Exercices et problèmes supplémentaires ou modifiés pour l'Agrégation de Mathématiques

Jean-Étienne ROMBALDI

11 septembre 2021

Table des matières

Première partie

Exercices et problèmes d'analyse

Chapitre 1

Espaces normés

Problème 1.1. Opérateurs de Volterra

Pour tout intervalle réel I non réduit à un point, on désigne par $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Lorsque $I = [a, b]$ est un segment, on dispose sur l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ des normes usuelles :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \ \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt, \ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt}$$

cette dernière norme étant déduite du produit scalaire défini sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ par :

$$\forall (f, g) \in \left(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})\right)^2, \ \langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

Pour tous réels $a < b$ et $c < d$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$.

– I – Opérateurs de Volterra

Pour cette partie, $a < b$ sont deux réels et E est l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

À toute fonction $K \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$, on associe les applications T_K et T_K^* définies par :

$$T_K(f)(x) = \int_a^x f(t)\, K(t, x)\, dt \ T_K^*(f)(x) = \int_x^b f(t)\, K(x, t)\, dt$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [a, b]$. On dit que T_K est un opérateur de Volterra de noyau K.

Pour K constante égale à 1 sur $[0, 1]^2$, on notera simplement T l'opérateur de Volterra correspondant et T^* l'opérateur T_K^*, soit :

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [a, b], \ T(f)(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \ T^*(f)(x) = \int_x^b f(t)\, dt$$

1. Montrer que l'application T_K est un endomorphisme de E.
2. Montrer que T_K^* est l'unique endomorphisme de E tel que pour toutes fonctions f, g dans E, on ait $\langle T_K(f) \mid g \rangle = \langle f \mid T_K^*(g) \rangle$ (T_K^* est l'opérateur adjoint de T_K).
3. On se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec $\|T_K\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\, dt$.
   (a) Monter le résultat pour K à valeurs positives.
   (b) Montrer que l'opérateur T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec $\|T_K\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$.
   (c) Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que :
   $$\left\|T_{|K|}\right\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\, dt = \int_a^{x_0} |K(t,x_0)|\, dt$$
   (d) On désigne par $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ et par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b],\ f_n(t) = \frac{K(t,x_0)}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n}$$
   Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} T_K(f_n)(x_0) = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$ et conclure.
4. On suppose que K est à valeurs positives et on se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec $\|T_K\|_1 = \sup\limits_{x \in [a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$.
   (a) Montrer que l'opétateur T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec $\|T_K\|_1 \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$.
   (b) Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que $\sup\limits_{x \in [a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt = \int_{x_0}^b K(x_0,t)\, dt$.
   (c) Montrer que $\|T_K\|_1 = \sup\limits_{x \in [a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$.
5. Montrer que l'opérateur T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ et que $\|T_K\|_2 \leq \dfrac{b-a}{\sqrt{2}} \|K\|_\infty$, où $\|K\|_\infty = \sup\limits_{(x,t) \in [a,b]^2} |K(x,t)|$.
6. On se propose de montrer que l'opérateur T_K n'a pas de valeur propre réelle non nulle.
   (a) On suppose que $K = 1$. Montrer que T n'a pas de valeur propre réelle.
   (b) On revient au cas général. Comme pour $K = 0$ le résultat est évident, on suppose que $K \neq 0$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une fonction $f \in E \setminus \{0\}$ tels que $T_K(f) = \lambda f$.

i. Montrer que la fonction $g = T\left(f^2\right)$ est croissante et qu'il existe un réel α dans $[a, b[$ tel que $g(x) = 0$ pour tout $x \in [a, \alpha]$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, b]$.

ii. Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que $\lambda^2 g'(x) \leq \beta g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

iii. Conclure.

(c) On suppose que $[a, b] = [0, 1]$ et T_K est l'opérateur défini par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T_K(f)(x) = \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt$$

(opérateur de convolution par la fonction cos).

i. Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $T_K(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

ii. Montrer que T_K n'a pas de valeur propre.

