote, c'est-à-dire d'équation $y = \varphi(x)$ où φ est un polynôme du second degré tel que :

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left(y - \varphi(x)\right) = 0,$$

parabole dont on précisera la position relative à C.

3.7 Donner la forme de cette courbe C pour $b = 0$, $c = 1$, $d = 1$ et $a = 1$, puis pour $a = 6$ (dans ce second cas, on pourra plus précisément étudier l'allure de C aux voisinages des points d'abscisse $x = 4$ et $x = 6$).

3.8 Étudier la transformée de Descartes C d'un cercle de centre O et de rayon k privé de ses deux points d'abscisse nulle. Que retrouve-t-on ainsi ?

Quatrième partie

Cette partie utilise la première question de la partie précédente.

4.1 Vérifier que $\rho = -a\cos(t)$, où t décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est une équation polaire du cercle Γ passant par O, centré au point de coordonnées $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ et privé de son point d'abscisse nulle.
Vérifier que sa transformée de Descartes est la courbe C de représentation paramétrique :

$$x = a\sin^2(t)\,,\ y = a\tan(t)\sin^2(t)\,.$$

Donner la forme de la courbe.

4.2 Montrer que C admet une autre représentation paramétrique de la forme :

$$x = a\frac{m^2}{1+m^2},\ y = a\frac{m^3}{1+m^2}.$$

Comment peut-on relier les deux représentations ?

4.3 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = -4ax$ et M un point de C distinct de O. On note M_1 le point distinct de O commun à $\mathcal{P}$ et à la droite (OM). Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM})$.

4.4 Montrer qu'il existe un unique point M_2 de $\mathcal{P}$, dont on donnera les coordonnées, tel que la tangente en M_2 à $\mathcal{P}$ coupe orthogonalement (OM) en M.

4.5 Notant Ω le point de associé à M lors de la construction de la transformée de Descartes de Γ par rapport à O montrer, par exemple grâce à un résultat de la deuxième partie, que sa projection orthogonale Q sur (Oy) est confondue avec celle du foyer F de $\mathcal{P}$ sur la tangente en M_2, et que $QFPM$ est un rectangle.

4.6 Montrer que toute transformée de Descartes d'un cercle passant par O et privé de ses points d'abscisses nulles est incluse dans l'ensemble des points vérifiant une égalité de la forme :

$$x(x^2+y^2) = ux^2 + 2vxy + wy^2.$$

Cinquième partie

On revient maintenant à une courbe Γ quelconque, privée de ses points d'abscisse nulle. Cette partie ne demande, pour pouvoir être traitée, que la connaissance de la définition de la transformation de Descartes.

On y montre que cette transformation permet de ***créer des courbes dont une équation annule un polynôme de degré quelconque****, ce qui était l'un des objectifs poursuivis par Descartes lui-même au moment de la rédaction de son livre La Géométrie, paru en 1637.*

5.1 Soit f une fonction polynomiale réelle de degrés $p \geq 1$ et $q \geq 1$ par rapport à deux variables x et y, telle que tout point de Γ vérifie $f(x, y) = 0$. Déterminer une fonction polynomiale non nulle g telle que $g(x, y) = 0$ est une équation cartésienne de la transformée de Descartes C de Γ.

5.2 Étudier le même problème en échangeant les rôles de C et de Γ.

5.3 Déterminer une fonction polynomiale g convenable dans le cas où $f(x, y) = y - x^2$..Peut-on en obtenir une autre, de degré inférieur, par division de g par un polynôme de la forme $ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$?

5.4 Appliquer le résultat de la question **5.1** au cas particulier faisant l'objet de la première partie.

5.5 Soit :

$$f(x, y) = \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m} f_{m,k} x^{m-k} y^k$$

une fonction polynomiale réelle de degrés respectifs $p \geq 1$ et $q \geq 1$ par rapport à x et y. On notera qu'il existe donc un m et un k tels que $f_{m,k} \neq 0$ alors que, pour tout m, $f_{m,k} = 0$ si $k > q$ ou $k < m - p$.
On dit que f est de degré n et de valuation v lorsqu'il existe au moins un k et un h tels que $f_{n,k} f_{v,h} \neq 0$.
Soit λ un réel donné non nul. On note $\varphi(x, y))$ la fonction rationnelle définie par :

$$\varphi(x, y) = f\left(x - \lambda, \frac{y}{x}(x - \lambda)\right)$$

Montrer qu'il existe un entier r compris entre 0 et q tel que la fonction g définie par $g(x, y) = x^r \varphi(x, y) =$ soit polynomiale.

5.6 Dans la suite de cette partie, r est supposé minimal. Montrer, par exemple à l'aide de fonctions polynomiales particulières du type $(x, y) \mapsto x^a + (x + \lambda)^b y^q$ où a et b sont des entiers positifs ou nuls donnés, que l'on peut avoir r égal à n'importe quel entier entre 0 et q.

5.7 Déterminer l'entier maximal $s \geq 0$ tel que la fonction$F = T_\lambda (f)$ définie par :

$$F(x,y) = (x-\lambda)^{-s} g(x,y)$$

soit polynomiale.
Montrer que, si $r \geq 1$, alors $F(0,0) = 0$.

5.8 Calculer en fonction de (n,v,r) le degré N de la fonction polynomiale F. Démontrer l'inégalité $N \leq 2n$, et donner un exemple, où n est un entier donné strictement positif, tel que l'égalité soit atteinte.

5.9 Calculer N pour $f(x,y) = x^a + (x+\lambda)^b y^q$ où a est un entier positif ou nul donné, et vérifier dans ce cas l'inégalité $N \geq \dfrac{n}{2}$.
Montrer que, pour tout entier n strictement positif et tout entier m compris entre la partie entière de $\dfrac{n+1}{2}$ et n, il existe une fonction polynomiale f telle que $N = m$.

5.10 Montrer que, si $f(x,y)$ n'est pas le produit d'une fonction polynomiale de la forme $x+k$ par une fonction polynomiale, il existe un réel non nul μ tel que :

$$f = T_\mu (F) = T_\mu \circ T_\lambda (f) = T_\lambda \circ T_\mu (f).$$

Que peut-on en déduire pour N ?

5.11 Déterminer les fonctions polynomiales f telles que $T_\lambda (f) = f$.

15.2 Corrigé

Première partie

1.1. Posons $U =]-\pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/2[$. On fera l'abus d'appeler aussi Φ l'application de U dans Π qui à t associe le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t. \end{cases}$$

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables (et même de classe C^∞) sur U et

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + 2\cos t = \dfrac{1+2\cos^3 t}{\cos^2 t} \end{cases}.$$

Comme l'on impose à t d'appartenir à U, on a

$$x'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \text{ ou } \pi.$$

On a ensuite

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm t_0 \ (2\pi)$$

où $t_0 = \arccos\left(-(\frac{1}{2})^{1/3}\right) \simeq 2,487\,7$. Sous la condition $t \in U$, on a donc

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 \text{ ou } -t_0 + 2\pi.$$

Posons $t_1 = -t_0 + 2\pi$. On calcule certains points et les vecteurs tangents en ces points. Puisque

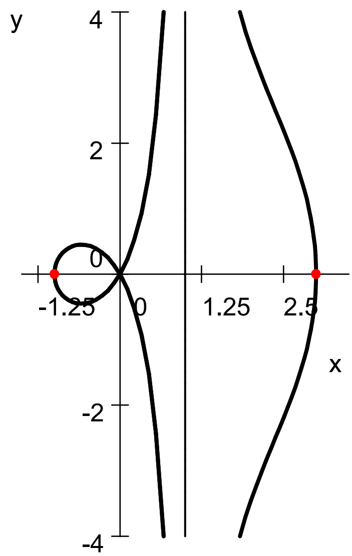
$$\begin{cases} \Phi(0) = (3,0) \text{ et } \Phi'(0) = (0,3), \\ \Phi(\pi) = (-1,0) \text{ et } \Phi'(\pi) = (0,-1), \end{cases}$$

la courbe Φ admet des tangentes verticales en $(3,0)$ et en $(-1,0)$. La calculatrice donne : $\Phi(t_0) \simeq (-0,59 \ ; \ 0,45)$ et $\Phi(-t_1) \simeq (-0,59 \ ; \ -0,45)$. En calculant quelques limites, on trouve le tableau de variations suivant :

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		t_0		π		t_1		$\frac{3\pi}{2}$
x'	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|\|$
y'	$\|\|$	$+$	3	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	$\|\|$
x	$\|\|1$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$1\|\|1$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	$1\|\|$
y	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty\|\|-\infty$	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\|$	$\nearrow$	$+\infty\|\|$

La courbe Φ admet la droite verticale d'équation $x = 1$ comme asymptote lorsque t tend vers $\pm\pi/2$ ou $3\pi/2$. Une calculatrice donne l'allure suivante du graphe :

Remarques : La courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses puisque $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On aurait pu dès le départ restreindre l'ensemble de définition de Φ et étudier l'arc paramétré sur $]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$ au lieu de U, puis compléter le tracé de la courbe par symétrie. Toutes les courbes de cette partie sont des **conchoïdes de Nicomède**.



1.2. On recommence comme précédemment. Ici

$$\begin{cases} x(t) = a + k\cos t \\ y(t) = a\tan t + k\sin t \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x'(t) = -k\sin t \\ y'(t) = \dfrac{a}{\cos^2 t} + k\cos t = \dfrac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t} \end{cases} \cdot$$

On a toujours

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } \pi.$$

Par contre

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 t = -\frac{a}{k} \Leftrightarrow \cos t = -\left(\frac{a}{k}\right)^{1/3}$$

et y' s'annulera ou non suivant les valeurs des paramètres a et k :

$$y' \text{ s'annule sur } U \;\Leftrightarrow\; -1 \leq -\left(\frac{a}{k}\right)^{1/3} \;\Leftrightarrow\; a \leq k.$$

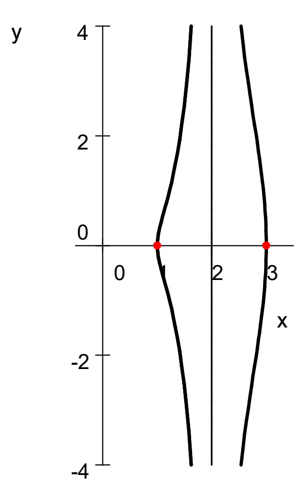
On envisage donc trois cas.

a) Si $0 < k < a$, y' ne s'annule jamais sur U. Le graphe de Φ n'a plus de boucle mais tous les points sont réguliers. La droite d'équation $x = a$ est l'asymptote verticale de plusieurs branches de Φ.

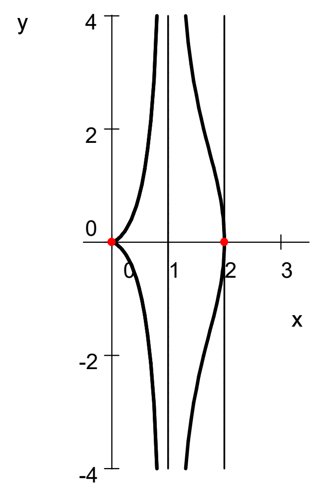
Le dessin ci-dessous correspond à $(a,k)=(2,1)$. Les tangentes en $(1,0)$ et $(3,0)$ sont verticales.

Remarque : Le tableau des variations des fonctions x et y est une adaptation de celui de la question 1.1. Ici y' ne s'annule pas, donc :

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
x'	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
y'	$\|\|$	$+$	$a+k$	$+$	$\|\|$	$+$	$a-k$	$+$	$\|\|$
x	$\|\|a$	$\nearrow$	$a+k$	$\searrow$	$a\|\|a$	$\searrow$	$a-k$	$\nearrow$	$a\|\|$
y	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty\|\|-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty\|\|$



Cas a)



Cas b)

b) Si $k=a$,

$$y'(t)=0 \Leftrightarrow \cos^3 t=-1 \Leftrightarrow t=\pi$$

Le graphe et le tableau de variation ressemblent à ceux du cas précédent, mais cette fois-ci $\Phi'(\pi)=(0,0)$, donc le point $\Phi(\pi)=(0,0)=O$ est singulier. Un calcul donne

$$\begin{cases} x''(t)=-a\cos t \\ y''(t)=\dfrac{2a\sin t}{\cos^3 t}-a\sin t \end{cases}.$$

de sorte que $\Phi''(\pi)=(a,0)$ ne soit pas nul, et dirige la tangente en O. On peut vérifier que $\Phi^{(3)}(\pi)$ n'est pas nul (le calcul donne $\Phi^{(3)}(\pi)=(0,3a)$) et que $\left(\Phi''(\pi),\Phi^{(3)}(\pi)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, de sorte que O soit un point de rebroussement de première espèce. La calculatrice graphique confirme ces déductions. Si $k=a=1$, elle nous donne en effet le graphique ci-dessus.

c) Si $k > a$, la situation est celle de la question 1.1.

