

Table des matières

Avant-propos	x
I Leçons d’algèbre et de géométrie	1
1 Exercices sur les groupes	3
1.1. Groupes d’exposant égal à 2.	3
1.2. Pour un plan euclidien E , un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$ ou de $GL(E)$ est cyclique ou diédral.	4
1.3. Groupes et topologie : petits sous-groupes bornés de $GL_n(\mathbb{C})$	6
1.4. Groupes et topologie : on s’intéresse aux sous-groupes additifs de \mathbb{R} et à quelques applications de leur caractérisation (ils sont denses ou discrets).	7
1.5. Groupes et géométrie : applications affines conservant un cube dans un espace euclien.	9
1.6. Morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$	12
2 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout	15
2.1. Les groupes $GL_2(\mathbb{Z})$ et $SL_2(\mathbb{Z})$	15
2.2. Matrices inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et nombres de Fibonacci	17
2.3. Périodicité de la suite $(A(n) \wedge B(n))_{n \in \mathbb{N}}$ pour A, B dans $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$	20
2.4. Condition pour que l’application $X \mapsto AX - XB$ soit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	21
2.5. Théorème de décomposition des noyaux.	22
2.6. Relation de Bézout pour les polynômes $(1 - X)^n$ et X^n	24
3 Exercices faisant intervenir les notions de pgcd et ppcm	27
3.1. pgcd de $a^n - 1$ et $a^m - 1$ dans \mathbb{Z} et pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ dans $\mathbb{K}[X]$	27
3.2. Une minoration de ppcm $(1, 2, \dots, n)$ pour $n \geq 7$	28
3.3. Théorème de Lamé sur le nombre de divisions euclidiennes que nécessite l’algorithme d’Euclide pour calculer le pgcd de a et b	31
3.4. Exposant d’un groupe fini.	34

3.5.	Condition pour que $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} J^k$ soit inversible pour J matrice de permutation.	36
3.6.	Théorème de Fermat pour les polynômes.	37
4	Exercices utilisant le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	39
4.1.	Résolution d’une équation de degré 2 dans \mathbb{F}_{17}	39
4.2.	Diviseurs premiers de $2^n - 1$	39
4.3.	Petit théorème de Fermat.	41
4.4.	Entiers sommes de deux carrés.	42
4.5.	Polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$	45
4.6.	Une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$ commutent	46
5	Exercices utilisant des polynômes et fractions rationnelles	49
5.1.	Fonctions symétriques élémentaires des racines et formules de Newton.	49
5.2.	Exemples d’utilisation des polynômes d’interpolation de Lagrange.	51
5.3.	Produit scalaire et projection orthogonale sur $\mathbb{R}[X]$	54
5.4.	Décomposition en éléments simples et déterminant de Cauchy.	55
5.5.	Calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k}$	57
5.6.	Calculs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$	58
6	Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles	63
6.1.	Polynômes réels à valeurs positives.	63
6.2.	Irréductibilité de $\prod_{k=1}^n (X - a_k) - 1$ et $Q(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_k)^2 + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$	64
6.3.	Racines complexes d’un polynôme à coefficients dans \mathbb{Q}	65
6.4.	Irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$	66
6.5.	Théorème de Gauss-Lucas et applications.	68
6.6.	Polynômes à coefficients dans \mathbb{F}_p . Exemples de corps finis.	71
7	Exercices d’algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes	75
7.1.	Un calcul de polynôme minimal et de puissances d’une matrice.	75
7.2.	Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.	77
7.3.	Matrices de permutation et matrices circulantes.	78
7.4.	Polynômes ultra-sphériques.	82
7.5.	Polynôme minimal d’un endomorphisme.	85
7.6.	Commutant d’un endomorphisme.	87
8	Exercices illustrant l’utilisation de déterminants	93
8.1.	Utilisation des déterminants de Vandermonde.	93
8.2.	Déterminants de Vandermonde et inégalités de Kolmogorov.	96
8.3.	Utilisation des déterminants de Gram.	97