7. Montrer que si K_1 et K_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]^2$, alors la composée $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ est un opérateur de Volterra sur E.

8. On dit qu'un réel λ est une valeur spectrale de T_K si $\lambda Id - T_K$ n'est pas bijective. En notant $\sigma(T_K)$ l'ensemble des valeurs spectrales de T_K (le spectre de T_K), on se propose de montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application T_K^n est un opérateur de Volterra, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $K_n \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$ telle que :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [a,b],\ T_K^n(f)(x) = \int_a^x f(t)\,K_n(t,x)\,dt$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |K_n(x,y)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!}|x-y|^{n-1}$$

(c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\|T_K^n\|_2 \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b-a)^n}{n!}$$

(d) Montrer que la série $\sum T_K^n$ est convergente dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_2)$, que $Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et donner une expression de $(Id - T_K)^{-1}$.

(e) Montrer que, pour tout réel non nul λ, l'opérateur $\lambda Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et retrouver le fait que T_K n'a pas de valeur propre non nulle.

(f) Montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.

9. Pour cette question et les suivantes, $K = 1$.

(a) Montrer que, pour tout $f \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on a $T^n(f)(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$, la fonction $T^n(f)$ étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$.

(b) Calculer $\|T^n\|_\infty$ et $\|T^n\|_1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Donner une expression de $(\lambda Id - T)^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

(d) Montrer que, pour tout $f \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a,b]$, on a $(T^*)^n(f)(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$.

(e) Montrer que, pour tout $f \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a,b]$, on a $T^n(f)(x) + (T^*)^n(f)(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{|t-x|^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$.

10. Soit H un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par T. Montrer que $H = \{0\}$.

11. Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $f(a) = 0$ et φ la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ par $\varphi(t) = \dfrac{\pi}{2(b-a)\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)}$.

(a) Montrer que la fonction φ se prolonge par continuité en b et que la fonction $\varphi \cdot f$ se prolonge par continuité en a.

(b) Montrer que $\varphi^2(t) + \varphi'(t) = -\dfrac{\pi^2}{4(b-a)^2}$ pour tout $t \in\,]a,b[$.

(c) Montrer que $\|f' - \varphi \cdot f\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \dfrac{\pi^2}{4(b-a)^2}\|f\|_2^2$.

(d) En déduire que $\|f\|_2 \leq \dfrac{2(b-a)}{\pi}\|f'\|_2$, l'égalité étant réalisée uniquement pour les fonctions $f : t \in [a,b] \mapsto \lambda \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t-a}{b-a}\right)$, où λ est une constante réelle.

12. Calculer $\|T\|_2$.

– II – L'opérateur $S = T \circ T^*$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

Pour cette partie, $I = [0,1]$ et E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On désigne par S l'opérateur $S = T \circ T^*$.

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $g = S(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ avec $g(0) = g'(1) = 0$.
2. Montrer que, pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a $S(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(t,x)\, f(t)\,dt$.
3. Montrer que, $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$ et $\|S\|_2 = \|T\|_2^2$.
4. Montrer que l'opérateur S est symétrique défini positif.

5. Montrer que si S admet des valeurs propres réelles, elles sont nécessairement strictement positives.
6. Montrer que les valeurs propres réelles de S sont les termes de la suite $\left(\mu_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{2}{(2n+1)\,\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_n = \mu_n^2$ est la droite dirigée par $f_n : t \in [0,1] \mapsto \sin\left(\dfrac{t}{\mu_n}\right)$.
7. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans E.
8. Calculer $\|f_n\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On désigne par $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormée définie par :

$$\varphi_n = \frac{1}{\|f_n\|} f_n = \sqrt{2}\sin\left((2n+1)\,\frac{\pi}{2}t\right)$$