1.3. Si $M(x, y)$ appartient à Φ, il existe $t \in U$ tel que

$$\begin{cases} x = a + k\cos t \\ y = a\tan t + k\sin t. \end{cases} \qquad (*)$$

Alors

$$\cos t = \frac{x-a}{k} \qquad (1)$$

On a $x \neq a$ puisque t n'est jamais congru à $\pi/2$ modulo π, donc

$$y = \left(\frac{ak}{x-a} + k\right)\sin t = \frac{kx}{x-a}\sin t.$$

Par suite

$$y^2 + \left(\frac{kx}{x-a}\right)^2 \cos^2 t = \left(\frac{kx}{x-a}\right)^2.$$

En utilisant (1), on obtient

$$y^2 + \left(\frac{kx}{x-a}\right)^2 \left(\frac{x-a}{k}\right)^2 = \left(\frac{kx}{x-a}\right)^2$$

soit

$$y^2(x-a)^2 + x^2(x-a)^2 = k^2x^2$$

ou encore

$$\left(x^2+y^2\right)(x-a)^2 - k^2x^2 = 0. \qquad (2)$$

On peut donc poser $f(x, y) = \left(x^2+y^2\right)(x-a)^2 - k^2x^2$ et affirmer que tout point de Φ vérifie l'équation (2). Pour pouvoir conclure, il nous faut encore vérifier que, réciproquement, tout point $M(x, y)$ satisfaisant l'équation (2) appartient à Φ. Si $M(x, y)$ satisfait (2), envisageons deux cas.

► Si $x = 0$, alors $y = 0$ (en remplaçant dans (2)), mais l'origine n'appartient effectivement à Φ que dans les cas b) et c) où $k \geq a$.

► Si $x \neq 0$,

$$(2) \Rightarrow \left(\frac{x-a}{k}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

de sorte qu'il existe $t \in [-\pi/2, 3\pi/2[$ tel que

$$\frac{x-a}{k} = \cos t. \qquad (3)$$

En fait $t \in U$ car $x \neq a$ (faire $x = a$ dans (2) donne $k^2a^2 = 0$, ce qui est absurde). On a donc trouvé t tel que $x = a + k\cos t$. Les égalités (2) et (3) entraînent

$$\left(x^2 + y^2\right)\cos^2 t - x^2 = 0$$

d'où

$$y^2 \cos^2 t = x^2 \sin^2 t$$

puis

$$y = \pm x \tan t = \pm\left(a + k\cos t\right)\tan t = \pm\left(a\tan t + k\sin t\right).$$

Si $y = a\tan t + k\sin t$, on a trouvé un réel $t \in U$ qui vérifie le système $(*)$, donc $M \in \Phi$. Si $y = -\left(a\tan t + k\sin t\right)$, il suffit de choisir le réel t' de U congru à $-t$ modulo 2π pour avoir

$$\begin{cases} x = a + k\cos t' \\ y = a\tan t' + k\sin t', \end{cases}$$

et donc $M \in \Phi$ encore une fois.

Conclusion : Soit C la courbe d'équation cartésienne

$$f\left(x, y\right) = \left(x^2 + y^2\right)\left(x - a\right)^2 - k^2x^2 = 0. \quad (4)$$

Dans les cas b) et c) (autrement dit lorsque $a \leq k$), on a $\Phi = C$. Dans le cas a) où $0 < k < a$, on a $\Phi = C \setminus \{(0, 0)\}$.

1.4. Faisons $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ dans (4) :

$$\rho^2\left(\rho\cos\theta - a\right)^2 - k^2\rho^2\cos^2\theta = 0.$$

Supposons $\rho \neq 0$ et simplifions. On obtient

$$\rho\cos\theta - a = \pm k\cos\theta$$

soit les équations polaires :

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm k.$$

Remarques : On a divisé par $\cos\theta$, qui n'est pas nul car θ n'est jamais congru à $\pi/2$ modulo π. En effet, aucun point de l'axe des ordonnées n'appartient à une conchoïde Φ excepté éventuellement l'origine que nous avons bannie en supposant $\rho \neq 0$. On remarque aussi que l'origine O appartient néanmoins à la courbe d'équation polaire $\rho = a/\cos\theta \pm k$ dans le cas où $0 < a \leq k$, ce qui est parfait !

1.5. Un point $M\left(x, y\right)$ de la courbe C (qui coïncide avec Φ sauf éventuellement en O dans certains cas) est régulier s'il n'est pas singulier. Il est singulier si et seulement si il annule les deux dérivées partielles premières de f, c'est-à-dire :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(x-a)^2 + 2\left(x^2+y^2\right)(x-a) - 2k^2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(x-a)^2 = 0. \end{cases}$$

Puisque x n'est jamais égal à a, (5) équivaut à

$$\begin{cases} x(x-a)^2 + x^2(x-a) - k^2x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

De deux choses l'une :

• Ou bien $x = 0$, et $(0,0)$ est un point singulier de C, donc sera aussi un point singulier de Φ dans les cas b) et c) (où $k \geq a$), l'origine $O(0,0)$ n'appartenant pas à Φ dans le cas a).

• Ou bien $x \neq 0$, et les points singuliers de C autres que O sont solutions de

$$(6)\quad \begin{cases} (x-a)^2 + x(x-a) - k^2 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

On pourrait trouver deux solutions $(x,0)$ au système (6), mais c'est inutile, car les solutions obtenues n'appartiendront pas à C, donc ne seront ni des points singuliers de C, ni des points singuliers de Φ. En effet, (4) et (6) entraînent

$$x^2\left[k^2 - x(x-a)\right] - k^2x^2 = 0$$

d'où $x = a$ (puisque $x \neq 0$), et aucun point de C n'est d'abscisse a !

Conclusion : L'origine $O(0,0)$ est le seul point singulier de Φ lorsqu'il appartient à Φ (i.e. lorsque $k \geq a$). En tout point régulier $M(x,y)$ de $\Phi\backslash\{O\}$ on dispose du vecteur normal $\overrightarrow{n}_M$ à la courbe Φ : c'est le gradient de f

$$\overrightarrow{n}_M = \triangledown f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

où les dérivées partielles sont données par (5).

1.6. Soit $M(t)$ un point de Φ de paramètre t et non situé sur l'axe (Ox). Il s'agit donc d'un point régulier. Avec notre abus d'écriture, nous pouvons écrie $M(t) = \Phi(t) = (x(t), y(t)) = (a + k\cos t, a\tan t + k\sin t)$. Notons

$(x_R, a\tan t)$ les coordonnées de R.
Le vecteur $\overrightarrow{M(t)R}$ est orthogonal à $\Phi'(t) = (x'(t), y'(t))$, donc

$$\begin{pmatrix} x_R - x(t) \\ a\tan t - y(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_R - x(t))\, x'(t) + (a\tan t - y(t))\, y'(t) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} x_R &= x(t) + \frac{y(t) - a\tan t}{x'(t)} y'(t) \\ &= a + k\cos t + \frac{k\sin t}{-k\sin t} \frac{a + k\cos^3 t}{\cos^2 t} = \frac{a\left(\cos^2 t - 1\right)}{\cos^2 t} = -a\tan^2 t. \end{aligned}$$

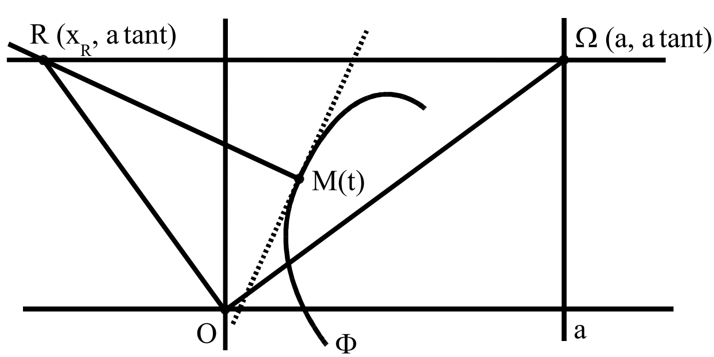
Ainsi

$$R\begin{pmatrix} -a\tan^2 t \\ a\tan t \end{pmatrix} \; ; \quad O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \Omega\begin{pmatrix} a \\ a\tan t \end{pmatrix}.$$

On constate que

$$\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{O\Omega} = \left(-a\tan^2 t\right) \times a + (a\tan t)^2 = 0,$$

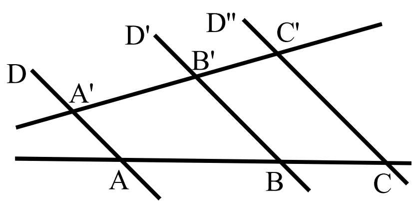
de sorte que le triangle $RO\Omega$ soit rectangle en O.



Deuxième partie

2.1. Trois droites D, D' et D'' coupent deux axes en A, B, C, A', B', C' comme sur le dessin ci-dessous. On suppose que D' et D'' sont strictement parallèles. Le Théorème de Thalès et sa réciproque énoncent que les trois droites D, D' et D'' sont parallèles si et seulement si

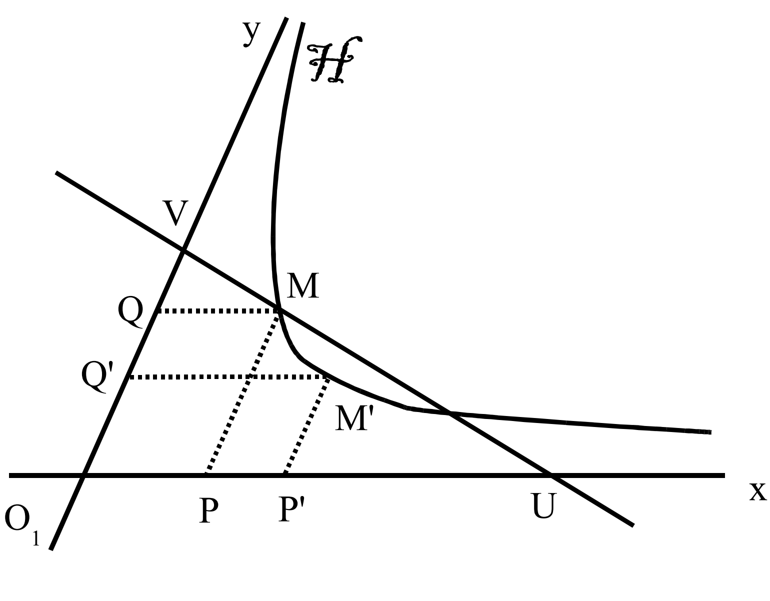
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$



2.2. Dans un repère affine $\mathcal{R}$ porté par ses asymptotes, une hyperbole admet toujours une équation de la forme $xy = k$, où $k \in \mathbb{R}$ ([21], Théorème 321). Une hyperbole $\mathcal{H}$ satisfait donc les conditions de l'énoncé si et seulement si son équation est $xy = x_0 y_0$ où (x_0, y_0) représentent les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Cela prouve l'existence d'une et d'une seule hyperbole passant par M et d'asymptotes (O_1x), (O_1y). Mieux, un point $M'(x,y)$ appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si $xy = x_0y_0$, et cela s'écrit $\overline{O_1P'} \times \overline{O_1Q'} = \overline{O_1P} \times \overline{O_1Q}$, ou encore

$$\frac{\overline{O_1P'}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{O_1Q}}{\overline{O_1Q'}}$$

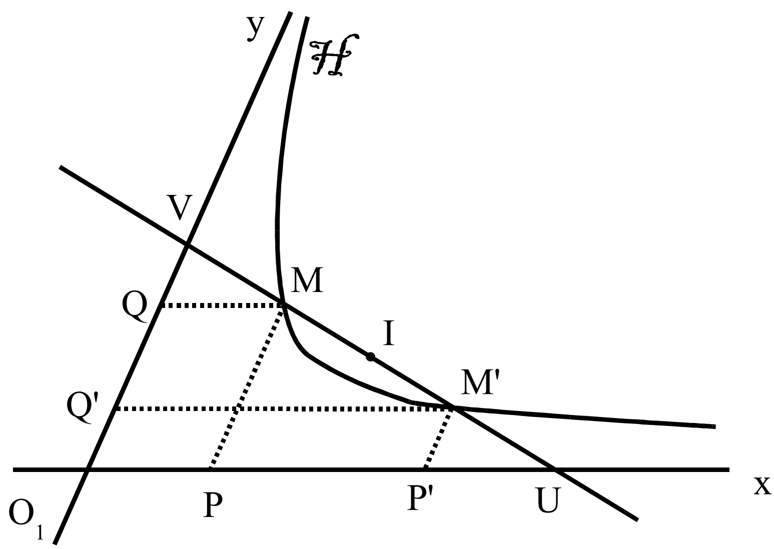
si l'on note P' et Q' les projetés de M' sur les deux axes de coordonnées parallèlement à l'autre.



Le Théorème de Thalès et sa réciproque permettent alors d'affirmer que :

$$M' \in \mathcal{H} \;\Leftrightarrow\; \frac{\overline{O_1P'}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{O_1Q}}{\overline{O_1Q'}} \;\Leftrightarrow\; \left(PQ'\right) // \left(P'Q\right).$$

2.3. Conservons les notations de la question précédente.



Le Théorème de Thalès donne

$$\frac{\overline{O_1P'}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{VM'}}{\overline{VM}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{O_1Q}}{\overline{O_1Q'}} = \frac{\overline{UM}}{\overline{UM'}},$$

et la caractérisation de la question 2.3 permet d'écrire

$$M' \in \mathcal{H} \;\Leftrightarrow\; \frac{\overline{O_1P'}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{O_1Q}}{\overline{O_1Q'}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\overline{VM'}}{\overline{VM}} = \frac{\overline{UM}}{\overline{UM'}}.$$

Considérons un repère $(I, \overrightarrow{u})$ d'origine I de la droite (UV). Si l'on désigne par des minuscules les abscisses des points de (UV) dans ce repère, on obtient

$$M' \in \mathcal{H} \;\Leftrightarrow\; \frac{m'+u}{m+u} = \frac{m-u}{m'-u} \;\Leftrightarrow\; m'^2 = m^2 \;\Leftrightarrow\; m' = \pm m$$

puisque $v = -u$ (par hypothèse, I est milieu de $[UV]$). Puisque M' est distinct de M, on peut finalement affirmer que $M' \in \mathcal{H}$ si et seulement si $m' = -m$, autrement dit lorsque I est milieu de $[MM']$.

