

Sommaire

Avant-propos	xvii
I Leçons d’algèbre et de géométrie	1
1 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples	3
2 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications	9
3 Permutations d’un ensemble fini, groupe symétrique. Applications	19
4 Nombres complexes de module 1. Racines de l’unité	29
5 Utilisation de groupes en géométrie	39
6 Idéaux d’un anneau commutatif. Exemples	51
7 Anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Applications	61
8 Nombres premiers	71
9 pgcd dans \mathbb{Z} et $\mathbb{K}[X]$	81
10 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes	93
11 Polynômes d’endomorphismes en dimension finie. Applications	103
12 Réduction d’un endomorphisme en dimension finie	115
13 Endomorphismes symétriques d’un espace vectoriel euclidien. Applications	123
14 Matrices symétriques réelles	129
15 Groupe orthogonal d’un espace euclidien de dimension 2, ou 3	135
16 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications	145

iv

17 Formes linéaires, hyperplans, dualité	155
18 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d’une matrice	163
19 Valeurs propres. Recherche et utilisation	175
20 Formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie	185
21 Utilisation des nombres complexes en géométrie	195
22 Barycentres. Applications	209
23 Coniques	217
24 Droites et cercles dans le plan affine euclidien	229
II Leçons d’analyse et de probabilité	243
25 Espaces vectoriels normés de dimension finie	245
26 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie	253
27 Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples	263
28 Séries à termes réels positifs. Applications	275
29 Séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue, semi-convergence	283
30 Comparaison d’une série et d’une intégrale. Applications	295
31 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples	305
32 Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples	315
33 Série de Fourier d’une fonction périodique ; propriétés. Exemples	323
34 Exponentielle complexe	333
35 Exponentielles de matrices. Applications	341
36 Intégrale d’une fonction dépendant d’un paramètre	351
37 La fonction gamma	361
38 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications	371

39	Théorèmes des accroissements finis	379
40	Formules de Taylor pour une fonction d’une variable réelle	389
41	Fonctions convexes d’une variable réelle. Applications	397
42	Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité	407
43	Méthodes de calcul approché d’une intégrale	423
44	Espaces préhilbertiens	435
45	Équations différentielles linéaires d’ordre deux	449
46	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	461
47	Inégalités en analyse et en probabilités	469
48	Étude métrique des courbes planes	479
	Bibliographie	491
	Index	493

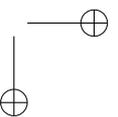
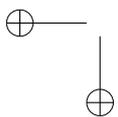
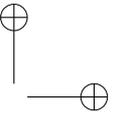
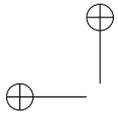


Table des matières

Avant-propos	xvii
I Leçons d’algèbre et de géométrie	1
1 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples	3
1.1 Groupes monogènes, groupes cycliques	3
1.2 Sous-groupes d’un groupe monogène	5
1.3 Théorème de structure des groupes abéliens finis	6
1.4 Questions possibles	7
2 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications	9
2.1 Actions de groupes, orbites et stabilisateurs	9
2.2 L’équation des classes	11
2.3 Exemples d’utilisations des actions de groupes	12
2.4 Questions possibles	16
3 Permutations d’un ensemble fini, groupe symétrique. Applications	19
3.1 Permutations d’un ensemble fini	19
3.2 Décomposition d’une permutation en produits de cycles	20
3.3 Signature d’une permutation	21
3.4 Le groupe alterné	22
3.5 Utilisations du groupe symétrique	23
3.6 Questions possibles	25
4 Nombres complexes de module 1. Racines de l’unité	29
4.1 Racines n -èmes d’un nombre complexe	29
4.2 Les polynômes cyclotomiques	30
4.3 Le nombre π	32
4.4 Les fonctions argument principal et logarithme	33
4.5 Le théorème de relèvement	34
4.6 Mesure des angles	35
4.7 Questions possibles	36