   À toute fonction $f \in E$ on associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients de Fourier relative au système $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_n(f) = \langle f \mid \varphi_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Soient $f \in E$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{2}{\pi}x\right) & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ f\left(2 - \frac{2}{\pi}x\right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

   et $g(0) = g(\pi) = 0$. Calculer les coefficients de Fourier de g.
10. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)^2 = \|f\|_2^2$ pour tout $f \in E$.
11. Montrer que, pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n(S(f)) = \lambda_n c_n(f)$ et en déduire que :

$$\|S(f)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 c_n(f)^2 = \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n(f)^2}{(2n+1)^4} \tag{1.1}$$

12. Que déduit-on pour $f = 1$?
13. En utilisant (1.1) retrouver les valeurs de $\|S\|_2$ et.$\|T\|_2$.
14. Soit K la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $K(t,x) = \min(t,x)$.
    (a) Montrer que K est continue sur $[0,1]^2$.
    (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 = \int_0^1\int_0^1 K(t,x)^2\,dtdx$.
    (c) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Solution.

– I – Opérateurs de Volterra

1. Pour $x \in \left]a,b\right]$ le changement de variable $t = a + \theta(x-a)$ avec $0 \leq \theta \leq 1$ donne :

$$T_K(f)(x) = (x-a)\int_0^1 f(a+\theta(x-a))\, K(a+\theta(x-a), x)\, d\theta$$

ce résultat étant encore valable pour $x = a$.
La fonction $(\theta, x) \mapsto f(a+\theta(x-a))\, K(a+\theta(x-a), x)$ est continue sur $[0,1] \times [a,b]$ et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction $T_K(f)$ est continue sur $[a,b]$, c'est-à-dire que $T_K(f) \in E$. De la linéarité de l'intégrale, on déduit que T_K est linéaire.

2. Comme pour l'opérateur T_K, on vérifie que $T_K^* \in \mathcal{L}(E)$. Pour f, g dans E, on déduit du théorème de Fubini sur un triangle (roblème **??**) que :

$$\begin{aligned}
\langle T_K(f) \mid g\rangle &= \int_a^b T_K(f)(x)\, g(x)\, dt = \int_a^b \left(\int_a^x f(t)\, K(t,x)\, dt\right) g(x)\, dx \\
&= \int_a^b f(t) \left(\int_t^b g(x)\, K(t,x)\, dx\right) dt = \int_a^b f(t)\, T_K^*(g)(t)\, dt \\
&= \langle f \mid T_K^*(g)\rangle
\end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\langle T_K(f) \mid g\rangle = \langle f \mid u(g)\rangle$ pour tout $(f,g) \in E^2$, on a alors $\langle f \mid T_K^*(g)\rangle = \langle f \mid u(g)\rangle$ ou encore $\langle f \mid (T_K^* - u)(g)\rangle = 0$ pour tout $(f,g) \in E^2$, ce qui équivaut à $u = T_K^*$ puisque $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

3.

   (a) Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}
|T_K(f)(x)| &= \left|\int_a^x f(t)\, K(t,x)\, dt\right| \leq \left(\int_a^x K(t,x)\, dt\right) \|f\|_\infty \\
&\leq \left(\sup_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\, dt\right) \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

   donc $\|T_K(f)\|_\infty \leq \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\, dt\right) \|f\|_\infty$ et l'application linéaire T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec $\|T_K\|_\infty \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\, dt$.
   Comme $\|T_K(1)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |T_K(1)(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\, dt$, on en déduit que $\|T_K\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\, dt$. En particulier, pour $K = 1$, on a $\|T\|_\infty = b - a$.