Remarque : Cette propriété bien connue des hyperboles peut être démontrée analytiquement, et le candidat ne se privera pas de proposer une

solution différente qui n'utilise pas la question 2.2, mais qu'il a déjà travaillée pendant sa préparation.
Je pense à la preuve du Théorème 324 de [21] que j'aurais vite retrouvée et recopiée si je n'avais pas trouvé (en un temps raisonnable) une façon d'utiliser le Théorème de Thalès. L'énoncé précise d'ailleurs que l'utilisation du Théorème de Thalès est une possibilité offerte au candidat.

2.4. Si N tend vers M en restant sur $\mathcal{H}$, la sécante (MN) tend vers la tangente à $\mathcal{H}$ en M, et la propriété montrée en 2.3 devient :
La tangente à $\mathcal{H}$ en M est l'unique droite passant par M et coupant les asymptotes en U et V tels que M soit le milieu de $[UV]$.

Remarque : Cette propriété permet la construction effective des tangentes à une hyperbole ([21] § 20.3.4).

2.5. On se réfère à la FIG. 15.1.

• La distance de N à la directrice D est NK, et elle n'est atteinte qu'au point K de D. Comme $H \neq K$, on a $NK < NH$, donc $NK < NH = NF$.

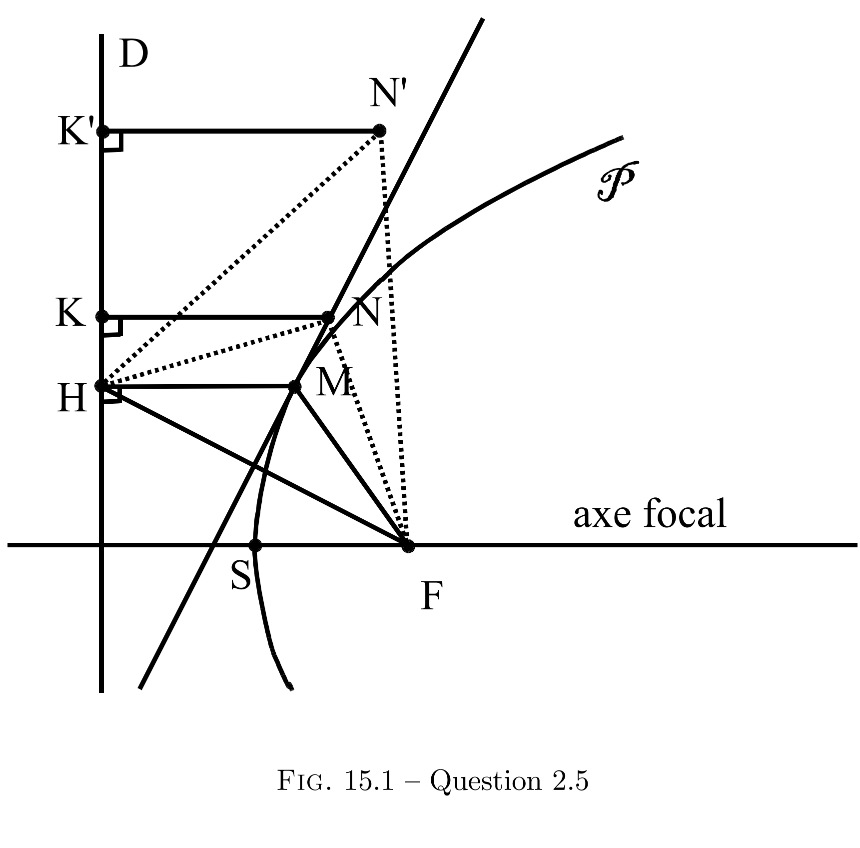


FIG. 15.1 – Question 2.5

• Si $N'F > N'H$, autrement dit si N' appartient au demi-plan de frontière T contenant H, on a encore $N'K' \leq N'H < N'F$ donc $N'K' < N'F$.

En conclusion :

- T coupe la parabole $\mathcal{P}$ en un unique point M (le seul à vérifier $MF = MH$),
- le demi-plan fermé Π_M de frontière T contenant H et privé du point M est entièrement inclus dans l'extérieur $\text{Ext}(\mathcal{P})$ de la parabole $\mathcal{P}$. On rappelle que

$$\text{Ext}(\mathcal{P}) = \{N \in \Pi \, // NF > NK \text{ où } K = \text{proj. orthogonale de } N \text{ sur } D\}.$$

2.6. On sait qu'une droite non parallèle à l'axe focal d'une parabole est tangente à celle-ci si et seulement elle la coupe en un seul point ([21], Théorème 351). La question précédente montre que la médiatrice T de $[FH]$ coupe $\mathcal{P}$ en un unique point M. Et cette médiatrice n'est pas parallèle à l'axe (SF) (autrement H et F seraient sur la même perpendiculaire à l'axe focal passant par F, et F appartiendrait à la directrice D, ce qui est absurde).
Donc T est la tangente à issue de M.

Remarques : 1) On vient de redémontrer la propriété fondamentale des paraboles (s'il n'en reste qu'une, c'est celle-ci qu'il faut connaître !). On pourra se reporter à la Section 20.1.3 de [21] qui démontre d'une autre manière cette propriété essentielle.

2) La question 2.5 nous donne beaucoup plus ! Elle nous indique que le demi-plan fermé Π_M privé de M est inclus dans $\text{Ext}(\mathcal{P})$, ce qui constitue encore une propriété extraordinaire de $\mathcal{P}$:

$$\Pi_M \backslash \{M\} \subset \text{Ext}(\mathcal{P}).$$

Ce résultat peut être redémontré analytiquement en utilisant la convexité de la fonction $y = x^2$.

2.7. Les projetés du foyer F sur les tangentes ne sont autre que les milieux I des segments $[FH]$ où H décrit la directrice D de la parabole. Le lieu cherché est donc l'image de la droite D par l'homothétie $h_{F,1/2}$ de centre F et de rapport $1/2$. C'est la tangente au sommet de la parabole.

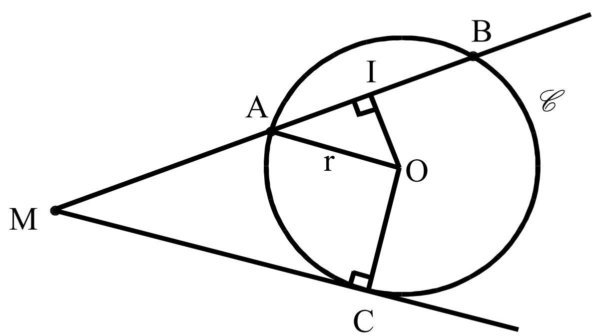
Remarque : On vient d'obtenir la **podaire de la parabole $\mathcal{P}$ relative à son foyer**. Il s'agit d'un résultat classique concernant les coniques qu'il s'agit de travailler pendant sa préparation au concours.
Cela ressort de temps en temps, et il n'est pas interdit que l'on reparle un jour des podaires d'une hyperbole ou d'une ellipse relatives à l'un des foyers. La Section 21.3 de [21] traite de ces podaires.
En fait, je conseillerais de travailler tout le Chapitre 21 de [21] pour le concours

(aussi bien l'écrit que l'oral !), hormis peut-être la Section 21.4 d'approfondissement sur les Théorèmes de Poncelet qui peut être laissée de côté en première lecture, et peut servir à « perfectionner sa préparation » lorsque les objectifs principaux généraux ont déjà été atteints (« il n'y a pas que la géométrie dans la vie », et il existe d'autres priorités dans la préparation au concours, n'est-ce pas ?).

2.8.a. Notons $\mathcal{C}$ le cercle dont parle l'énoncé, O son centre et r son rayon. Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{C}$ et alignés avec M, notons I le milieu de $[AB]$. Le Théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\begin{aligned}\overline{MA}.\overline{MB} &= \left(\overline{MI}+\overline{IA}\right)\left(\overline{MI}+\overline{IB}\right)\\ &= MI^2 - IA^2\\ &= \left(MO^2 - OI^2\right) - \left(AO^2 - OI^2\right)\\ &= MO^2 - r^2.\end{aligned}$$

Si $A = B$ appartient à $\mathcal{C}$ et si M appartient à la tangente à $\mathcal{C}$ en A, le Théorème de Pythagore donne encore $\overline{MA}.\overline{MA} = MA^2 = MO^2 - r^2$.



On a montré que le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est indépendant du choix de la sécante passant par M et coupant $\mathcal{C}$ en A et B (A étant éventuellement confondu avec B si cette sécante est une tangente à $\mathcal{C}$), et constamment égal à $MO^2 - r^2$. Ce produit est appelé puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$ et noté $p_{\mathcal{C}}(M)$.

2.8.b. Ici $\mathcal{C}$ admet l'équation

$$C(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

soit

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Il s'agit donc du cercle de centre $O(a,b)$ et de rayon $r = \sqrt{a^2+b^2-c}$ (où $a^2 + b^2 - c \geq 0$). Si M est un point de coordonnées (x_0, y_0), la question précédente permet d'écrire :

$$p_\Gamma(M) = MO^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - \left(a^2 + b^2 - c\right) = C(x_0, y_0).$$

2.8.c. On a $p_\Gamma(M) = 0$ si et seulement si $C(x_0, y_0) = 0$, et cela revient à dire que M appartient à $\mathcal{C}$.

2.8.d. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres O_1 et O_2 distincts, et de rayons r_1 et r_2. Soit Δ le lieu des points d'égale puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Si J désigne le milieu de $[O_1O_2]$,

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow p_{\mathcal{C}_1}(M) = p_{\mathcal{C}_2}(M) \\ &\Leftrightarrow MO_1^2 - r_1^2 = MO_2^2 - r_2^2 \\ &\Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{O_2O_1} = r_1^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

Il existe un unique point M_0 de la droite (O_1O_2) appartenant à Δ : c'est le point déterminé par la mesure algébrique $\overline{M_0J}$ satisfaisant $2\overline{M_0J}.\overline{O_2O_1} = r_1^2 - r_2^2$, c'est-à-dire

$$\overline{M_0J} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2 \times \overline{O_2O_1}}.$$

On peut ensuite écrire

$$M \in \Delta \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{O_2O_1} = 2\overrightarrow{M_0J}.\overrightarrow{O_2O_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{O_2O_1} = 0,$$

et cela prouve que Δ est la perpendiculaire à (O_1O_2) issue de M_0.

Remarques : α) Voici une solution analytique à cette question. En notant $\mathcal{C}_i(x, y) = x^2 + y^2 - 2a_ix - 2b_iy + c_i = 0$ l'équation du cercle $\mathcal{C}_i$, on obtient

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow \mathcal{C}_1(x, y) = \mathcal{C}_2(x, y) \\ &\Leftrightarrow 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - c_1 + c_2 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Comme $O_1(a_1, b_1)$ et $O_2(a_2, b_2)$ sont distincts, le couple $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$ est différent de $(0, 0)$ et l'équation $(*)$ est celle d'une droite orthogonale à (O_1O_2).

β) La construction de l'axe radical Δ de deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est facile :

$\triangleright$ Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points distincts A et B, alors $\Delta = (AB)$.

$\triangleright$ Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en C, Δ est la perpendiculaire à (O_1O_2) passant par C.

$\triangleright$ Enfin, si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \varnothing$, il suffit de construire un cercle auxiliaire $\mathcal{C}$ qui coupe $\mathcal{C}_1$ en A et B, et $\mathcal{C}_2$ en C et D, de sorte que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en X, pour que l'axe Δ cherché soit la perpendiculaire à (O_1O_2) issue de X. L'utilisation d'un second cercle auxiliaire $\mathcal{C}'$ qui coupe $\mathcal{C}_1$ en A' et B', et $\mathcal{C}_2$ en C' et D', de sorte que $(A'B')$ et $(C'D')$ se coupent en Y, permet d'éviter de tracer une perpendiculaire puisqu'alors $\Delta = (XY)$ (cf. FIG. 15.2).

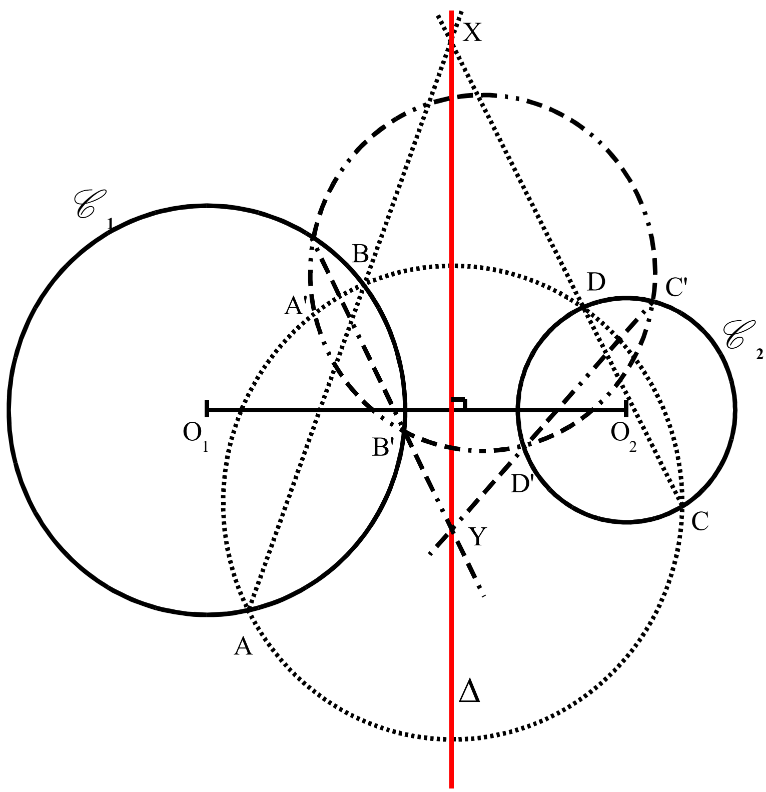


FIG. 15.2 – Construction de l'axe radical de 2 cercles

2.9.a. Si $M \in \mathcal{P}$, notons $\mathcal{C}_M$ le cercle passant par F et centré en M. On nous demande de chercher l'axe radical Δ de $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{C}_{M'}$. Le foyer F appartient à Δ puisque appartient à l'intersection $\mathcal{C}_M \cap \mathcal{C}_{M'}$ des deux cercles. D'après 2.8.d, Δ est la droite perpendiculaire à (MM') et passant par F.