8.4.	Déterminant jacobien et volume d’une boule de \mathbb{R}^n .	99
8.5.	Déterminant jacobien et moments d’une variable aléatoire à densité à deux dimensions.	101
8.6.	Résultant de deux polynômes.	104
9	Exercices utilisant des vecteurs et valeurs propres	107
9.1.	Exponentielle de matrice et système différentiel.	107
9.2.	Valeurs propres d’un opérateur différentiel.	110
9.3.	Équations différentielles et valeurs propres.	111
9.4.	Nature d’une conique dans le plan euclidien ou d’une quadrique dans l’espace euclidien.	112
9.5.	Nombres algébriques.	114
10	Endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables	117
10.1.	Un exemple de diagonalisation.	117
10.2.	Densité de l’ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.	119
10.3.	Sous-groupes commutatifs d’exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$.	121
10.4.	Diagonalisabilité de l’endomorphisme $M \mapsto AM + MB$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	123
10.5.	Diagonalisation et calcul des puissances d’une matrice.	127
10.6.	Matrices complexes normales.	129
11	Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices	133
11.1.	Algorithmes de Gauss et de décomposition LR pour une matrice tridiagonale.	133
11.2.	Un algorithme permettant d’obtenir la décomposition de Dunford.	135
11.3.	Décompositions additive et multiplicative de Dunford.	139
11.4.	Calcul du polynôme caractéristique d’une matrice réelle ou complexe par la méthode de Souriau.	140
11.5.	Le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$.	141
11.6.	Morphisme de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K}^* qui sont fonctions polynomiales des coefficients des matrices.	145
12	Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux	149
12.1.	Nature d’une isométrie en dimension 3.	149
12.2.	Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices tAA et $A {}^tA$ sont orthogonalement semblables.	151
12.3.	Isométries affines conservant une hélice circulaire.	151
12.4.	Composantes connexes du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.	153
12.5.	Caractérisation des rotations de \mathbb{R}^3 comme solutions non nulles de l’équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.	155
12.6.	Décomposition polaire.	158
13	Exercices sur les formes quadratiques	163
13.1.	Un exemple de réduction de Gauss.	163
13.2.	Exemples de formes quadratiques réelles définies positives.	166
13.3.	La forme quadratique $\text{Tr}(M^2)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.	170
13.4.	Formes quadratiques et géométrie : ellipsoïdes dans l’espace euclidien \mathbb{R}^n .	171

13.5.	Lemme de Morse.	176
13.6.	Formes quadratiques sur le $\mathbb{K}(X)$ -espace vectoriel $(\mathbb{K}(X))^n$, théorème de Pfister.	179
14	Exercices de géométrie résolus à l’aide des nombres complexes	183
14.1.	Un critère de cocyclicité de 4 points.	183
14.2.	Une suite de polygones.	186
14.3.	Le cercle des neuf points d’Euler.	188
14.4.	Relations trigonométriques pour un triangle.	190
14.5.	Ellipse de Steiner.	196
14.6.	Quelques expressions de l’aire d’un triangle.	198
15	Exercices sur les cercles et les sphères	203
15.1.	Plus courte distance entre deux points d’une sphère.	203
15.2.	Puissance d’un point par rapport à une sphère.	204
15.3.	Cercle orthoptique d’une ellipse ou d’une hyperbole.	208
15.4.	Recouvrement du plan par des cercles.	211
15.5.	Recouvrement de l’espace par des sphères.	212
15.6.	Cocyclicité de 4 points sur une conique.	214
16	Exercices faisant intervenir des dénombrements	219
16.1.	Calculs de sommes en utilisant un argument de dénombrement.	219
16.2.	Probabilité pour que deux entiers compris entre 1 et n soient premiers entre eux.	221
16.3.	Carrés dans un corps fini.	222
16.4.	Racines n -èmes de l’unité sur un corps fini	224
16.5.	Nombre d’automorphismes d’un espace vectoriel sur un corps fini.	225
16.6.	Formule des classes.	228
II	Leçons d’analyse et de probabilité	231
17	Exemples de suites définies par une relation de récurrence	233
17.1.	Suite récurrente $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, développement asymptotique.	233
17.2.	Suites homographiques.	235
17.3.	Suite définie par $x_n = \sqrt{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_2 + \cdots + \sqrt{\alpha_{n-1} + \sqrt{\alpha_n}}}}$	238
17.4.	Suite réelle définie par $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}$	241
17.5.	Un algorithme de calcul l’inverse d’une matrice.	242
17.6.	Suite de variables aléatoires définie par une relation de récurrence.	244
18	Exemples de calcul exact de la somme d’une série numérique	247
18.1.	Calcul de $\sum \frac{P(n)}{n!}$ pour P dans $\mathbb{C}[X]$	247
18.2.	Calcul élémentaire de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ pour $\alpha > 0$	248