   (b) Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}
|T_K(f)(x)| &= \left|\int_a^x f(t)\, K(t,x)\, dt\right| \leq \left(\int_a^x |f(t)|\, |K(t,x)|\, dt\right) \\
&= T_{|K|}(|f|)(x)
\end{aligned}$$

donc :

$$\|T_K(f)\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}(|f|)\right\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty \||f|\|_\infty = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty \|f\|_\infty$$

et $\|T_K\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty .$

(c) La fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x |K(t,x)|\,dt = T_{|K|}(1)(x)$ étant continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $\alpha = \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

(d) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction $t \mapsto \text{signe}(K(x_0,t))$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a,b]$, on a $|f_n(t)| = \dfrac{|K(t,x_0)|}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n} < 1$, donc$\|f_n\|_\infty \leq 1$. De plus, pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(t)K(t,x_0) - |K(t,x_0)|| &= \left| \frac{K^2(t,x_0)}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n} - |K(t,x_0)| \right| \\ &= \frac{\varepsilon_n |K(t,x_0)|}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n} < \varepsilon_n \end{aligned}$$

donc la suite de fonctions $(f_n \cdot K(\cdot,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction $|K(\cdot,x_0)|$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} T_K(f_n)(x_0) &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_0} f_n(t)K(t,x_0)\,dt \\ &= \int_a^{x_0} |K(t,x_0)|\,dt = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty \end{aligned}$$

Avec $|T_K(f_n)(x_0)| \leq \|T_K(f_n)\|_\infty \leq \|T_K\|_\infty \|f_n\|_\infty \leq \|T_K\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit en faisant tendre n vers l'infini, que $\left\|T_{|K|}\right\|_\infty \leq \|T_K\|_\infty$ et l'égalité :

$$\|T_K\|_\infty = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\,dt$$

Dans le cas particulier où $K(t,x) = \varphi(x)$ avec φ continue sur $[a,b]$, on a $\|T_K\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} (x-a)|\varphi(x)|$.

4.

(a) Pour toute fonction $f \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|T_K(f)\|_1 &= \int_a^b |T_K(f)(x)|\,dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x |f(t)|\,|K(t,x)|\,dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_t^b |K(t,x)|\,dx \right) |f(t)|\,dt \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} \int_t^b |K(t,x)|\,dx \right) \|f\|_1 \end{aligned}$$

(théorème de Fubini sur un triangle), donc l'application linéaire T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :

$$\|T_K\|_1 \leq \sup_{t\in[a,b]} \int_t^b |K(t,x)|\, dx$$

(b) La fonction $\varphi : t \mapsto \displaystyle\int_t^b |K(t,x)|\, dx = T^*_{|K|}(1)(t)$ étant continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $t_0 \in [a,b]$ tel que $\sup\limits_{t\in[a,b]} \varphi(t) = \varphi(t_0)$.

(c) Si $\varphi(t_0) = 0$, on a alors $\|T_K\|_1 = 0 = \sup\limits_{t\in[a,b]} \varphi(t)$. Si $\varphi(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^b |K(t_0,x)|\, dx > 0$. Par continuité de φ en t_0, on peut trouver, pour tout entier naturel n, un réel $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a_n, b_n] = [a,b] \cap [t_0 - \eta_n, t_0 + \eta_n],\ \varphi(t) > 0 \text{ et } |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \frac{1}{n+1}$$

On désigne alors par $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction affine par morceaux et continue qui est nulle en dehors de $]a_n, b_n[$ et telle que :

$$\|f_n\|_1 = \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\, dx = 1$$

(voir la figure 1.1). Pour K à valeurs positives, comme f_n est aussi à valeurs

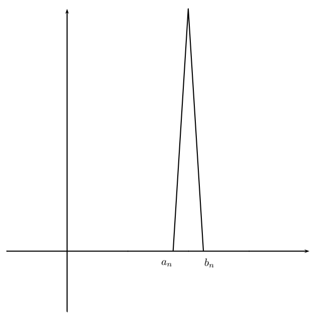

FIGURE 1.1 – graphe de f_n

positives, on a :

