Table des matières

Avant-propos

L'objectif de cet ouvrage, qui est le deuxième d'une série de deux livres, est de proposer aux candidats à l'agrégation interne de mathématiques des outils pour préparer la deuxième épreuve orale de ce concours.

Pour cette épreuve, le candidat doit être capable de présenter les énoncés de 3 à 6 exercices sur une thème mathématique donné en motivant ses choix. Le niveau des exercices dépasse celui du Lycée, il doit se situer au niveau d'une classe préparatoire MP ou de la troisième année de licence, étant entendu que tout ce qui est présenté doit être maîtrisé.

Pour cette épreuve, après une préparation de 3 heures, le candidat présente en 10 minutes maximum, en justifiant ses choix, tous les exercices sélectionnés, puis il propose de résoudre, en 15 minutes maximum, l'exercice qu'il juge le plus instructif pour le thème correspondant. Enfin, pour les 25 minutes restantes le jury pose des questions sur l'exercice résolu (corrections de coquilles et maladresses, est-il possible de généraliser ? est-il possible de diminuer les hypothèses ?, résolution d'un autre des exercices proposés, ...) et sur les autres exercices.

Comme pour la première épreuve, une solide préparation est nécessaire. Dans les rapports de jury, il est précisé que « motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est en expliquer la pertinence par des raisons d'ordre pédagogique ou mathématique (l'une n'excluant pas l'autre), préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique, etc. »

Le jury attend des candidats qu'ils proposent des exercices appliquant à des domaines variés, par leurs domaines spécifiques ou bien par leurs méthodes de traitement, et non pas plusieurs habillages d'une seule et même idée. Le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet : le hors sujet est sanctionné ! Les exercices doivent être consistants ne pas relever d'une astuce sans réel d'intérêt. Il est bon de privilégier des méthodes de résolution porteuses et pédagogiquement efficace. Les exercices trop proches du cours ne sont pas conseillés.

Le but de ce livre est de répondre à ces exigences. On pourra consulter les livres de Jean-François Dantzer et ceux de Jean-Etienne Rombaldi (cours d'algèbre et livre d'exercices) dans la même collection pour des compléments. Par exemple, la leçon « exemples d'équations fonctionnelles » est traitée dans [23] (chapitre 7).

Les exercices proposés ne sont certainement pas des modèles (il n'y en a pas), ce sont des bases sur lesquels chacun élaborera sa leçon en fonction de ses connaissances et de ses capacités. Il est conseillé de modifier un exercice en modifiant les données ou en allégeant les hypothèses pour ne traiter qu'un cas particulier dans la mesure ou cela reste consistant et pertinent. Certains exercices peuvent sembler trop long, du fait d'une rédaction précise. Le candidat devra construire sur cette base des exercices respectant la contrainte de temps en utilisant des raccourcis, en supprimant des questions, ...

Les exercices proposés dans ce livre sont aussi l'occasion d'entraînement pour les épreuves écrites.

Le livre d'exercices de Jean-Etienne Rombaldi dans la même collection présente des exercices qui peuvent être utilisés pour cette épreuve orales, en particulier pour les leçons non traitées dans cet ouvrage. Ces exercices sont en général de niveau et difficultés plus élevés et s'adressent de préférence aux candidats qui visent les première place.

Il y a 36 sujets d'algèbre et géométrie et 43 sujets d'analyse et probabilités pour la deuxième épreuve orale d'exposé. Plusieurs sujets gravitant autour d'un même sujet, j'ai décidé de rédiger des plans pour 16 leçons d'algèbre et 17 leçons d'analyse pour éviter un livre trop volumineux. Les exercices proposés peuvent aussi faire l'objet de développements pour la première épreuve.

Dans les divers rapports de jury, on peut trouver les remarques suivantes sur quelques unes des leçons traitées dans cet ouvrage.

304 : Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

Ce sujet ne doit pas se limiter à des situations issues de l'arithmétique entière et devrait comporter au moins une partie d'algèbre linéaire.

306 : Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.

Les algorithmes attendus ne se limitent pas à l'algorithme d'Euclide, certains candidats proposent le calcul des coefficients de l'identité de Bézout (permettant la recherche de l'inverse d'un élément dans un anneau de classes résiduelles), parfois illustré d'une mise en oeuvre informatique. On mentionne, beaucoup plus rarement, la recherche des décompositions en éléments simples des fractions rationnelles.

307 : Exercices faisant intervenir les dénombrements.

Ce sujet permet une ouverture vers de nombreux domaines (pas uniquement aux probabilités) : théorie des groupes (équation aux classes, ...), formule du crible, arithmétique (indicatrice d'Euler, ...)...

Les exercices portant sur les coefficients binomiaux ne sont pas tous a priori des exercices de dénombrement : encore faut-il mettre en évidence la situation de dénombrement associée à la formule visée !

309 : Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le jury a entendu avec plaisir une présentation de l'application des polynômes à la recherche des polygones réguliers. Quelques évocations du polynôme minimal d'une matrice ont varié le menu, il eût même été possible d'aborder le polynôme minimal d'un élément algébrique sur un corps.