18.3.	Utilisation des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce pour le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	249
18.4.	Utilisation du théorème de Raabe-Duhamel pour calculer la somme d’une série numérique.	252
18.5.	Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x \in]0, \pi[$	254
18.6.	Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$	258
19	Évaluation de restes ou sommes partielles de séries	261
19.1.	Équivalents de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ et $\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) - 1$	261
19.2.	Convergence de $\left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$	262
19.3.	Un équivalent des restes d’une série alternée.	263
19.4.	Sommes partielles et restes de séries de Riemann et de Bertrand.	264
19.5.	Développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique et d’une série de Bertrand.	269
19.6.	Équivalents des sommes partielles ou des restes d’une série de la forme $\sum f(n)$	272
20	Exemples d’utilisation de polynômes en analyse	277
20.1.	Plusieurs démonstrations du théorème de d’Alembert-Gauss.	277
20.2.	Quelques caractérisations des fonctions polynomiales à coefficients complexes.	282
20.3.	Polynômes de Bernstein.	284
20.4.	Polynômes de Bernoulli et formule d’Euler-Maclaurin.	291
20.5.	Exemples d’utilisation de la formule d’Euler-Maclaurin.	295
20.6.	Polynômes orthogonaux.	299
21	Exemples d’applications des séries entières	303
21.1.	Utilisation d’un théorème radial d’Abel.	303
21.2.	Étude de $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$, une relation fonctionnelle.	305
21.3.	Utilisation des séries entières pour résoudre des équations différentielles.	307
21.4.	Calcul de $\det(I_n + zA)$	310
21.5.	Utilisation de la série géométrique pour l’étude de $GL(E)$	312
21.6.	Fonction génératrice d’une variable aléatoire discrète.	314
22	Exemples de séries de Fourier et de leurs applications	319
22.1.	Calculs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$	319

22.2.	Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(na)}{n^2}$	320
22.3.	Utilisation d’une série de Fourier pour calculer $\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\lambda + \cos(x)} dx$	323
22.4.	Résolution de l’équation différentielle $y''(x) + y(x) = \sin(x) $	325
22.5.	Équation de la chaleur.	326
22.6.	Équation des ondes.	329
23	Applications du théorème des accroissements finis	333
23.1.	Prolongements par continuité ou par dérivabilité, applications de la règle de l’Hospital.	333
23.2.	Théorème des accroissements finis et limites à l’infini.	337
23.3.	Une démonstration du théorème de Darboux qui nous dit qu’une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Applications.	341
23.4.	L’équation fonctionnelle $f' = f \circ f$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et dérivable n’a pas de solution.	344
23.5.	Différentiabilité de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$	346
23.6.	Un système non linéaire de deux équations à deux inconnues	347
24	Exemples d’utilisation d’intégrales simples et multiples	349
24.1.	Utilisation d’une intégrale double pour calculer l’intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$	349
24.2.	Comparaison de la longueur de deux courbes.	351
24.3.	Aire de l’intérieur d’une courbe simple fermée définie par une équation paramétrique ou polaire.	353
24.4.	Utilisation d’une intégrale double pour calculer $\zeta(2)$	355
24.5.	Problème de l’aiguille de Buffon.	357
24.6.	Volume de la boule unité de l’espace euclidien \mathbb{R}^n	360
25	Calcul exact et approché d’une intégrale sur un segment	363
25.1.	Utilisation de sommes de Riemann pour le calcul de la valeur d’une intégrale.	363
25.2.	Un calcul classique des intégrales de Wallis et une minoration de $\binom{2n}{n}$	366
25.3.	Majoration de l’erreur dans la méthode de quadrature des rectangles à gauche.	367
25.4.	Calcul de $\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ pour $n \geq 1$	372
25.5.	Erreur d’approximation dans la méthode des trapèzes.	375
25.6.	Un procédé d’accélération de la méthode des trapèzes.	378
26	Théorèmes de convergence dominée et monotone	381
26.1.	Calculs de limites utilisant le théorème de convergence dominée.	382

