Sommaire

Table des matières

Avant-propos

L'objectif de cet ouvrage, qui est le premier d'une série de deux livres, est de proposer aux candidats à l'agrégation interne de mathématiques des outils pour préparer la première épreuve orale de ce concours.

Pour cette épreuve, le candidat doit être capable de construire un plan sur une question mathématique précise en analysant et mettant en œuvre cette question du point de vue de l'enseignement. Des applications pertinentes des théorèmes énoncés sont attendus.

Un tel travail nécessite une solide préparation. Sur chaque sujet, il faut être capable rassembler et structurer ses connaissances en vue d'exposer les notions essentielles du thème donné, de proposer des applications, des exemples pertinents ainsi que des exercices formateurs et adaptés. Dans les rapports de jury, il est précisé que « les candidats sont encouragés à faire de nombreux exercices d'entraînement afin d'acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu'ils n'ont pas l'occasion d'enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés. À ce propos, il est vivement déconseillé d'utiliser sans recul les ouvrages livrant des leçons « prêtes à l'emploi ». D'une part, parce que le but de l'épreuve orale est précisément de montrer sa propre capacité à structurer l'exposé d'une question donnée, ce qui suppose souvent de comparer plusieurs ouvrages et de faire des choix réfléchis, d'autre part, parce que le jury connaît parfaitement ces ouvrages, ce qui l'amène souvent à s'assurer de la bonne maîtrise par les candidats des passages délicats et bien identifiés par lui. Enfin, la préparation des candidats à l'oral ne doit pas se limiter à la seule étude des sujets proposés car les questions du jury portent sur tout le programme et abordent des notions connexes. »

Le but de ces deux livres est de répondre à ces exigences. On pourra consulter les livres de Jean-François Dantzer et Jean-Etienne Rombaldi dans la même collection pour des démonstrations précises avec compléments de quasiment tous les résultats présentés dans les leçons.

Pour chaque épreuve, on propose deux sujets au candidat qui doit choisir l'un d'eux, il dispose alors d'un temps de préparation de trois heures à l'issue de laquelle il présente son plan en 15 minutes maximum, puis propose au jury de développer en 15 minutes maximum une question importante et significative de son plan, il s'agit en général d'un théorème central du plan proposé, mais cela peut être un exercice qui utilise plusieurs résultats du thème donné. Là encore le jury laisse exposer le candidat sans intervenir. Enfin, pour le temps restant, en moyenne 15 à 20 minutes, le jury pose des questions au candidat. Les premières questions visent en général à préciser quelques points qui peuvent sembler obscurs (coquilles, incohérences, ...) sans souci de déstabilisation. Ensuite, en fonction de la teneur du plan, viennent des questions qui ont pour but de vérifier que le sujet est correctement dominé.

Chaque leçon proposée dans ce livre se termine par une série de questions que pourrait proposer le jury.

Les plans proposés ne sont certainement pas des modèles (il n'y en a pas), ce sont des bases sur lesquelles chacun élaborera son plan en fonction de ses connaissances et de ses capacités. Pour certaines des leçons proposées il y a beaucoup de résultats avec une rédaction concise mais précise, ce qui rend l'exposé en 15 minutes impossible. Le candidat devra construire sur cette base un plan respectant la contrainte de temps en utilisant des raccourcis (par exemple, « s.s.i » pour « si, et seulement si », « th. » pour « théorème », ...), en regroupant un théorème et une définition, en utilisant un tableau synthétique, ..., tout cela sans excès. Le jury précise qu'il est inutile de détailler les notations et définitions trop élémentaires, et de s'attarder sur les prérequis, ce que je ne fais pas pour ce livre.

Il y a, pour la session 2019, 37 sujets d'algèbre et géométrie et 45 sujets d'analyse et probabilités pour la première épreuve orale d'exposé. J'ai décidé de rédiger des plans pour 24 leçons d'algèbre et 24 leçons d'analyse.

Certaines leçons se retrouvent pour l'épreuve d'oral de l'agrégation externe avec un même titre ou un titre légèrement différent. Il est entendu que pour l'agrégation externe le niveau est supérieur, mais les leçons proposées dans cet ouvrage peuvent constituer une base. Il s'agit des leçons suivantes où est indiqué entre parenthèses et en italique la leçon d'agrégation externe correspondante avec son numéro.

— Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications. *(101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications).*

— Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications. *(105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications).*

— Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications. *(102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications).*

— Utilisation des groupes en géométrie. *(183 Utilisation des groupes en géométrie).*

— Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples. *(122 Anneaux principaux. Applications).*

— Anneaux Z/nZ. Applications. *(120 Anneaux Z/nZ. Applications).*

— Nombres premiers. Propriétés et applications. *(121 Nombres premiers. Applications).*

— PGCD dans Z et K[X] où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications. *(142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications).*

— Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines. *(144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications).*

— Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications. *(153 Polynômes d'endomorphisme en dimension nie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications).*

— Déterminants. Applications. *(152 Déterminant. Exemples et applications).*

— Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs. *(151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications).*

— Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples. *(159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications).*

— Systèmes d'équations linéaires. Applications. *(162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques).*

— Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications. *(155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie).*

— Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. *(153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications).*

— Matrices symétriques réelles. *(158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes).*

— Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques. *(171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications).*

— Utilisation des nombres complexes en géométrie. *(182 Applications des nombres complexes à la géométrie).*

— Barycentres. Applications. *(181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications).*

— Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie. *(223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications).*

— Exponentielles de matrices. Applications. *(156 Exponentielles de matrices. Applications).*

— Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. *(230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples).*

— Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples. *(243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications).*

— Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples. *(246 Séries de Fourier. Exemples et applications).*

— Applications linéaires continues, normes associées. Exemples. *(208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples).*

— Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ; écriture matricielle. Exemples. *(221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications).*