5	Utilisation de groupes en géométrie	39
5.1	Espace affine associé à un espace vectoriel réel	39
5.2	Le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ en dimension finie	41
5.3	Orientation d'un espace affine réel	43
5.4	Groupes de bijections affines conservant un ensemble	43
5.5	Isométries affines d'un espace euclidien	44
5.6	Groupe des angles orientés dans le plan euclidien	44
5.7	Le groupe des isométries du cube	45
5.8	Sous groupes finis de $Is^+(\mathcal{E})$ pour \mathcal{E} de dimension 2 ou 3	46
5.9	Questions possibles	47
6	Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples	51
6.1	Généralités sur les idéaux de \mathbb{A}	51
6.2	Congruences, anneaux quotients, idéaux premiers, maximaux	52
6.3	Anneaux principaux	53
6.4	pgcd dans un anneau principal	54
6.5	Éléments premiers entre eux dans un anneau principal	54
6.6	Idéal annulateur et polynôme minimal	55
6.7	Questions possibles	58
7	Anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Applications	61
7.1	Congruences dans \mathbb{Z} , anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	61
7.2	Le groupe multiplicatif $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^\times$, fonction indicatrice d'Euler	62
7.3	Le théorème chinois	63
7.4	Systèmes d'équations diophantiennes	65
7.5	$\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$ est cyclique pour $p \geq 3$ premier	66
7.6	Questions possibles	67
8	Nombres premiers	71
8.1	L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers	71
8.2	Décomposition en produit de facteurs premiers	72
8.3	Théorèmes de Legendre et de Bertrand	73
8.4	Quelques tests de primalité	74
8.5	Nombres de Carmichael	75
8.6	La fonction de Möbius	75
8.7	Un théorème de Cesàro	76
8.8	Questions possibles	77
9	pgcd dans \mathbb{Z} et $\mathbb{K}[X]$	81
9.1	pgcd dans un anneau euclidien	81
9.2	Éléments premiers entre eux. Les théorèmes de Bézout et de Gauss	83
9.3	Le théorème chinois	84
9.4	Applications	85
9.5	Questions possibles	88

10 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes	93
10.1 Le théorème de d’Alembert-Gauss	93
10.2 Racines n -èmes d’un nombre complexe	94
10.3 Localisation des racines d’un polynôme complexe	95
10.4 Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles	96
10.5 Nombres algébriques	97
10.6 Polynômes d’interpolation de Lagrange et méthodes de Newton-Cotes	98
10.7 Questions possibles	100
11 Polynômes d’endomorphismes en dimension finie. Applications	103
11.1 L’algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$	103
11.2 Polynômes annulateurs, polynôme minimal	103
11.3 Le théorème de Cayley-Hamilton	104
11.4 Le théorème de décomposition des noyaux	105
11.5 La décomposition de Dunford	106
11.6 Un algorithme pour obtenir la décomposition de Dunford	108
11.7 Endomorphismes semi-simples	108
11.8 Applications	109
11.9 Questions possibles	111
12 Réduction d’un endomorphisme en dimension finie	115
12.1 Diagonalisation	115
12.2 Trigonalisation	116
12.3 Réduction de Jordan	116
12.4 Réduction des matrices symétriques réelle	117
12.5 Réduction des matrices orthogonales réelle	117
12.6 Réduction des matrices normales	118
12.7 Propriétés topologiques de l’ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	119
12.8 Questions possibles	120
13 Endomorphismes symétriques d’un espace vectoriel euclidien. Applications	123
13.1 Endomorphismes symétriques	123
13.2 Réduction des endomorphismes symétriques	124
13.3 Endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs	124
13.4 Réduction des endomorphismes symétriques et des formes quadra- tiques sur \mathbb{R}^n	125
13.5 Quelques applications du théorème spectral	125
13.6 Questions possibles	126
14 Matrices symétriques réelles	129
14.1 Réduction des matrices symétriques réelles	129
14.2 Rayon spectral	130
14.3 Formes quadratiques	130
14.4 Questions possibles	132