26.2.	$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$	383
26.3.	Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$	384
26.4.	Un lemme de Cantor.	387
26.5.	Lien entre les fonctions Γ et ζ	389
26.6.	Convergence uniforme sur tout compact de la suite de fonctions $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin^n(t) \cos(t) f\left(\frac{2}{\pi}xt\right) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$	390
27	Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale	393
27.1.	Dérivabilité de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$	393
27.2.	$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt$ sur \mathbb{R}^+	397
27.3.	Calculs de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(xt^2) dt$	399
27.4.	Irrationalité de π	400
27.5.	Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet.	403
27.6.	Quelques propriétés de la fonction Γ d'Euler.	405
28	Applications des transformées de Fourier et Laplace	411
28.1.	Transformation de Fourier et produit de convolution de deux fonctions intégrables.	412
28.2.	Utilisation de la transformation de Laplace pour calculer une transformée de Fourier.	417
28.3.	Calcul d'une intégrale en utilisant la transformation de Laplace.	421
28.4.	Calcul l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$	424
28.5.	Transformation de Laplace et équation différentielle linéaire à coefficients constants.	426
29	Norme d'une application linéaire continue	431
29.1.	Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, norme de la forme linéaire trace.	432
29.2.	Norme d'un endomorphisme continu d'un espace préhilbertien.	434
29.3.	Norme d'une forme linéaire continue sur l'espace des suites numériques bornées.	435
29.4.	Opérateur de dérivation.	437
29.5.	Normes d'une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$	438
29.6.	Normes d'endomorphismes continus sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$	441
30	Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites	445
30.1.	Théorème des fonctions implicites et développements limités.	445
30.2.	Théorèmes du point fixe et des fonctions implicites.	448
30.3.	Un résultat de continuité des valeurs propres.	449

30.4. Théorème des extrema liés.	452
30.5. Théorème des extrema liés et inégalité arithmético-géométrique.	455
31 Exemples de problèmes de dénombrement	457
31.1. Un problème d’anniversaires.	457
31.2. Permutations sans points fixes.	459
31.3. Un problème de scrutin.	462
31.4. Partitions d’un ensemble fini, nombres de Stirling de deuxième espèce.	464
31.5. Partitions d’un ensemble fini, nombres de Bell.	467
32 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires	471
32.1. Taux de panne et variables aléatoires sans mémoire.	471
32.2. Égalité $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$ pour une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}	475
32.3. Chaîne de Markov en probabilités.	477
32.4. Probabilité qu’une matrice soit diagonalisable.	480
32.5. Variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes	481
32.6. Preuve probabiliste du théorème de Weirstrass	487
33 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes	493
33.1. Courbure et rayon de courbure.	493
33.2. Lemniscate de Bernoulli.	495
33.3. Comparaison de la longueur de deux courbes.	496
33.4. Théorème de relèvement et équation intrinsèque d’une courbe plane.	498
33.5. L’inégalité isopérimétrique.	499
33.6. Nombre de rotations d’une ligne polygonale fermée.	505
Bibliographie	509

Avant-propos

L’objectif de cet ouvrage, qui est le deuxième d’une série de deux livres, est de proposer aux candidats à l’agrégation interne de mathématiques des outils pour préparer la deuxième épreuve orale de ce concours.

Pour cette épreuve, le candidat doit être capable de présenter les énoncés de 3 à 6 exercices sur un thème mathématique donné en motivant ses choix. Le niveau des exercices dépasse celui du Lycée, il doit se situer au niveau d’une classe préparatoire MP ou de la troisième année de licence, étant entendu que tout ce qui est présenté doit être maîtrisé.

Pour cette épreuve, après une préparation de 3 heures, le candidat présente en 10 minutes maximum, en justifiant ses choix, tous les exercices sélectionnés, puis il propose de résoudre, en 15 minutes maximum, l’exercice qu’il juge le plus instructif pour le thème correspondant. Enfin, pour les 25 minutes restantes le jury pose des questions sur l’exercice résolu (corrections de coquilles et maladroresses, est-il possible de généraliser ? est-il possible de diminuer les hypothèses ?, résolution d’un autre des exercices proposés, ...) et sur les autres exercices.

Comme pour la première épreuve, une solide préparation est nécessaire. Dans les rapports de jury, il est précisé que « motiver le choix d’une liste d’exercices, c’est en expliquer la pertinence par des raisons d’ordre pédagogique ou mathématique (l’une n’excluant pas l’autre), préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique, etc. »

Le jury attend des candidats qu’ils proposent des exercices appliquant à des domaines variés, par leurs domaines spécifiques ou bien par leurs méthodes de traitement, et non pas plusieurs habillages d’une seule et même idée. Le candidat doit veiller à ce que les exercices qu’il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet : le hors sujet est sanctionné ! Les exercices doivent être consistants ne pas relever d’une astuce sans réel d’intérêt. Il est bon de privilégier des méthodes de résolution porteuses et pédagogiquement efficace. Les exercices trop proches du cours ne sont pas conseillés.