2.9.b. Comme $MH = MF$ et $(MH) \perp (D)$, le cercle $\mathcal{C}_M$ passe par H et admet D pour tangente en ce point (c'est le fameux résultat : *la parabole de foyer F et de directrice D est le lieu des centres des cercles passant par F et tangents à D*). Le milieu W de $[HH']$ appartient à D, et D est tangente à $\mathcal{C}_M$

en H, et à $\mathcal{C}_{M'}$ en H', donc

$$p_{\mathcal{C}_M}(W) = WH^2 = WH'^2 = p_{\mathcal{C}_{M'}}(W).$$

par suite $W \in \Delta$, et Δ coupe la directrice D en W milieu de $[HH']$. On a $J = W$ et J est le milieu de $[HH']$.

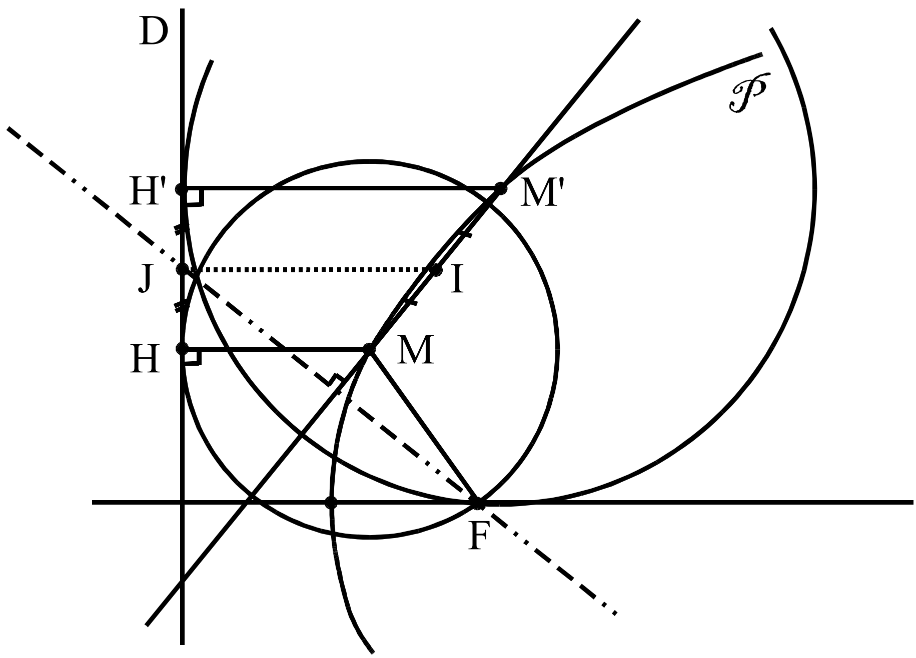


FIG. 15.3 – Question 2.9

2.10.a. Si le couple (M, M') varie de façon à ce que la droite (MM') conserve une direction fixe δ, la question précédente montre que la droite passant par F et perpendiculaire à δ coupe D en un point J milieu de $[HH']$. Ce point J est indépendant du choix de la sécante (MM') parallèle à δ (il ne dépend que de δ et de F), et la réciproque du Théorème de Thalès montre que la droite (IJ) passant par les milieux des segments $[HH']$ et $[MM']$, est parallèle à (MH), c'est-à-dire perpendiculaire à D. Finalement, I appartiendra à la perpendiculaire à D issue de J.

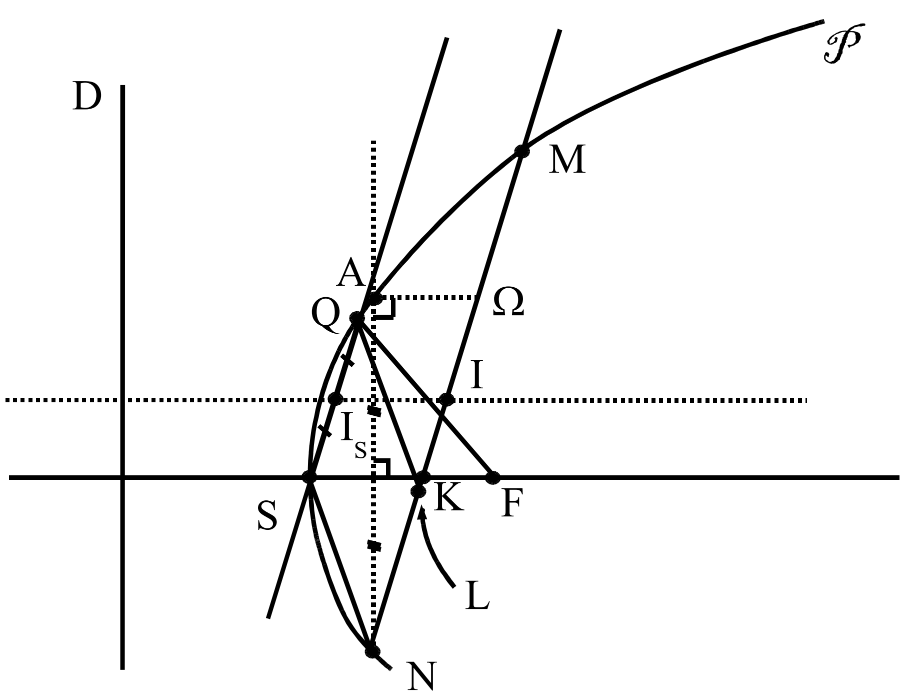
2.10.b. Si (MM') devient tangente à $\mathcal{P}$, les points M, I, M' deviennent confondus ainsi que les points H, J et H'. On obtient une tangente T à $\mathcal{P}$ issue d'un point I_0 qui se projette orthogonalement sur J, et la question précédente montre que (JF) est perpendiculaire à T.

On retrouve une partie de la propriété des tangentes à la parabole énoncée en 2.6 et exploitée en 2.7 : en fait, T n'est pas seulement perpendiculaire à (FH), c'est la médiatrice de $[FH]$ (question 2.6).

2.10.c. Soit L une droite perpendiculaire à D. Une telle droite coupe la parabole en un unique point I_0. Notons J le projeté orthogonal de I_0 sur D, et T la tangente à $\mathcal{P}$ issue de I_0.

Toute parallèle à T, distincte de T, qui coupe $\mathcal{P}$ en au moins un point M, recoupe $\mathcal{P}$ en M' distinct de M et tel que le milieu I de $[MM']$ appartiennent à L. Le point M' apparaît donc comme l'image de M par la symétrie gauche par rapport à L parallèlement à T. La parabole $\mathcal{P}$ admet donc L comme axe de symétrie gauche de direction T.
La construction géométrique de la direction T de cette symétrie gauche ne pose aucun problème : T est la médiatrice de $[FJ]$.

2.11. • Notons I le milieu de $[NM]$ et I_S celui de $[SQ]$. D'après 2.9 et 2.10, la droite (II_S) est parallèle à l'axe (SF) de la parabole, et constitue un axe de symétrie de $\mathcal{P}$ parallèlement à (SQ).



Si K désigne l'intersection de (MN) et (SF), le Théorème de Thalès montre que K est aussi le milieu de $[N\Omega]$. L'homothétie h de centre N et de rapport 2 vérifie $h(K) = \Omega$ et $h(I) = M$, donc $\overrightarrow{\Omega M} = 2\overrightarrow{KI}$ ($\natural$). Puisque $(II_S) // (SF)$ et $(SI_S) // (KI)$, le quadrilatère $SKII_S$ est un parallèlogramme et

$$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{SI_S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NL}. \quad (\flat)$$

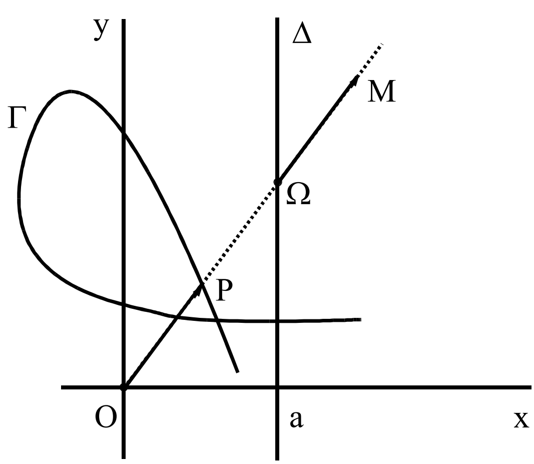
Les égalités ($\natural$) et ($\flat$) entraînent bien $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{NL}$.

• Le cas où $M = N$ ne pose pas de problème supplémentaire. Les égalités utilisées ci-dessus pour prouver l'égalité $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{NL}$ restent vraies si $M = N$ et si la droite (MN) coïncide avec la tangente à $\mathcal{P}$ dans la direction (SQ). On obtient donc encore $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{NL}$.

Troisième partie

3.1. Le point $P(\alpha(t), \beta(t))$ décrit Γ, et Ω admet des coordonnées (a, y) telles que $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{O\Omega}) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \alpha(t) & a \\ \beta(t) & y \end{vmatrix} = 0, \quad \text{d'où } \Omega \begin{pmatrix} a \\ \dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)} a \end{pmatrix}.$$



Lorsque P décrit Γ, le point $M(x', y')$ déterminé par $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OP}$ décrit C, donc

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \Omega + \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ \dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)} a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \alpha(t) \\ \dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)} (a + \alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de C est donc :

$$\begin{cases} x' = a + \alpha(t) \\ y' = \dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}(a + \alpha(t)). \end{cases}$$

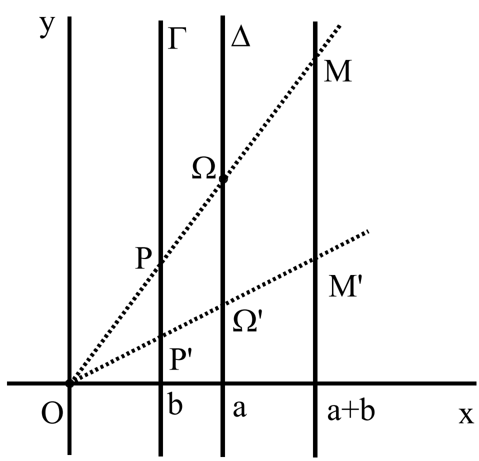
3.2. • **Premier cas** : La droite Γ admet l'équation $x = b$ avec $b \neq 0$. Des équations paramétriques de Γ sont

$$\Gamma : \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}$$

et la transformée de Descartes C de Γ est

$$C : \begin{cases} x = a + b \\ y = \dfrac{t}{b}(a + b). \end{cases}$$

On reconnaît la droite d'équation $x = a + b$.



Remarque : Voici une autre façon d'obtenir la transformée de Descartes de la droite $\Gamma : x = b$. On trace un point M quelconque de C. Puis on considère un autre point quelconque M' de C. Les notations étant celles de la figure précédente, on trouve

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega' M'} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{\Omega\Omega'},$$

et M' appartient à la parallèle à Δ passant par M. On a prouvé que C était incluse dans cette parallèle. La réciproque se montre en utilisant Thalès :

si M' appartient à la parallèle à Δ passant par M, on note P, P', Ω et Ω' les intersections des droites (OM) et (OM') avec les droites $x = a$ et $x = b$ comme indiqué sur la figure. Par projection sur $0x$, les rapports $\overline{OP}/\overline{\Omega M}$ et $\overline{OP'}/\overline{\Omega' M'}$ valent $((a+b)-b)\,/\,(b-0)$, c'est-à-dire 1. En en déduit $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{\Omega' M'} = \overrightarrow{OP'}$, donc $M' \in C$.

• **Second cas** : La droite Γ admet l'équation $y = mx + p$ (avec $x \neq 0$). Des équations paramétriques de Γ sont

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = mt + p \end{cases}$$

et la transformée de Descartes de Γ est

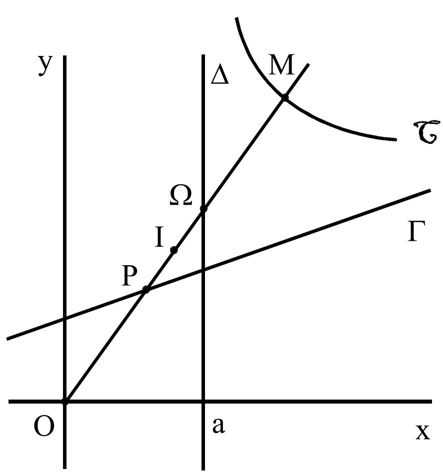
$$C : \begin{cases} x = a + t \\ y = \dfrac{mt+p}{t}\,(a+t)\,. \end{cases}$$

Une équation cartésienne de C est

$$y = \frac{mx^2 + (p - ma)\,x}{x - a}.$$

On reconnaît une hyperbole passant par O et admettant Δ (d'équation $x = a$) pour asymptote ([21], Théorème 323).