15 Groupe orthogonal d’un espace euclidien de dimension 2, ou 3	135
15.1 Isométries en dimension 2	135
15.2 Isométries en dimension 3	138
15.3 Questions possibles	141
16 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications	145
16.1 Rang d’un système de vecteurs ou d’une application linéaire	145
16.2 Rang d’une matrice	147
16.3 Rang et systèmes linéaires	148
16.4 Rang et dualité	150
16.5 Rang d’une forme quadratique	151
16.6 Questions possibles	152
17 Formes linéaires, hyperplans, dualité	155
17.1 L’espace dual E^*	155
17.2 Exemples dans $\mathbb{K}_n[X]$	156
17.3 Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	156
17.4 Hyperplans	157
17.5 Orthogonalité	157
17.6 Transposition	159
17.7 Questions possibles	161
18 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d’une matrice	163
18.1 Matrices de dilatation et de transvection	163
18.2 Méthode des pivots de Gauss	165
18.3 Décomposition LR (méthode de Crout)	167
18.4 Décomposition LD^tL	169
18.5 Décomposition de Cholesky des matrices symétriques réelles définies positives	169
18.6 Méthode d’élimination de Gauss-Jordan	170
18.7 Résolution des systèmes de Cramer à coefficients entiers	171
18.8 Questions possibles	172
19 Valeurs propres. Recherche et utilisation	175
19.1 Définitions et premières propriétés	175
19.2 Valeurs propres des endomorphismes nilpotents	176
19.3 Localisation des valeurs propres dans le cas réel ou complexe	177
19.4 Rayon spectral des matrices complexes	178
19.5 Calcul approché des valeurs propres	179
19.6 Polynômes orthogonaux	180
19.7 Questions possibles	181
20 Formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie	185
20.1 Théorème de réduction de Gauss	186
20.2 Orthogonalité, noyau et rang	187
20.3 Signature d’une forme quadratique réelle en dimension finie	188

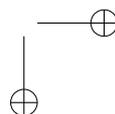
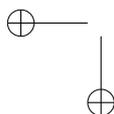
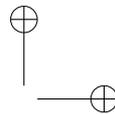
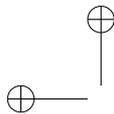
20.4	Quadriques dans \mathbb{R}^n	189
20.5	Orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques	190
20.6	Questions possibles	191
21	Utilisation des nombres complexes en géométrie	195
21.1	Le plan affine euclidien et le plan d’Argand-Cauchy	195
21.2	Utilisation du module et des arguments d’un nombre complexe	196
21.3	Le triangle dans le plan complexe	198
21.4	Centre de gravité, orthocentre, cercles inscrit et circonscrit	201
21.5	Droites, cercles, coniques dans le plan complexe	203
21.6	Inversions	206
21.7	Quelques questions possibles	207
22	Barycentres. Applications	209
22.1	Généralités	209
22.2	Coordonnées barycentriques	210
22.3	Ensembles convexes	211
22.4	Le théorème de Krein-Milman	213
22.5	Matrices bistochastiques	214
22.6	Questions possibles	214
23	Coniques	217
23.1	Définition algébrique des coniques	217
23.2	Définition par directrice, foyer et excentricité des coniques	219
23.3	Définition bifocale des coniques à centre	221
23.4	Définition par foyers et cercle directeur des coniques à centre	222
23.5	Lieu orthoptique d’une conique	222
23.6	Cocyclicité de 4 points sur une conique	224
23.7	Questions possibles	224
24	Droites et cercles dans le plan affine euclidien	229
24.1	Droites. Définitions et propriétés	229
24.2	Cercles. Définitions et propriétés	231
24.3	Droites et cercles dans le plan complexe	233
24.4	Puissance d’un point par rapport à un cercle	235
24.5	Inversions	237
24.6	Questions possibles	238
II	Leçons d’analyse et de probabilité	243
25	Espaces vectoriels normés de dimension finie	245
25.1	Applications linéaires continues, normes équivalentes	245
25.2	Espaces vectoriels normés de dimension finie	246
25.3	Quelques applications	248
25.4	Questions possibles	249

26 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie	253
26.1 Suites dans un espace vectoriel normé	253
26.2 Suites numériques convergentes	255
26.3 Suites réelles monotones, adjacentes	257
26.4 Suites de matrices et rayon spectral	258
26.5 Sous-groupes additifs de \mathbb{R}	259
26.6 Sous-groupes additifs de \mathbb{R}^n	260
26.7 Questions possibles	260
27 Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités.	
Exemples	263
27.1 Suites et séries dans un espace normé	263
27.2 Convergence au sens de Cesàro	265
27.3 Suite et séries de fonctions	265
27.4 Fonction génératrice d’une variable aléatoire discrète	267
27.5 Convergence de variables aléatoires	268
27.6 Questions possibles	270
28 Séries à termes réels positifs. Applications	275
28.1 Séries convergentes ou divergentes	275
28.2 Cas des séries à termes positifs	276
28.3 Comparaison des séries à termes positifs	277
28.4 Produit de Cauchy de deux séries	280
28.5 Questions possibles	281
29 Séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue, semi-convergence	283
29.1 Séries convergentes ou divergentes	283
29.2 Séries alternées	285
29.3 Séries absolument convergentes	285
29.4 Produit de deux séries	286
29.5 Séries doubles	287
29.6 La transformation d’Abel	288
29.7 Questions possibles	289
30 Comparaison d’une série et d’une intégrale. Applications	295
30.1 Comparaison de $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$	295
30.2 Comparaison de $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ et $\int_a^b f(t) dt$	299
30.3 Utilisation des permutations de \sum et \int	300
30.4 Questions possibles	301
31 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples	305
31.1 Convergence simple, uniforme et normale	305
31.2 Propriétés de la somme d’une série de fonctions convergente	307
31.3 Permutation des signes \sum et \int	309