Le but de ce livre est de répondre à ces exigences. On pourra consulter les livres de Jean-François Dantzer et ceux de Jean-Etienne Rombaldi (cours d’algèbre et livre d’exercices) dans la même collection pour des compléments. Par exemple, la leçon « exemples d’équations fonctionnelles » est traitée dans [23] (chapitre 7).

Les exercices proposés ne sont certainement pas des modèles (il n’y en a pas), ce sont des bases sur lesquels chacun élaborera sa leçon en fonction de ses connaissances et de ses capacités. Il est conseillé de modifier un exercice en modifiant les données ou en allégeant les hypothèses pour ne traiter qu’un cas particulier dans

la mesure ou cela reste consistant et pertinent. Certains exercices peuvent sembler trop long, du fait d’une rédaction précise. Le candidat devra construire sur cette base des exercices respectant la contrainte de temps en utilisant des raccourcis, en supprimant des questions, ...

Les exercices proposés dans ce livre sont aussi l’occasion d’entraînement pour les épreuves écrites.

Le livre d’exercices de Jean-Etienne Rombaldi dans la même collection présente des exercices qui peuvent être utilisés pour cette épreuve orales, en particulier pour les leçons non traitées dans cet ouvrage. Ces exercices sont en général de niveau et difficultés plus élevés et s’adressent de préférence aux candidats qui visent les première place.

Il y a 36 sujets d’algèbre et géométrie et 43 sujets d’analyse et probabilités pour la deuxième épreuve orale d’exposé. Plusieurs sujets gravitant autour d’un même sujet, j’ai décidé de rédiger des plans pour 16 leçons d’algèbre et 17 leçons d’analyse pour éviter un livre trop volumineux. Les exercices proposés peuvent aussi faire l’objet de développements pour la première épreuve.

Dans les divers rapports de jury, on peut trouver les remarques suivantes sur quelques unes des leçons traitées dans cet ouvrage.

304 : Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

Ce sujet ne doit pas se limiter à des situations issues de l’arithmétique entière et devrait comporter au moins une partie d’algèbre linéaire.

306 : Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.

Les algorithmes attendus ne se limitent pas à l’algorithme d’Euclide, certains candidats proposent le calcul des coefficients de l’identité de Bézout (permettant la recherche de l’inverse d’un élément dans un anneau de classes résiduelles), parfois illustré d’une mise en oeuvre informatique. On mentionne, beaucoup plus rarement, la recherche des décompositions en éléments simples des fractions rationnelles.

307 : Exercices faisant intervenir les dénombrements.

Ce sujet permet une ouverture vers de nombreux domaines (pas uniquement aux probabilités) : théorie des groupes (équation aux classes, ...), formule du crible, arithmétique (indicatrice d’Euler, ...)

Les exercices portant sur les coefficients binomiaux ne sont pas tous a priori des exercices de dénombrement : encore faut-il mettre en évidence la situation de dénombrement associée à la formule visée !

309 : Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Le jury a entendu avec plaisir une présentation de l’application des polynômes à la recherche des polygones réguliers. Quelques évocations du polynôme minimal d’une matrice ont varié le menu, il eût même été possible d’aborder le polynôme minimal d’un élément algébrique sur un corps.

Des calculs sur les polynômes caractéristiques de matrices par blocs ont été effectués mais sans rigueur.

314 : Exercices illustrant l’utilisation de déterminants.

Les exercices choisis pour ce sujet furent souvent originaux mais pas toujours correctement maîtrisés (le calcul des déterminants est un sujet potentiellement très technique). L’usage de corps finis a permis de renouveler quelque peu ce sujet, il

convenait toutefois de s’assurer que la caractéristique du corps était différente de 2.

315 : Exercices illustrant l’utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.

Un candidat, qui voulait illustrer ce sujet par un système différentiel linéaire à coefficients constants, s’est enlisé dans des détails techniques mal maîtrisés. Il convenait de mieux préparer la démarche de résolution voire d’utiliser les logiciels mis à disposition.

317 : Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.