Lien avec la Partie II : Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole passant par O et d'asymptotes Γ et Δ. Un point M appartient à C si et seulement si les segments $[P\Omega]$ et $[OM]$ ont même milieu, mais cela caractérise aussi bien l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'après la question 2.3. On retrouve donc $C = \mathcal{H}$.



3.3. La parabole $\Gamma : y = cx^2$ admet les équations paramétriques

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = ct^2 \end{cases}$$

donc

$$C : \begin{cases} x = a + t \\ y = ct\,(a + t)\,. \end{cases}$$

Les point de C sont donc ceux qui vérifient $y = c\,(x - a)\,x = cx^2 - acx$. On obtient une parabole d'axe de symétrie $x = a/2$ privée de son point d'abscisse a (et non pas de son sommet comme indiqué dans l'énoncé).

Remarque : Le sommet de Γ est $O\,(0, 0)$, celui de C est $S\left(a/2, -a^2c/4\right)$.

3.4. • La question 2.11 avec $\mathcal{P} = C$ permet de retrouver le résultat précédent. Considérons à nouveau la parabole $\mathcal{P} = C$ de foyer F et de directrice D, et notons Γ l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{SO}$, soit :

$$\Gamma = t_{\overrightarrow{SO}}\,(C)\,.$$

Notons O le sommet de Γ, et S celui de C. Notons Δ la droite parallèle à l'axe focal (SF) et passant par le symétrique de O par rapport à (SF) (FIG. 15.4). On peut démontrer que C est la transformée de Descartes de Γ relative à O et à Δ en utilisant 2.11.

• Montrons seulement que la transformée de Descartes de Γ est incluse dans la parabole C. Si P est un point de Γ distinct de O, la droite (OP) coupe Δ en Ω, et recoupe C en M, et il s'agit de vérifier que

$$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OP}.$$

Dans le FIG. 15.4, on pose $P' = t_{\overrightarrow{OS}}\,(P)$ et l'on note L et N les points où la droite (PP') recoupe les paraboles Γ et C. On a $N = t_{\overrightarrow{OS}}\,(L)$ donc $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{SO}$. Le Lemme ♠ montre que M et N sont symétriques par rapport à (SF). Cela nous permet d'appliquer 2.11, et obtenir $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{SO} = \overrightarrow{mP'}$ où m désigne le projeté de M sur $(P'N)$ parallèlement à (SF).

Comme sur la FIG. 15.4, notons si besoin est par des petites lettres les projetés sur (PN) parallèlement à (SF), et identifions ces « petites lettres » avec les abscisses de ces points sur l'axe (PN) pour une origine donnée. Avec cette convention :

$$\begin{cases} L - N = P' - m \\ 2f = o + \omega \\ P - P' = L - N \\ f - o = N - l. \end{cases}$$

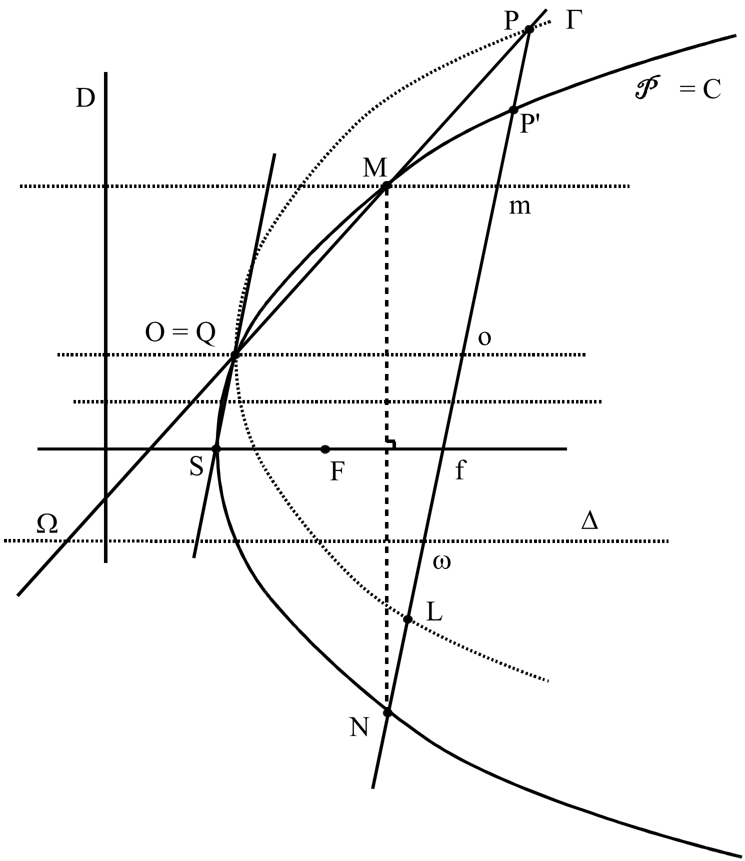


FIG. 15.4 – Question 3.4

Pour simplifier encore, choisissons l'origine de (PN) en f. Alors

$$\left\{\begin{array}{l} L-N=P'-m \\ \omega=-o \\ P-P'=L-N \\ o=L-N \end{array}\right. \quad \text{ou encore :} \quad (S)\left\{\begin{array}{l} o=P'-m \\ \omega=-o \\ P=P'+o \\ o=L-N. \end{array}\right.$$

Montrer que $\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{OP}$ revient à montrer que $P-o=m-\omega$ (on utilise le Théorème de Thalès), et cette égalité est une conséquence immédiate des relations (S) :

$$P-o=P'=m+o=m-\omega.$$

Lemme ♠ : Les points M et N sont symétriques par rapport à (SF).

Preuve du Lemme : On raisonne analytiquement. Les paraboles Γ et C admettent les équations $\Gamma : y = cx^2$ et $C : y = cx^2 - acx$, et les points

$$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S\begin{pmatrix} a/2 \\ -a^2c/4 \end{pmatrix}$$

comme sommets. Un point P de Γ (distinct de l'origine) admet des coordonnées de la forme

$$P\begin{pmatrix} u \\ cu^2 \end{pmatrix}$$

avec $u \neq 0$. La droite (OP) recoupe C en un point $M(x, y)$ pour lequel il existe un réel λ tel que

$$\begin{cases} y = cx^2 - acx \\ x = \lambda u \\ y = \lambda cu^2. \end{cases}$$

On obtient $\lambda cu^2 = c(\lambda u)^2 - ac\lambda u$, d'où $\lambda = 1 + a/u$. Ainsi

$$M\begin{pmatrix} u + a \\ (u + a)\, cu \end{pmatrix}.$$

Le symétrique orthogonal $s(M)$ de M par rapport à la droite (SF) d'équation $x = a/2$ est le point de coordonnées (x, y) tel que

$$\begin{cases} a = x + (u + a) \\ y = (u + a)\, cu \end{cases}$$

d'où $x = -u$ et

$$s(M)\begin{pmatrix} -u \\ (u + a)\, cu \end{pmatrix}.$$

Montrer que $s(M) = N$ revient à vérifier que $(Ps(M))$ est parallèle à (OS), ce qui nous amène à calculer le déterminant

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{Ps(M)}) &= \begin{vmatrix} \dfrac{a}{2} & -u - u \\ -\dfrac{a^2c}{4} & (u + a)\, cu - cu^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{a}{2} & -2u \\ -\dfrac{a^2c}{4} & acu \end{vmatrix} = \frac{a^2cu}{2} - \frac{a^2cu}{2} = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque : Vérifions analytiquement que $t_{\overrightarrow{OS}}(\Gamma) = C$. Avec les notations du Lemme ♠,

$$t_{\overrightarrow{OS}} : \begin{cases} x' = x + \dfrac{a}{2} \\ y' = y - \dfrac{a^2 c}{4} \end{cases}$$

donc $t_{\overrightarrow{OS}}(\Gamma)$ admet l'équation $y' + \dfrac{a^2c}{4} = c\left(x' - \dfrac{a}{2}\right)^2$, soit $y' = cx'^2 - acx'$, et l'on reconnaît une équation de C.

3.5. On cherche la transformée de Descartes de $\Gamma : y = c(x-b)^2 + d$ d'équation paramétriques $x = t$ et $y = c(t-b)^2 + d$. On obtient la courbe paramétrée

$$C : \begin{cases} x' = a + t \\ y' = \dfrac{c(t-b)^2 + d}{t}(a+t) \end{cases}$$

dont une équation cartésienne est

$$y' = \frac{c(x'-a-b)^2 + d}{x'-a} x'$$

soit $C : \ y'(x'-a) = x'\left(c(x'-a-b)^2 + d\right)$.

3.6. • Faisons le changement de variable $X = x - a$. La fonction

$$y = \frac{x\left(c(x-a-b)^2 + d\right)}{x-a}$$

qui définit C devient

$$y = \frac{(X+a)\left(c(X-b)^2 + d\right)}{X}.$$

Une parabole d'équation $y = uX^2 + vX + w$ est asymptote à C quand $|X|$ tend vers $\pm\infty$ si et seulement si $\lim_{|X|\to\pm\infty} \xi = 0$ où l'on pose

$$\xi = \frac{(X+a)\left(c(X-b)^2 + d\right)}{X} - \left(uX^2 + vX + w\right).$$

On calcule

$$\begin{aligned} \xi &= (X+a)\left(cX - 2bc + \frac{b^2c + d}{X}\right) - \left(uX^2 + vX + w\right) \\ &= (c-u)X^2 + (ac - 2bc - v)X + b^2c + d - 2abc - w + \frac{a\left(b^2c+d\right)}{X}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{|X|\to\pm\infty} \frac{a\left(b^2c+d\right)}{X} = 0$, il suffit de choisir

$$\begin{cases} u = c \\ v = ac - 2bc \\ w = b^2c + d - 2abc \end{cases}$$

pour obtenir $\lim_{|X|\to\pm\infty} \xi = 0$. La parabole-asymptote de C existe et admet l'équation

$$\begin{aligned} y &= cX^2 + (ac - 2bc)\, X + b^2c + d - 2abc \\ &= c\,(x-a)^2 + (ac - 2bc)\,(x-a) + b^2c + d - 2abc \end{aligned}$$

soit $y = cx^2 - (ac + 2bc)\, x + b^2c + d$.

• La position de la courbe par rapport à la parabole-asymptote dépend du signe de

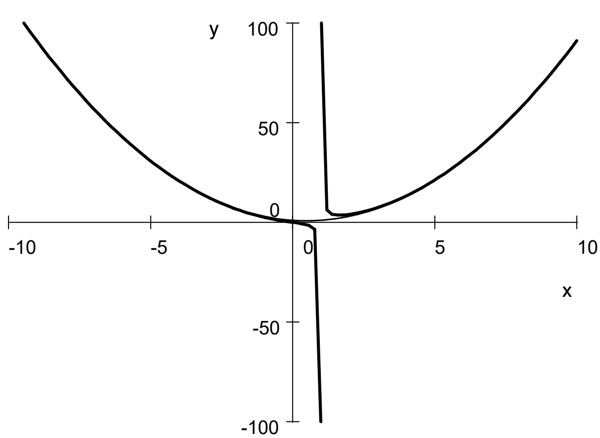
$$\xi = \frac{a\left(b^2c + d\right)}{X}.$$

Pour $X \to +\infty$ (resp. $X \to -\infty$), la courbe C sera au dessus de la parabole-asymptote si et seulement si $a\left(b^2c + d\right) \geq 0$ (resp. ≤ 0).

3.7. • Cas où $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 1)$. La courbe C admet l'équation

$$y = \frac{x\left((x-1)^2 + 1\right)}{x - 1}$$

et la parabole d'équation $y = x^2 - x + 1$ pour parabole-asymptote lorsque $|X|$ tend vers $\pm\infty$. Cette parabole est précieuse puisqu'elle nous permet de connaître le comportement de la courbe lorsque $|X|$ tend vers $\pm\infty$. La droite $x = 1$ est asymptote verticale. Une calculatrice graphique nous donne l'allure globale suivante :

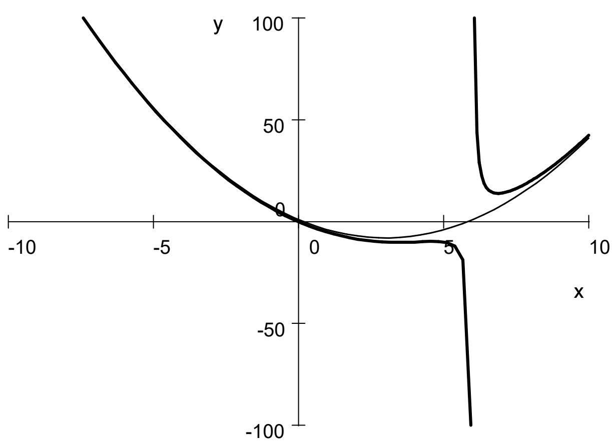


La dérivée
$$y' = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2}$$
ne s'annule qu'en un seul point $x_0 \simeq 1,66$ situé sur la deuxième branche de C. La fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$, et admet un minimum relatif en x_0. Un calcul donne
$$y'' = \frac{2\left(x^2 - 3x + 3\right)x}{(x-1)^3}$$
de sorte que le point d'abscisse 0 soit l'unique point d'inflexion de C.