31.4 Questions possibles	310
32 Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme.	
Exemples	315
32.1 Rayon de convergence d’une série entière	315
32.2 Opérations sur les séries entières	317
32.3 Fonctions développables en série entière	318
32.4 Séries entières et équations différentielles	320
32.5 Questions possibles	321
33 Série de Fourier d’une fonction périodique ; propriétés. Exemples	323
33.1 L’espace préhilbertien \mathcal{D} de Dirichlet	323
33.2 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier sur \mathcal{D}	323
33.3 L’inégalité de Bessel et l’égalité de Parseval	325
33.4 Convergence ponctuelle des séries de Fourier sur \mathcal{D}	326
33.5 Questions possibles	328
34 Exponentielle complexe	333
34.1 La fonction exponentielle complexe	333
34.2 Les fonctions trigonométriques et hyperboliques	334
34.3 Le nombre π	335
34.4 Les fonction tan et arctan	336
34.5 Fonctions argument principal et logarithme	337
34.6 Mesure des angles	338
34.7 Questions possibles	338
35 Exponentielles de matrices. Applications	341
35.1 Séries matricielles	341
35.2 L’exponentielle matricielle. Propriétés	342
35.3 Utilisation de la décomposition de Dunford	344
35.4 Surjectivité et injectivité de l’exponentielle matricielle	344
35.5 Questions possibles	346
36 Intégrale d’une fonction dépendant d’un paramètre	351
36.1 Intégrale fonction de ses bornes	351
36.2 Théorèmes élémentaires	352
36.3 Théorèmes de convergence dominée	353
36.4 Produit de convolution	354
36.5 Questions possibles	355
37 La fonction gamma	361
37.1 Généralités sur la fonction gamma	361
37.2 Formules d’Euler, de Wallis, de Legendre et de Stirling	361
37.3 Continuité et dérivabilité de gamma	362
37.4 Prolongement de la fonction gamma	363
37.5 La formule des compléments	363
37.6 Fonction Béta	364
37.7 Calcul de certaines intégrales à l’aide de Γ	364

37.8	Loi Gamma	365
37.9	Questions possibles	367
38	Théorème des valeurs intermédiaires. Applications	371
38.1	Le théorème des valeurs intermédiaires	371
38.2	Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires	373
38.3	Fonctions réciproques	374
38.4	Applications du théorème des valeurs intermédiaires	374
38.5	Questions possibles	375
39	Théorèmes des accroissements finis	379
39.1	Le théorème de Rolle sur un espace vectoriel normé	379
39.2	Théorème et inégalité des accroissements finis	380
39.3	Quelques applications du théorème des accroissements finis	381
39.4	Questions possibles	386
40	Formules de Taylor pour une fonction d’une variable réelle	389
40.1	La formule de Taylor-Lagrange	389
40.2	Le théorème de Taylor-Young	389
40.3	Formule de Taylor avec reste intégral	390
40.4	Applications de la formule de Taylor-Lagrange	391
40.5	Applications de la formule de Taylor avec reste intégral	394
40.6	Questions possibles	394
41	Fonctions convexes d’une variable réelle. Applications	397
41.1	Fonctions convexes	397
41.2	Régularité des fonctions convexes	399
41.3	Inégalités de convexité	402
41.4	Questions possibles	405
42	Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité	407
42.1	Fonctions différentiables	407
42.2	Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles	409
42.3	Théorème et inégalité des accroissements finis	411
42.4	Différentielles d’ordre supérieur	412
42.5	Formule de Taylor-Lagrange	414
42.6	Différentiabilité et problèmes d’extremum	415
42.7	Questions possibles	416
43	Méthodes de calcul approché d’une intégrale	423
43.1	Formules de quadrature	423
43.2	Méthodes des rectangles et des points milieux	424
43.3	Les méthodes de Newton-Cotes	425
43.4	La méthode des trapèzes et de Simpson	427
43.5	La formule d’Euler-Maclaurin	429
43.6	Méthode de Gauss	431
43.7	Questions possibles	433