On peut, pour ce sujet comme pour le 315 (valeurs propres), s’intéresser au nouveau programme de spécialité en série S qui aborde ces questions à travers les itérations d’une transformation matricielle (ou application linéaire).

Ce sujet a été brillamment illustré par un candidat qui a choisi de s’appuyer sur une situation issue de la Physique avec une utilisation judicieuse d’un logiciel de géométrie dynamique. Un autre candidat a fait preuve d’originalité en s’attaquant à une diagonalisation sur un corps fini ! En sens inverse, le calcul d’un polynôme caractéristique suivi de la recherche des éléments propres présentent peu d’intérêt quand un système de calcul formel peut accomplir les mêmes tâches en peu de temps ; ce type d’illustration n’a d’attrait que si l’ordinateur n’en vient pas à bout.

Des calculs sur les polynômes caractéristiques de matrices par blocs ont été effectués mais sans rigueur.

405 : Exemples de calcul exact de la somme d’une série numérique.

Les exercices proposés ont été assez variés. Pour diversifier encore, on pourra songer aux situations probabilistes sur des espaces probabilisés dénombrables.

407 : Exemples d’évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

Les études numériques (pouvant s’appuyer sur l’usage d’un logiciel) sont ici appréciées. On pourrait évoquer les sommes de Riemann, l’estimation de la convergence de la méthode de Newton. La recherche d’équivalents est rarement maîtrisée.

409 : Exemples d’utilisation de polynômes en analyse.

Les candidats qui ont choisi ce sujet en ont souvent tiré un bon parti ; un candidat s’est ainsi intéressé au calcul des polynômes de Legendre et de Tchebychev au moyen d’un système de calcul formel. Le lien avec les problèmes de plus courte distance et de meilleure approximation pourrait fournir d’autres applications.

Dans ce sujet bien sûr, on peut faire référence aux polynômes orthogonaux, mais ouvre d’autres perspectives telles les courbes de Bézier ou les situations d’approximation en analyse, etc.

414 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

Ce sujet a donné lieu à de bonnes prestations ; le théorème de Fejér a été plusieurs fois proposé, c’est une démarche qui peut être longue si elle n’est pas efficacement conduite.

415 : Exemples d’applications du théorème des accroissements finis et de l’inégalité des accroissements finis pour une fonction d’une ou plusieurs variables réelles.

Ce sujet a souvent donné lieu à des exercices très proches du cours, peu intéressants en soi ; on déplore l’oubli presque systématique des fonctions de plusieurs variables. On pouvait, par exemple, s’intéresser à des suites récurrentes dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 .

421 : Exemples de calcul exact ou de calcul approché de l’intégrale d’une fonction continue sur un segment. Illustration algorithmique.

Proposer une valeur approchée pour une intégrale n’a pas de sens si on ne donne pas une majoration de l’erreur.

427 : Exemples d’étude de fonctions définies par une intégrale.

Plusieurs candidats ont eu de la peine à citer un théorème de changement de variables pour une intégrale simple avec les bonnes hypothèses (ce qui nécessite du soin dans le cas des fonctions continues par morceaux).

437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.

On aimerait ici voir apparaître quelques variables aléatoires à densité !

438 : Exemples de problèmes de dénombrement, utilisation en probabilités.

Ce sujet a donné lieu à un très bon choix d’exercices avec des applications en analyse, probabilités, arithmétique, en plus des problèmes classiques de dénombrement.

438 : Exemples d’étude d’applications linéaires continues et de leur norme.

Le caractère continu et une estimation de la norme de l’application linéaire considérée doivent être le coeur de l’exercice.

440 : Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).

Avec de tels intitulés, il n’est pas inutile de proposer un exercice donnant un sens géométrique clair à la notion de courbure, par exemple démontrer qu’un cercle qui est tangent en un point $M(s_0)$ à un arc birégulier et qui passe par un point $M(s)$ admet pour limite quand s tend vers s_0 le cercle centré au centre de courbure et dont le rayon algébrique est $R(s_0)$. On pourra également proposer les formules usuelles donnant les vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, avec des applications. L’étude des mouvements à accélération centrale a toute sa place ici. On vérifie que la trajectoire de M est plane lorsqu’elle ne passe pas par le centre O . En supposant de plus l’accélération centrale newtonienne, on pourra établir, par exemple à l’aide des formules de Binet, que la trajectoire du point M est incluse dans une conique. Ce dernier point pourra également intervenir utilement dans une leçon sur les coniques.