- **Cas où** $(a, b, c, d) = (6, 0, 1, 1)$. La courbe C admet l'équation

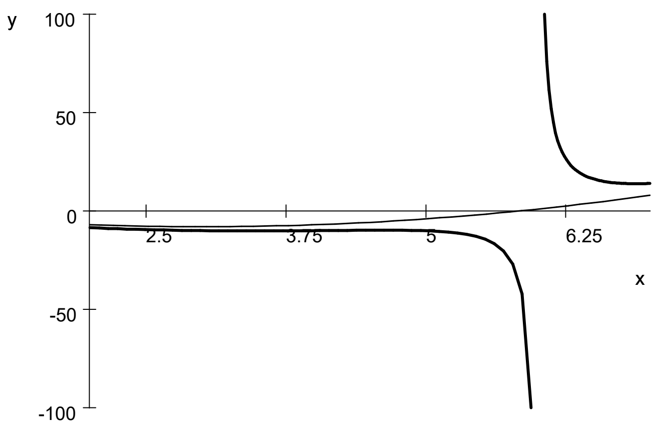
$$y = \frac{x\left((x-6)^2 + 1\right)}{x - 6}.$$

La parabole-asymptote admet l'équation $y = x^2 - 6x + 1$, et la courbe ressemble à s'y méprendre à la précédente : deux branches qui ressemblent de plus en plus à des branches de paraboles, et une unique asymptote verticale d'équation $x = 6$. C'est ce que donne notre calculatrice graphique :



Mais cette fois-ci la dérivée
$$y' = 2\frac{x^3 - 15x^2 + 72x - 111}{(x-6)^2}$$
possède un numérateur polynomial de degré 3 qui admet 3 racines réelles x_i $(1 \leq i \leq 3)$. Une calculatrice donne les valeurs approchées suivantes :
$$x_1 = 3,4679 \quad ; \quad x_2 = 4,6527 \quad ; \quad x_3 = 6,8794.$$

La courbe admet donc trois extrémums relatifs : deux à gauche de l'asymptote $x = 6$ (un minimum suivi d'un maximum), et un seul minimum relatif à droite de cette asymptote. Si cela se voit par le calcul, le phénomène est imperceptible sur la sortie écran d'une calculatrice. Un grossissement au voisinage de $x = 4$ donne ce graphique :



Utilisons encore la calculatrice pour obtenir la dérivée seconde

$$y'' = 2\frac{x^3 - 18x^2 + 108x - 210}{(x-6)^3}$$

et les zéros de y''. On constate que y'' admet, comme dans le premier cas, une unique racine réelle $r \simeq 4,182\,9$, et donc un unique point d'inflexion toujours situé sur la branche de gauche.

Remarque : Les courbes C d'équation générale donnée en 3.5 sont appelées « paraboles de Descartes » ou « tridents de Newton », et sont de l'une ou l'autre forme obtenue dans cette question.

3.8. Ici Γ admet les équations paramétriques $x = k\cos t$ et $y = k\sin t$ (avec $k > 0$ et $t \neq \pi/2 \ (\pi)$), donc C est décrit par

$$C : \begin{cases} x' = a + k\cos t \\ y' = \tan t \ (a + k\cos t) = a\tan t + k\sin t. \end{cases}$$

On reconnaît la Conchoïde de Nicomède de la première partie.

Quatrième partie

4.1. • En notant $\overrightarrow{u}_t = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$ le vecteur polaire faisant l'angle t avec le premier vecteur de base $\overrightarrow{i}$,

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}_t \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -a\cos t(\cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -a(\cos^2 t\,\overrightarrow{i} + \sin t \cos t\,\overrightarrow{j}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -a(\frac{1+\cos 2t}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sin 2t}{2}\overrightarrow{j}). \end{aligned}$$

La courbe Γ admet donc les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2}\cos 2t \\ y = -\dfrac{a}{2}\sin 2t. \end{cases}$$

Lorsque t varie dans $]-\pi/2, \pi/2[$, $2t$ décrit l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et ces équations paramétriques sont celles du cercle de centre $(-a/2, 0)$ et de rayon $|a/2|$ privé de l'origine O (obtenue justement pour la valeur interdite $t = \pi \ \ (2\pi)$). Notons que ce cercle passe bien par l'origine O puisque la distance de O à $(-a/2, 0)$ est $|a/2|$.

• On applique 3.1 avec l'une des équations paramétriques de Γ que l'on vient de trouver. La transformée de Descartes C de Γ admet les équations paramétriques

$$C : \begin{cases} x' = a - a\cos^2 t = a\sin^2 t \\ y' = \dfrac{-a\sin t \cos t}{-a\cos^2 t}\left(a - a\cos^2 t\right) = a\tan t \sin^2 t. \end{cases}$$

• Etude de l'arc paramétré

$$C : \begin{cases} x(t) = a\sin^2 t \\ y(t) = a\tan t \sin^2 t. \end{cases}$$

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash(\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$, périodiques de période 2π, et telles que

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t+\pi) = x(t) \\ y(t+\pi) = y(t). \end{cases}$$

On peut donc se contenter d'étudier $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, \pi/2[$, puis compléter la courbe obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On a

$$\begin{cases} x'(t) = 2a \sin t \cos t \\ y'(t) = a \tan t (\tan t + 2 \sin t \cos t). \end{cases}$$

Sur $[0, \pi/2[$,

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ \tan t + 2 \sin t \cos t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ 1 + 2\cos^2 t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0,$$

donc $y'(t)$ reste positif. $x'(t)$ est toujours positif sur $[0, \pi/2[$, d'où le tableau de variation :

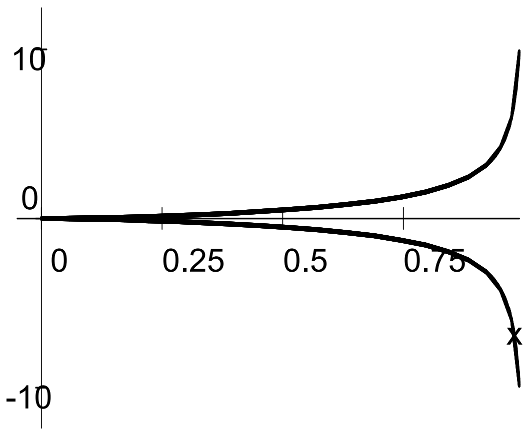
t	0		$\pi/2$
x'	0	$+$	$\|\|$
y'	0	$+$	$\|\|$
x	0	$\nearrow$	$a\|\|$
y	0	$\nearrow$	$+\infty\|\|$

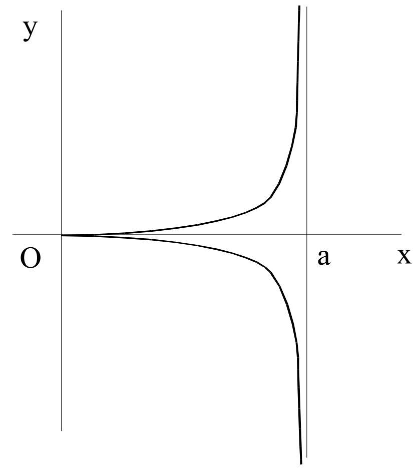
Il existe une asymptote verticale d« équation $x = a$, et la courbe est située entre l'origine O et cette asymptote. L'origine O est l'unique point singulier de C. Pour obtenir l'allure de la courbe en ce point, on doit calculer les dérivées successives de $x(t)$ et $y(t)$ *[On aura cependant bien mieux à faire si l'on travaille en temps limité, le but étant alors de parcourir avec succès le plus grand nombre de questions du problème en sautant toutes les questions ou développements qui prennent trop de temps et hypotèquent la suite du travail. Mais là, nous avons le temps de nous entraîner !].*
Puisque

$$\begin{cases} x''(t) = 2a \cos^2 t - 2a \sin^2 t \\ y''(t) = \dfrac{2a \sin t \left(1 + 2\cos^4 t\right)}{\cos^3 t}, \end{cases}$$

la courbe C admet une droite de vecteur directeur $(x''(0), y''(0)) = (2a, 0)$ pour tangente en O. La tangente à C en O est donc horizontale. Compte tenu de la symétrie par rapport à Ox et des variations de $x(t)$ et $y(t)$, le point O ne peut être qu'un point de rebroussement de première espèce.

Une machine, puis un tracé « à la main » nous donne les allures suivantes de cette « cissoïde de Dioclès » :





4.2. Si $m = \tan t$,

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{1+m^2} = \frac{m^2}{1+m^2},$$

donc

$$M(x,y) \in C \Leftrightarrow \exists t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = a\tan t \sin^2 t. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = a\dfrac{m^2}{1+m^2} \\ y = a\dfrac{m^3}{1+m^2}. \end{cases}$$

Autre méthode et lien avec Γ : Le point P décrit le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 + ax = 0$ privé de l'origine. Posons $m = \tan t$ où t désigne l'angle polaire $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP})$. On a $m = y/x = \tan t$, d'où $1 + m^2 + a/x = 0$, puis

$$x = -\frac{a}{1+m^2} \quad \text{et} \quad y = mx = -\frac{am}{1+m^2}.$$

On obtient ainsi de nouvelles équations paramétriques de Γ. La transformée de Descartes C de Γ admet alors les équations

$$\begin{cases} x = a - \dfrac{a}{1+m^2} = a\dfrac{m^2}{1+m^2} \\ y = m \times \left(a - \dfrac{a}{1+m^2}\right) = a\dfrac{m^3}{1+m^2}. \end{cases}$$

4.3. Soit $M \begin{pmatrix} a\dfrac{m^2}{1+m^2} \\ a\dfrac{m^3}{1+m^2} \end{pmatrix}$ un point de C distinct de O (donc $m \neq 0$).

Un point M_1 appartient à $\mathcal{P}\cap(OM)\setminus\{O\}$ si et seulement si ses coordonnées sont de la forme

$$M_1\begin{pmatrix} -\dfrac{y^2}{4a} \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1}\right)=\begin{vmatrix} a\dfrac{m^2}{1+m^2} & -\dfrac{y^2}{4a} \\ a\dfrac{m^3}{1+m^2} & y \end{vmatrix}=0.$$

Par suite $y=-4a/m$ et $M_1\begin{pmatrix} -\dfrac{4a}{m^2} \\ -\dfrac{4a}{m} \end{pmatrix}$. On a

$$\left(\overrightarrow{OM_1}|\overrightarrow{OM}\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{4a}{m^2} \\ -\dfrac{4a}{m} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a\dfrac{m^2}{1+m^2} \\ a\dfrac{m^3}{1+m^2} \end{pmatrix}=-\frac{4a^2}{1+m^2}-\frac{4a^2m^2}{1+m^2}=-4a^2.$$

Le point M_1 est donc l'image de M par l'inversion de pôle O et de puissance $-4a^2$.

4.4. Un vecteur directeur de la tangente T_2 à $\mathcal{P}$ issue de $M_2\,(x_2,y_2)$ est $\overrightarrow{u}_2(-\dfrac{y_2}{2a},1)$. Cette tangente admet donc l'équation

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & -\dfrac{y_2}{2a} \\ y-y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

soit

$$T_2: \qquad x-x_2+\frac{y_2}{2a}\,(y-y_2)=0.$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{l} M\in T_2 \\ (OM)\perp T_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\dfrac{m^2}{1+m^2}-x_2+\dfrac{y_2}{2a}\left(a\dfrac{m^3}{1+m^2}\right)-\dfrac{y_2^2}{2a}=0 \\ a\dfrac{m^2}{1+m^2}\left(-\dfrac{y_2}{2a}\right)+a\dfrac{m^3}{1+m^2}=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=a\dfrac{m^2}{1+m^2}+\dfrac{y_2}{2}\dfrac{m^3}{1+m^2}-\dfrac{y_2^2}{2a} \\ y_2=2am \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2=-am^2 \\ y_2=2am. \end{array}\right.$$

En conclusion

$$M_2\begin{pmatrix} -am^2 \\ 2am \end{pmatrix}.$$

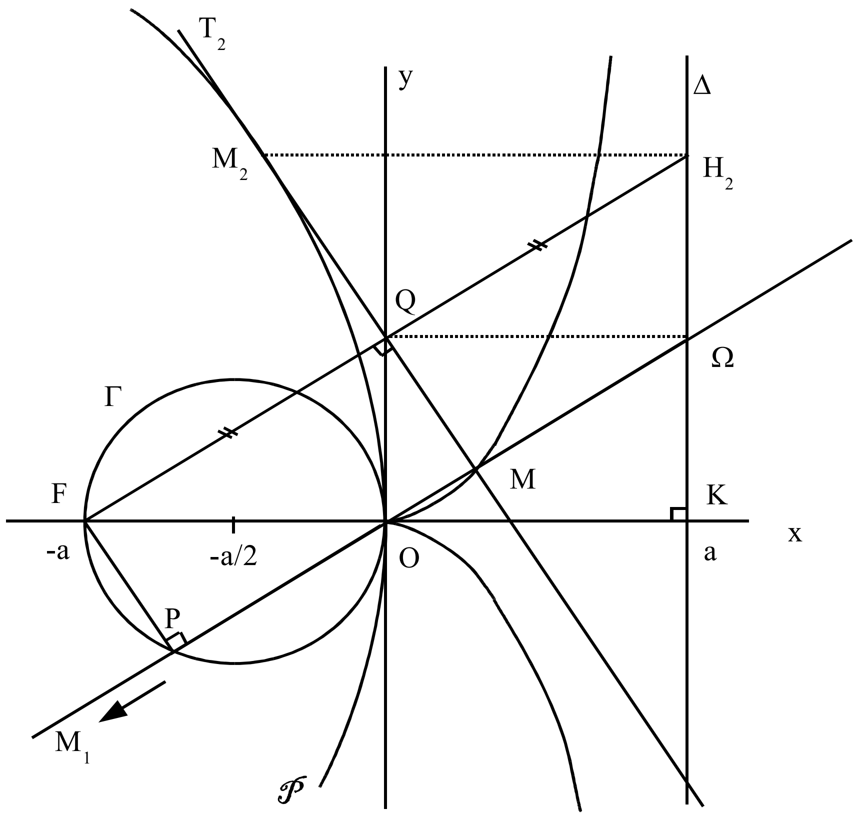


FIG. 15.5 – Question 4.5

4.5. • Le foyer F de la parabole $\mathcal{P} : y^2 = -4ax$ a pour coordonnées $(-a, 0)$. On se réfère à la FIG. 15.5, et l'on note Q' le projeté orthogonal de F sur la tangente T_2 à $\mathcal{P}$ en M_2. On sait que :

▷ Q' appartient à la tangente (Oy) à $\mathcal{P}$ en son sommet O (question 2.7).