44	Espaces préhilbertiens	435
44.1	Espaces préhilbertiens	435
44.2	Orthogonalisation de Gram-Schmidt	437
44.3	Meilleure approximation dans un espace préhilbertien	438
44.4	Inégalité de Bessel et égalité de Parseval	439
44.5	Déterminants de Gram	441
44.6	Les théorèmes de Müntz	443
44.7	Questions possibles	445
45	Équations différentielles linéaires d’ordre deux	449
45.1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	449
45.2	Méthode de Lagrange	451
45.3	Équations différentielles linéaires d’ordre 2	452
45.4	Équations différentielles linéaires à coefficients développables en série entière	454
45.5	Racines des solutions d’une équation différentielle linéaire d’ordre 2	456
45.6	Problèmes aux limites	457
45.7	Questions possibles	458
46	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	461
46.1	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	461
46.2	L’exponentielle d’une matrice	463
46.3	Un algorithme de calcul de l’exponentielle d’une matrice	465
46.4	Equations différentielles linéaires d’ordre n	465
46.5	Questions possibles	466
47	Inégalités en analyse et en probabilités	469
47.1	Inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski	469
47.2	Inégalité des accroissements finis	470
47.3	Inégalités de convexité	471
47.4	L’inégalité de Bessel	474
47.5	Inégalités de Bienaymé-Tchebychev	474
47.6	Questions possibles	475
48	Étude métrique des courbes planes	479
48.1	Arcs paramétrés, arcs géométriques dans \mathbb{R}^2	479
48.2	Tangente à un arc paramétré	480
48.3	Longueur d’un arc paramétré	482
48.4	Vecteur unitaire tangent, normal. Courbure	483
48.5	L’inégalité isopérimétrique	485
48.6	Questions possibles	486
	Bibliographie	491
	Index	493



Avant-propos

L’objectif de cet ouvrage, qui est le premier d’une série de deux livres, est de proposer aux candidats à l’agrégation interne de mathématiques des outils pour préparer la première épreuve orale de ce concours.

Pour cette épreuve, le candidat doit être capable de construire un plan sur une question mathématique précise en analysant et mettant en œuvre cette question du point de vue de l’enseignement. Des applications pertinentes des théorèmes énoncés sont attendus.

Un tel travail nécessite une solide préparation. Sur chaque sujet, il faut être capable rassembler et structurer ses connaissances en vue d’exposer les notions essentielles du thème donné, de proposer des applications, des exemples pertinents ainsi que des exercices formateurs et adaptés. Dans les rapports de jury, il est précisé que « les candidats sont encouragés à faire de nombreux exercices d’entraînement afin d’acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu’ils n’ont pas l’occasion d’enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés. À ce propos, il est vivement déconseillé d’utiliser sans recul les ouvrages livrant des leçons « prêtes à l’emploi ». D’une part, parce que le but de l’épreuve orale est précisément de montrer sa propre capacité à structurer l’exposé d’une question donnée, ce qui suppose souvent de comparer plusieurs ouvrages et de faire des choix réfléchis, d’autre part, parce que le jury connaît parfaitement ces ouvrages, ce qui l’amène souvent à s’assurer de la bonne maîtrise par les candidats des passages délicats et bien identifiés par lui. Enfin, la préparation des candidats à l’oral ne doit pas se limiter à la seule étude des sujets proposés car les questions du jury portent sur tout le programme et abordent des notions connexes. »

Le but de ces deux livres est de répondre à ces exigences. On pourra consulter les livres de Jean-François Dantzer et Jean-Etienne Rombaldi dans la même collection pour des démonstrations précises avec compléments de quasiment tous les résultats présentés dans les leçons.

Pour chaque épreuve, on propose deux sujets au candidat qui doit choisir l’un d’eux, il dispose alors d’un temps de préparation de trois heures à l’issue de laquelle il présente son plan en 15 minutes maximum, puis propose au jury de développer en 15 minutes maximum une question importante et significative de son plan, il s’agit en général d’un théorème central du plan proposé, mais cela peut être un exercice qui utilise plusieurs résultats du thème donné. Là encore le jury laisse exposer le candidat sans intervenir. Enfin, pour le temps restant, en moyenne 15 à 20 minutes, le jury pose des questions au candidat. Les premières questions visent en général à

préciser quelques points qui peuvent sembler obscurs (coquilles, incohérences, ...) sans souci de déstabilisation. Ensuite, en fonction de la teneur du plan, viennent des questions qui ont pour but de vérifier que le sujet est correctement dominé.