Des calculs sur les polynômes caractéristiques de matrices par blocs ont été effectués mais sans rigueur.

314 : Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.

Les exercices choisis pour ce sujet furent souvent originaux mais pas toujours correctement maîtrisés (le calcul des déterminants est un sujet potentiellement très technique). L'usage de corps finis a permis de renouveler quelque peu ce sujet, il convenait toutefois de s’assurer que la caractéristique du corps était différente de 2.

315 : Exercices illustrant l’utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.

Un candidat, qui voulait illustrer ce sujet par un système différentiel linéaire à coefficients constants, s’est enlisé dans des détails techniques mal maîtrisés. Il convenait de mieux préparer la démarche de résolution voire d’utiliser les logiciels mis à disposition.

317 : Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.

On peut, pour ce sujet comme pour le 315 (valeurs propres), s’intéresser au nouveau programme de spécialité en série S qui aborde ces questions à travers les itérations d’une transformation matricielle (ou application linéaire).

Ce sujet a été brillamment illustré par un candidat qui a choisi de s’appuyer sur une situation issue de la Physique avec une utilisation judicieuse d’un logiciel de géométrie dynamique. Un autre candidat a fait preuve d’originalité en s’attaquant à une diagonalisation sur un corps fini ! En sens inverse, le calcul d’un polynôme caractéristique suivi de la recherche des éléments propres présentent peu d’intérêt quand un système de calcul formel peut accomplir les mêmes tâches en peu de temps ; ce type d’illustration n’a d’attrait que si l’ordinateur n’en vient pas à bout.

Des calculs sur les polynômes caractéristiques de matrices par blocs ont été effectués mais sans rigueur.

405 : Exemples de calcul exact de la somme d’une série numérique.

Les exercices proposés ont été assez variés. Pour diversifier encore, on pourra songer aux situations probabilistes sur des espaces probabilisés dénombrables.

407 : Exemples d’évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

Les études numériques (pouvant s’appuyer sur l’usage d’un logiciel) sont ici appréciées. On pourrait évoquer les sommes de Riemann, l’estimation de la convergence de la méthode de Newton. La recherche d’équivalents est rarement maîtrisée.

409 : Exemples d’utilisation de polynômes en analyse.

Les candidats qui ont choisi ce sujet en ont souvent tiré un bon parti ; un candidat s’est ainsi intéressé au calcul des polynômes de Legendre et de Tchebychev au moyen d’un système de calcul formel. Le lien avec les problèmes de plus courte distance et de meilleure approximation pourrait fournir d’autres applications.

Dans ce sujet bien sûr, on peut faire référence aux polynômes orthogonaux, mais ouvre d’autres perspectives telles les courbes de Bézier ou les situations d’approximation en analyse, etc.

414 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

Ce sujet a donné lieu à de bonnes prestations ; le théorème de Fejér a été plusieurs fois proposé, c’est une démarche qui peut être longue si elle n’est pas efficacement conduite.

415 : Exemples d’applications du théorème des accroissements finis et de l’inégalité des accroissements finis pour une fonction d’une ou plusieurs variables réelles.

Ce sujet a souvent donné lieu à des exercices très proches du cours, peu intéressants en soi ; on déplore l'oubli presque systématique des fonctions de plusieurs variables. On pouvait, par exemple, s'intéresser à des suites récurrentes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

421 : Exemples de calcul exact ou de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Illustration algorithmique.

Proposer une valeur approchée pour une intégrale n'a pas de sens si on ne donne pas une majoration de l'erreur.

427 : Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

Plusieurs candidats ont eu de la peine à citer un théorème de changement de variables pour une intégrale simple avec les bonnes hypothèses (ce qui nécessite du soin dans le cas des fonctions continues par morceaux).

437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.

On aimerait ici voir apparaître quelques variables aléatoires à densité !

438 : Exemples de problèmes de dénombrement, utilisation en probabilités.

Ce sujet a donné lieu à un très bon choix d'exercices avec des applications en analyse, probabilités, arithmétique, en plus des problèmes classiques de dénombrement.

438 : Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.

Le caractère continu et une estimation de la norme de l'application linéaire considérée doivent être le coeur de l'exercice.

440 : Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

Avec de tels intitulés, il n'est pas inutile de proposer un exercice donnant un sens géométrique clair à la notion de courbure, par exemple démontrer qu'un cercle qui est tangent en un point $M\left(s_0\right)$ à un arc birégulier et qui passe par un point$M\left(s\right)$ admet pour limite quand s tend vers s_0 le cercle centré au centre de courbure et dont le rayon algébrique est $R\left(s_0\right)$. On pourra également proposer les formules usuelles donnant les vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, avec des applications. L'étude des mouvements à accélération centrale a toute sa place ici. On vérifie que la trajectoire de M est plane lorsqu'elle ne passe pas par le centre O. En supposant de plus l'accélération centrale newtonienne, on pourra établir, par exemple à l'aide des formules de Binet, que la trajectoire du point M est incluse dans une conique. Ce dernier point pourra également intervenir utilement dans une leçon sur les coniques.