▷ T_2 est la médiatrice de $[H_2F]$ où H_2 désigne le projeté de M_2 sur la directrice Δ. En particulier, Q' est le milieu de $[H_2F]$.

Les droites $(OM\Omega)$ et $(FQ'H_2)$ sont perpendiculaires à T_2, donc parallèles. Le sommet O de $\mathcal{P}$ est le milieu de $[FK]$. Notons K l'intersection de la directrice Δ et de l'axe focal (Ox). Le Théorème de la droite des milieux montre que la parallèle $(OM\Omega)$ à $(FQ'H_2)$ issue de O, milieu de $[FK]$, coupe le segment $[KH_2]$ en son milieu. Ainsi Ω est le milieu de $[KH_2]$.

Comme Q' est milieu de $[H_2F]$, et comme Ω est milieu de $[KH_2]$, la droite $(\Omega Q')$

est parallèle à (FK) (Théorème de la droite des milieux), donc perpendiculaire à (Oy). Finalement

$$\begin{cases} (\Omega Q') \perp (Oy) \\ Q' \in (Oy) \end{cases}$$

et Q' coïncide avec le projeté orthogonal Q de Ω sur (Oy).

• On a vu que les droites (FQ) et (PM) étaient perpendiculaires à T_2, donc $(FQ) \perp (QM)$ et $(PM) \perp (QM)$. Comme P appartient au cercle Γ de diamètre $[OF]$, le triangle OPF est rectangle en P et $(FP) \perp (PM)$. Finalement le quadrilatère $QFPM$ est un rectangle puisque possède trois angles droits.

Autre solution analytique : Répondons à la première partie de cette question en utilisant des coordonnées. Les coordonnées de Q' milieu de $[FH_2]$ et projeté de F sur T_2 sont faciles à obtenir :

$$M_2 \begin{pmatrix} -am^2 \\ 2am \end{pmatrix} ;\ H_2 \begin{pmatrix} a \\ 2am \end{pmatrix} ;\ F \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q' \begin{pmatrix} \dfrac{a-a}{2} \\ \dfrac{2am+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ am \end{pmatrix}.$$

On constate que Q' appartient à (Oy), comme prévu. Pour vérifier que $Q' = Q$, il faut calculer les coordonnées de Q, et donc celles de Ω. On a

$$\Omega \in (OM) \cap \Delta \quad \text{et} \quad M \begin{pmatrix} a\dfrac{m^2}{1+m^2} \\ a\dfrac{m^3}{1+m^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \Omega \begin{pmatrix} \lambda a\dfrac{m^2}{1+m^2} \\ \lambda a\dfrac{m^3}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

où λ est un réel tel que

$$\lambda a\frac{m^2}{1+m^2} = a.$$

On obtient $\lambda = \left(1+m^2\right)/m^2$, puis

$$\Omega \begin{pmatrix} a \\ am \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ am \end{pmatrix} = Q'.$$

Remarque : Les questions précédentes montrent qu'une cissoïde de Dioclès est simultanément l'inverse et la podaire d'une parabole relativement à son sommet (par définition, la **podaire d'une courbe relative à un point** est l'ensemble de tous les projetés orthogonaux de ce point sur les tangentes à la courbe).

4.6. L'équation générale d'un cercle Γ passant par O est

$$\Gamma : \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0. \quad (*)$$

Le point $M(x', y')$ de la transformée de Descartes C de Γ associé au point $P(x, y)$ de Γ vérifie $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\Omega M}$ où $\Omega(a, ay/x)$. Par conséquent $M = \Omega + \overrightarrow{OP}$, soit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \dfrac{a}{x} y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x' = a + x \\ y' = \left(\dfrac{a}{x} + 1\right) y. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = \dfrac{y'(x' - a)}{x'}. \end{cases} \qquad (7)$$

En remplaçant dans $(*)$, on trouve

$$(x' - a)^2 + \frac{y'^2 (x' - a)^2}{x'^2} - 2\alpha (x' - a) - 2\beta \frac{y'(x' - a)}{x'} = 0$$

c'est-à-dire

$$(x' - a)\left[(x' - a) x'^2 + y'^2 (x' - a) - 2\alpha x'^2 - 2\beta x' y'\right] = 0.$$

Aucun point M de C n'admet a comme abscisse (autrement $x = a$ et M serait issu d'un point P de Γ d'abscisse nulle, ce qui est interdit). Donc $x' - a \neq 0$ et la partie C est incluse dans une courbe algébrique d'équation

$$(x' - a) x'^2 + y'^2 (x' - a) - 2\alpha x'^2 - 2\beta x' y' = 0,$$

c'est-à-dire

$$x' \left(x'^2 + y'^2\right) = (a + 2\alpha) x'^2 + 2\beta x' y' + a y'^2. \qquad (8)$$

Remarque : Dans la correspondance (7), on a implicitement supposé que x' n'était pas nul. Si $x' = 0$, $x = -a$ et $y' = 0$, et le point $O = (x', y') = (0, 0)$ appartient toujours à l'ensemble d'équation (8).

Cinquième partie

5.1. En utilisant la question 4.6 et le système (7), on constate que la courbe Γ : $f(x, y) = 0$ admet une transformée de Descartes C dont une équation cartésienne est

$$f\left(x' - a, \frac{y'(x' - a)}{x'}\right) = 0$$

lorsque $x' \neq 0$. Puisque $\deg_y f = q$, il suffit de multiplier la fonction rationnelle du premier membre par x'^q pour obtenir une fonction polynomiale

$$g\left(x',y'\right)=x'^{q}f\left(x'-a,\frac{y'\left(x'-a\right)}{x'}\right)$$

telle que $C\subset g^{-1}\left(0\right)$, ce que l'on écrira (de façon abusive) :

$$C:g\left(x',y'\right)=x'^{q}f\left(x'-a,\frac{y'\left(x'-a\right)}{x'}\right)=0.$$

Remarque : Comme à la question 4.6, le cas où $x'=0$ entraîne successivement $x=-a$ et $y'=0$, et montre que l'origine possède un statut « à part » sur la transformée de Descartes C.

5.2. Comme en 5.1, si $C:g\left(x',y'\right)=0$, alors $\Gamma\subset f^{-1}\left(0\right)$ où

$$f\left(x,y\right)=g\left(x+a,\frac{y\left(x+a\right)}{x}\right).$$

5.3. Si $f\left(x,y\right)=y-x^{2}$,

$$g\left(x',y'\right)=x'f\left(x'-a,\frac{y'\left(x'-a\right)}{x'}\right)=\left(x'-a\right)\left(y'-x'^{2}+ax'\right).$$

Il suffit de diviser par $x'-a$ (puisque $x'\neq a$) pour obtenir une équation plus simple $y'-x'^{2}+ax'=0$.

Remarque : On retrouve le résultat de la question 2.11. L'image de la parabole $y=x^{2}$ est une parabole translatée privée d'un point (puisque $x'\neq a$).

5.4. D'après 3.8, la conchoïde de Nicomède Φ n'est autre que la transformée de Descartes du cercle Γ de centre O et de rayon k, d'équation

$$f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}-k^{2}=0.$$

D'après 5.1, $\Phi\subset g^{-1}\left(0\right)$ où

$$\begin{aligned}g\left(x',y'\right)&=x'^{2}f\left(x'-a,\frac{y'\left(x'-a\right)}{x'}\right)\\&=x'^{2}\left[\left(x'-a\right)^{2}+\frac{y'^{2}\left(x'-a\right)^{2}}{x'^{2}}-k^{2}\right]\\&=\left(x'-a\right)^{2}\left(x'^{2}+y'^{2}\right)-k^{2}x'^{2}.\end{aligned}$$

5.5. On a

$$\begin{aligned}g\left(x,y\right)=x^{r}\varphi\left(x,y\right)&=x^{r}f\left(x-\lambda,\frac{y}{x}\left(x-\lambda\right)\right)\\&=x^{r}\sum_{m=v}^{n}\sum_{k=0}^{m}f_{m,k}\left(x-\lambda\right)^{m}\frac{y^{k}}{x^{k}}.\end{aligned}$$

Le coefficient $f_{m,k}$ est nul dès que $k > q$ (puisque $\deg_y f = q$), donc $g(x,y)$ est polynomiale si l'on choisit $r = q$.

5.6. Dans cette question on choisit $f(x,y) = x^a + (x+\lambda)^b y^q$. Alors

$$\varphi(x,y) = (x-\lambda)^a + x^{b-q} y^q (x-\lambda)^q .$$

• Si $b - q \geq 0$, alors $\varphi(x,y)$ est polynomiale.

• Si $b - q < 0$, $x^r \varphi(x,y)$ est polynomiale pour tout $r \geq q - b$. Par contre $x^r \varphi(x,y)$ n'est plus polynomiale si r est strictement inférieur à $q - b$: dans le cas contraire, $x^{r+b-q} y^q (x-\lambda)^q = x^r \varphi(x,y) - (x-\lambda)^a$ serait polynomiale, ce qui est absurde compte tenu de la présence du monôme $(-\lambda)^q x^{r+b-q} y^q$ où $r + b - q < 0$. On peut donc conclure à $r = \mathrm{Min}(0, q-b)$.

Prenons $a = p$ pour avoir $\deg_x f = p$. On a toujours $\deg_y f = q$, et l'on peut énoncer :

> **Lemme 1** : φ étant construite à partir de $f(x,y) = x^p + (x+\lambda)^b y^q$, le plus petit entier naturel r tel que $x^r \varphi(x,y)$ soit polynomiale est $r = \mathrm{Min}(0, q-b)$.

Il suffit de faire varier b de 0 à q pour que $q - b$ décrive $\{0, ..., q\}$. Ainsi r peut prendre n'importe quelle valeur entière entre 0 et q.

5.7. La fonction

$$g(x,y) = x^r \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m} f_{m,k} (x-\lambda)^m \frac{y^k}{x^k}$$

est polynomiale. Pour m fixé, on a donc

$$k > r \Rightarrow f_{m,k} = 0$$

et k varie de 0 à $m' = \mathrm{Min}(r, m)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x-\lambda)^{-s} g(x,y) \\ &= \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} (x-\lambda)^{m-s} x^{r-k} y^k \end{aligned}$$

et il suffit de choisir $s = v$ pour que $F(x,y)$ soit polynomiale (dans ce cas $m-v$ est positif pour tout m entre v et n). Pour prouver que $s = v$ est le plus grand entier tel que $F(x,y)$ soit polynomiale, il nous reste à montrer l'implication

$$s > v \Rightarrow F(x,y) \text{ non polynomiale.}$$

Supposons donc $s > v$, et raisonnons par l'absurde. Si $F(x, y)$ est polynomiale, pour tout $k \in \{0, ..., m'\}$ la somme

$$\sum_{m=v}^{n} f_{m,k} (x - \lambda)^{m-s} x^{r-k}$$

est polynomiale. Par hypothèse, il existe h tel que $f_{v,h} \neq 0$. Prenons $k = h$. La somme $\sum_{m=v}^{n} f_{m,h} (x - \lambda)^{m-s} x^{r-h}$, et a fortiori le produit

$$(x - \lambda)^{s-v-1} \times \left(\sum_{m=v}^{n} f_{m,h} (x - \lambda)^{m-s} x^{r-h} \right) = \sum_{m=v}^{n} f_{m,h} (x - \lambda)^{m-v-1} x^{r-h}$$

doit être polynomial. Puisque la fonction $\sum_{m=v+1}^{n} f_{m,h} (x - \lambda)^{m-v-1} x^{r-h}$ est polynomiale, on peut affirmer que $f_{v,h} (x - \lambda)^{-1} x^{r-h}$ est polynomiale, ce qui est absurde.

- Si $r \geq 1$,

$$F(0, 0) = \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} (-\lambda)^{m-v} 0^{r-k} 0^k = \sum_{m=v}^{n} f_{m,0} (-\lambda)^{m-v} 0^r = 0.$$

5.8. • Le degré total de

$$F(x, y) = \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} (x - \lambda)^{m-v} x^{r-k} y^k$$

est $N = n - v + r$.

- On a $N = n - v + r \leq n - v + q \leq n + q \leq 2n$.