Chaque leçon proposée dans ce livre se termine par une série de questions que pourrait proposer le jury.

Les plans proposés ne sont certainement pas des modèles (il n’y en a pas), ce sont des bases sur lesquelles chacun élaborera son plan en fonction de ses connaissances et de ses capacités. Pour certaines des leçons proposées il y a beaucoup de résultats avec une rédaction concise mais précise, ce qui rend l’exposé en 15 minutes impossible. Le candidat devra construire sur cette base un plan respectant la contrainte de temps en utilisant des raccourcis (par exemple, « s.s.i » pour « si, et seulement si », « th. » pour « théorème », ...), en regroupant un théorème et une définition, en utilisant un tableau synthétique, ..., tout cela sans excès. Le jury précise qu’il est inutile de détailler les notations et définitions trop élémentaires, et de s’attarder sur les prérequis, ce que je ne fais pas pour ce livre.

Il y a, pour la session 2019, 37 sujets d’algèbre et géométrie et 45 sujets d’analyse et probabilités pour la première épreuve orale d’exposé. J’ai décidé de rédiger des plans pour 24 leçons d’algèbre et 24 leçons d’analyse.

Certaines leçons se retrouvent pour l’épreuve d’oral de l’agrégation externe avec un même titre ou un titre légèrement différent. Il est entendu que pour l’agrégation externe le niveau est supérieur, mais les leçons proposées dans cet ouvrage peuvent constituer une base. Il s’agit des leçons suivantes où est indiqué entre parenthèses et en italique la leçon d’agrégation externe correspondante avec son numéro.

- Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications. *(101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications).*
- Permutations d’un ensemble fini, groupe symétrique. Applications. *(105 Groupe des permutations d’un ensemble fini. Applications).*
- Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l’unité. Applications. *(102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l’unité. Applications).*
- Utilisation des groupes en géométrie. *(183 Utilisation des groupes en géométrie).*
- Idéaux d’un anneau commutatif. Exemples. *(122 Anneaux principaux. Applications).*
- Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications. *(120 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications).*
- Nombres premiers. Propriétés et applications. *(121 Nombres premiers. Applications).*
- PGCD dans \mathbb{Z} et $\mathbb{K}[X]$ où \mathbb{K} est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications. *(142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications).*
- Racines d’un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines. *(144 Racines d’un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications).*
- Polynômes d’endomorphismes en dimension finie. Applications. *(153 Polynômes d’endomorphisme en dimension nie. Réduction d’un endomorphisme en dimension finie. Applications).*

- Déterminants. Applications. (152 *Déterminant. Exemples et applications*).
- Dimension d’un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d’une famille de vecteurs. (151 *Dimension d’un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications*).
- Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples. (159 *Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications*).
- Systèmes d’équations linéaires. Applications. (162 *Systèmes d’équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques*).
- Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications. (155 *Endomorphismes diagonalisables en dimension finie*).
- Réduction d’un endomorphisme d’un espace vectoriel de dimension finie. Applications. (153 *Polynômes d’endomorphisme en dimension finie. Réduction d’un endomorphisme en dimension finie. Applications*).
- Matrices symétriques réelles. (158 *Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes*).
- Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d’un espace euclidien. Applications géométriques. (171 *Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications*).
- Utilisation des nombres complexes en géométrie. (182 *Applications des nombres complexes à la géométrie*).
- Barycentres. Applications. (181 *Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications*).
- Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie. (223 *Suites numériques. Convergence, valeurs d’adhérence. Exemples et applications*).
- Exponentielles de matrices. Applications. (156 *Exponentielles de matrices. Applications*).
- Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (230 *Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples*).
- Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples. (243 *Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications*).
- Série de Fourier d’une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples. (246 *Séries de Fourier. Exemples et applications*).
- Applications linéaires continues, normes associées. Exemples. (208 *Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples*).
- Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ; écriture matricielle. Exemples. (221 *Équations différentielles linéaires. Systèmes d’équations différentielles linéaires. Exemples et applications*).