- Le polynôme $f(x, y) = y^n - x - \lambda$ est de degré n, de valuation $v = 0$, et tel que $p = 1$ et $q = n$. On trouve

$$g(x, y) = x^r \varphi(x, y) = x^r f\left(x - \lambda, \frac{y}{x}(x - \lambda)\right) = \frac{x^r y^n}{x^n} (x - \lambda)^n - x^{r+1},$$

et le plus petit entier r tel que $g(x, y)$ soit un polynôme est $r = n$. Par conséquent $g(x, y) = y^n (x - \lambda)^n - x^{n+1}$ et

$$F(x, y) = (x - \lambda)^{-v} g(x, y) = g(x, y)$$

est de degré $N = \deg F = 2n$.

5.9. • Ici $f(x,y) = x^a + (x+\lambda)^q y^q$ avec $a \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x^r f\left(x-\lambda, \frac{y}{x}(x-\lambda)\right) \\ &= x^r \left[(x-\lambda)^a + x^q \left(\frac{y}{x}(x-\lambda)\right)^q\right] \\ &= x^r \left[(x-\lambda)^a + y^q (x-\lambda)^q\right] \end{aligned}$$

donc $r = 0$. Pour calculer $N = n - v + r = n - v$, on envisage trois cas :

a) Si $a \geq 2q$, $n = a$, $v = q$ donc $N = a - q \geq \dfrac{a}{2} = \dfrac{n}{2}$.

b) Si $2q > a \geq q$, alors $n = 2q$, $v = q$ et $N = 2q - q = q = \dfrac{n}{2}$.

c) Si $q > a$, alors $n = 2q$, $v = a$ et $N = 2q - a > q = \dfrac{n}{2}$.

• Notons que

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] \leq m \leq n \Leftrightarrow n \leq 2m \leq 2n,$$

et choisissons la fonction $f(x,y) = x^n + (x+\lambda)^{n-m} y^{n-m}$. Le cas a) s'applique, et l'on trouve $N = a - q = n - (n-m) = m$.

5.10. ▶ Prenons $\mu = -\lambda$, et à partir de

$$F(x,y) = \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} (x-\lambda)^{m-v} x^{r-k} y^k$$

construisons $T_{-\lambda}(F)$ (comme on l'a fait pour f aux questions 5.5, 5.6 et 5.7). On construit

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= F\left(x+\lambda, \frac{y}{x}(x+\lambda)\right) \\ &= \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} x^{m-v} (x+\lambda)^{r-k} \frac{y^k}{x^k} (x+\lambda)^k \\ &= x^{-v} (x+\lambda)^r \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} x^{m-k} y^k \\ &= x^{-v} (x+\lambda)^r f(x,y). \end{aligned}$$

Continuant la construction du 5.6, il s'agit de trouver le plus petit entier R tel que $G(x,y) = x^R \Phi(x,y)$ soit polynomiale. Puisque

$$x^v \Phi(x,y) = (x+\lambda)^r f(x,y)$$

est polynomiale, on a certainement $R \leq v$. Montrons que

$$R < v \Rightarrow G(x, y) \text{ non polynomiale.}$$

Si $R < v$, et si $x^R \Phi(x, y) = x^{R-v} (x + \lambda)^r f(x, y) = W(x, y)$ est une fonction polynomiale W, alors $(x + \lambda)^r f(x, y) = x^{v-R} W(x, y)$ s'annule pour $x = 0$, et

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(0, y) = 0.$$

Dans ce cas x est nécessairement en facteur dans f, ce qui contredit l'hypothèse de cette question.
On peut donc affirmer que $R = v$ est le plus petit exposant R tel que $x^R \Phi(x, y)$ soit polynomiale, et écrire

$$G(x, y) = x^v \Phi(x, y) = (x + \lambda)^r f(x, y).$$

Il s'agit maintenant de trouver le plus grand entier naturel S tel que la fonction $(x + \lambda)^{-S} G(x, y)$ soit polynomiale (c'est la suite de la construction en 5.7), et de le noter V.

- Puisque $(x + \lambda)^{-r} G(x, y) = f(x, y)$ est polynomiale, on a $V \geq r$.
- En fait $V = r$ car

$$S > r \Rightarrow (x + \lambda)^{-S} G(x, y) \text{ non polynomiale.}$$

En effet, si $S > r$ et s'il existait un polynôme $Q(x, y)$ tel que

$$(x + \lambda)^{-S} G(x, y) = (x + \lambda)^{r-S} f(x, y) = Q(x, y),$$

on aurait $f(x, y) = (x + \lambda)^{S-r} Q(x, y)$, donc

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(-\lambda, y) = 0.$$

Cela montre que $x + \lambda$ divise f, ce qui est absurde.

En conclusion : $R = v$, $V = r$ et $T_{-\lambda}(F)(x, y) = (x + \lambda)^{-r} G(x, y) = f(x, y)$.
On a montré les égalités

$$f = T_{-\lambda}(F) = T_{-\lambda} \circ T_\lambda(f).$$

Un calcul identique à celui qu'on vient de faire, mais effectué en remplaçant λ par $-\lambda$, montre que l'on a aussi $f = T_\lambda \circ T_{-\lambda}(f)$. Finalement

$$\exists \mu = -\lambda \quad f = T_\mu(F) = T_\mu \circ T_\lambda(f) = T_\lambda \circ T_\mu(f).$$

▶ D'après 5.8,

$$f = T_\mu(F) \Rightarrow \deg f \leq 2 \deg F \Rightarrow n \leq 2N.$$

5.11. ▶ **Analyse** : Supposons que f vérifie $T_\lambda(f) = f$, c'est-à-dire

$$\sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} (x-\lambda)^{m-v} x^{r-k} y^k = \sum_{m=v}^{n} \sum_{k=0}^{m'} f_{m,k} x^{m-k} y^k.$$

Alors

$$N = n \underset{5.8}{\Rightarrow} n - v + r = n \Rightarrow v = r,$$

et (en identifiant les coefficients des y^k) :

$$\forall k \quad \sum_m f_{m,k} (x-\lambda)^{m-v} x^{v-k} = \sum_m f_{m,k} x^{m-k},$$

ou encore

$$\forall k \quad \sum_m f_{m,k} (x-\lambda)^{m-v} = \sum_m f_{m,k} x^{m-v}.$$

Notons $P_k(x) = \sum_m f_{m,k} x^{m-v}$. Le polynôme P_k vérifie $P_k(x-\lambda) = P_k(x)$. S'il n'est pas constant, il admet au moins une racine complexe z_0 et l'on peut écrire

$$... = P_k(z_0 - 3\lambda) = P_k(z_0 - 2\lambda) = P_k(z_0 - \lambda) = P_k(z_0) = 0.$$

Dans ce cas $P_k(x)$ admet une infinité de racines dans $\mathbb{C}$, donc est identiquement nul. On a prouvé que les seuls polynômes $P_k(x)$ vérifiant $P_k(x-\lambda) = P_k(x)$ sont les polynômes constants. Ainsi

$$\forall k \quad \forall m > v \quad f_{m,k} = 0,$$

et f s'écrit

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{v} f_{v,k} x^{v-k} y^k.$$

Le polynôme f est donc homogène de degré v. Comme $\deg f = n$, on obtient $n = v$ et

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} x^{n-k} y^k.$$

Par hypothèse, $\deg_x f = p \geq 1$ donc f ne peut pas être identiquement nulle. En conclusion, toute application polynomiale f vérifiant $T_\lambda(f) = f$ est de la forme

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} x^{n-k} y^k \quad (*)$$

où l'un au moins des coefficients $f_{n,k}$ n'est pas nul.

▶ **Synthèse** : On considère la fonction polynomiale non nulle $f(x,y)$ définie par $(*)$, et l'on essaie de prouver l'égalité $T_\lambda(f) = f$. Puisque f n'est pas nulle, il existe un entier n' tel que

$$f_{n,n} = ... = f_{n,N+1} = 0 \quad \text{et} \quad f_{n,n'} \neq 0.$$

Alors $f(x,y) = \sum_{k=0}^{n'} f_{n,k} x^{n-k} y^k$. Reconstruisons $T_\lambda(f)$. D'après 5.6, il s'agit de trouver le plus petit entier r tel que

$$\begin{aligned} g(x,y) = x^r f\left(x-\lambda, \frac{y}{x}(x-\lambda)\right) &= x^r \sum_{k=0}^{n'} f_{n,k} (x-\lambda)^{n-k} \frac{y^k}{x^k} (x-\lambda)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n'} f_{n,k} (x-\lambda)^n x^{r-k} y^k \end{aligned}$$

soit polynomiale. On obtient $r = n'$, donc

$$g(x,y) = \sum_{k=0}^{n'} f_{n,k} (x-\lambda)^n x^{n'-k} y^k.$$

Ensuite, il faut trouver v maximal tel que $(x-\lambda)^{-v} g(x,y)$ soit polynomiale. On trouve $v = n'$. Finalement

$$T_\lambda(f)(x,y) = (x-\lambda)^{-n'} g(x,y) = \sum_{k=0}^{n'} f_{n,k} (x-\lambda)^{n-n'} x^{n'-k} y^k$$

et l'on aura $T_\lambda(f) = f$ si et seulement si $n' = n$.

▶ **Conclusion générale** : Les solutions de $T_\lambda(f) = f$ sont les fonctions polynomiales homogènes

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} x^{n-k} y^k$$

telles que $f_{n,n} \neq 0$.

Bibliographie

[1] R. Andre-Jeannin — *Quelques propriétés de* th (x). Revue de Mathématiques Spéciales (Juin 1987).

[2] H. Alzer — *A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality.* American Mathematical Monthly. (1996).

[3] J. M. Arnaudies, Fraysse — *Cours de Mathématiques. Volume 3, compléments d'analyse.* Dunod.

[4] D. Bertrand — *Equations différentielles linéaires et analyse diophantienne.* Cours de D. E. A. (I. H. P. 1982).

[5] F. Beukers — *Legendre polynomials in irrationality proofs.* Bull. Austr. Math. Soc. Vol. 22.

[6] P. G. Ciarlet — *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson (1982).

[7] M. Crouzeix, A. Mignot — *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson. 1984.

[8] P. Davis — *Interpolation and approximation.* Dover Publication. 1975.

[9] M. H. Dehon. *Une construction élémentaire de l'exponentielle complexe.* Sur le site http ://www.infty08.net.

[10] M. Demazure — *Cours d'Algèbre, Primalité, Divisibilité, Codes.* Editions Cassini (1997).

[11] D. Duverney — *Théorie des nombres.* Dunod (1998).

[12] P. Erdos — *Problems and results on the theory of interpolation II.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 12. (1961).

[13] F. R. Gantmacher — *Théorie des matrices (Vol. 1 et 2).* Dunod (1966).

[14] R. Goblot — *Algèbre commutative.* Masson (1996).

[15] G. H. Hardy — *A course of pure Mathematics.* Cambridge University Press (1952).

[16] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya — *Inequalities.* Cambridge University Press (1952).

[17] R. A. Horn, C. A. Johnson — *Matrix analysis.* Cambridge University Press (1985).

[18] D. Huylebrouck — *Similarities in irrationality proofs for* π, $\ln(2)$, $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$. Mathematical Monthly (Mars 2001).

[19] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis I.* American Mathematical Society (2001).

[20] D. C. Kurtz — *A sufficient condition for all roots of a polynomial to be real.* American Mathematical Monthly (1992).

[21] D.-J. Mercier — *Cours de géométrie*, édition 4, CSIPP (2014).

[22] D. Monasse — *La méthode de Newton et les racines des polynômes.* Revue des Mathématiques spéciales. (Janvier 1987).

[23] I. P. Natanson — *Constructive function theory. Vol. 1 à 3* Ungar (1965).

[24] I. Niven — *Irrational numbers.* The Carus Mathematical Monographs (1956).

[25] J. Querre — *Cours d'algèbre, Maîtrise de mathématiques.* Masson (1976).

[26] J. E. Rombaldi — *Problèmes corrigés d'analyse numérique.* Masson (1996).

[27] J. E. Rombaldi — *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).

[28] J. E. Rombaldi — *Éléments d'analyse réelle.* EDP Sciences (2004).

[29] J. E. Rombaldi — *Interpolation et approximation.* Vuibert (2005).

[30] S. Rosset — *Normalized symmetric functions, Newton's inequalities and a new set of stronger inequalities.* American Mathematical Monthly (1989).

[31] P. Samuel — *Théorie algébrique des nombres.* Hermann (1971).

[32] P. Tauvel — *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson (1993).

[33] P. Tauvel — *Exercices de mathématiques pour l'agrégation.* Algèbre 2. Masson (1994).

[34] P. Tauvel — *Cours de géométrie.* Masson (2000).

Cet ouvrage propose les énoncés et corrigés de quinze problèmes du CAPES externe de mathématiques posés entre 1999 et 2005, avec des remarques et compléments.

Ce recueil d'annales a été publié une première fois en 2005. Cette seconde édition, voulue par les auteurs, pourra servir d'entraînement aux nombreux candidats à l'agrégation interne de mathématiques car les thèmes mathématiques et le niveau du CAPES de l'époque sont tout à fait adaptés à cela. Cette seconde édition servira aussi de témoignage pour le concours du CAPES.

MISE EN GARDE : ce livre n'est plus d'actualité pour préparer le CAPES mathématique en 2020 car le programme disciplinaire de ce concours a sans cesse diminué au fur et à mesure des réformes entreprises à partir de la session 2011.

POUR L'AGRÉGATION INTERNE : une utilisation efficace de ces problèmes consiste à les chercher au préalable puis à confronter les résultats obtenus aux solutions proposées. Les objectifs principaux sont alors de :

- proposer des épreuves d'entraînements ;
- proposer un modèle de rédaction ;
- élargir le champ des connaissances acquises en licence.