$$\begin{aligned}
\|T_K(f_n)\|_1 - \beta &= \int_a^b |T_K(f_n)(t)|\,dt - \int_{x_0}^b |K(t,x_0)|\,dt \\
&= \int_a^b \left(\int_a^t K(t,x) f_n(x)\,dx\right) dt - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt \\
&= \int_a^b \left(\int_x^b K(t,x)\,dt\right) f_n(x)\,dx - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt \int_a^b f_n(x)\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_x^b K(t,x)\,dt - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt\right) f_n(x)\,dx \\
&= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_x^b K(t,x)\,dt - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt\right) f_n(x)\,dx \\
&= \int_{a_n}^{b_n} (\varphi(x) - \varphi(x_0)) f_n(x)\,dx
\end{aligned}$$

et :

$$\left|\|T_K(f_n)\|_1 - \beta\right| \leq \int_{a_n}^{b_n} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| f_n(x)\,dx \leq \varepsilon_n \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx = \varepsilon_n$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_K(f_n)\|_1 = \beta$.
Avec $\|T_K(f_n)\|_1 \leq \|T_K\|_1 \|f_n\|_1 = \|T_K\|_1$, on en déduit que $\varphi(x_0) \leq \|T_K\|_1$ et :

$$\|T_K\|_1 = \varphi(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(t,x)\,dt$$

5. On a :

$$\int_a^b (T_K(f)(x))^2\,dx = \int_a^b \left(\int_a^x K(x,t) f(t)\,dt\right)^2 dx$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[a,x]$, à x fixé dans $]a,b]$, on a :

$$\left(\int_a^x K(x,t) f(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^x (K(x,t))^2\,dt \int_a^x f^2(t)\,dt \leq \int_a^x (K(x,t))^2\,dt\, \|f\|_2^2$$

cette inégalité étant encore vraie pour $x = a$, donc :

$$\|T_K(f)\|_2^2 \leq \left(\int_a^b \left(\int_a^x (K(x,t))^2\,dt\right) dx\right) \|f\|_2^2$$

et on en déduit que T_K est linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ avec

$$\|T\|_2^2 \leq \int_a^b \left(\int_a^x (K(x,t))^2\,dt\right) dx \leq \|K\|_\infty^2 \int_a^b \left(\int_a^x dt\right) dx = \|K\|_\infty^2 \frac{(b-a)^2}{2}$$

6.

(a) Pour $f \in E$, $T(f)$ est la primitive de f nulle en a. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Supposons que T admette une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou même $\lambda \in \mathbb{C}$). Il existe alors une fonction $f \in E \setminus \{0\}$ (ou $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}) \setminus \{0\}$) telle que :

$$\forall x \in [a,b],\ T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \lambda f(x) = \lambda T(f)'(x)$$

Si $\lambda = 0$, on a alors $T(f) = 0$ et $f = T(f)' = 0$, ce qui n'est pas.
Si $\lambda \neq 0$, on a alors $T(f)(x) = \alpha e^{\frac{1}{\lambda}(x-a)}$ avec $\alpha = T(f)(a) = 0$, donc $T(f) = 0$ et $f = T(f)' = 0$, ce qui n'est pas.
Dans les deux cas, on a une impossibilité, donc T n'admet pas de valeur propre réelle (ou même complexe).

(b)

i. On a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$g(x) = T\left(f^2\right)(x) = \int_a^x f^2(t)\,dt$$

donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs positives sur $[a,b]$ avec :

$$g'(x) = f^2(x) \geq 0$$

donc g est croissante sur $[a,b]$.
Comme $g(a) = 0$, l'ensemble $A = \{x \in [a,b] \mid g(x) = 0\}$ est non vide majoré par b, il admet donc une borne supérieure α.
Par continuité de g, on a $g(\alpha) = 0$ (si $\alpha = a$, c'est clair, sinon, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $\alpha - \dfrac{1}{n} < x_n \leq \alpha$ et $g(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$).
Si $\alpha = b$, on a alors $g(b) = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$ et $f = 0$, ce qui n'est pas.
On a donc $\alpha \in [a,b[$.
Pour tout $x \in [a,\alpha]$, on a $0 \leq g(x) \leq g(\alpha) = 0$, donc $g(x) = 0$.
Un réel $x \in]\alpha,b]$ n'est pas dans A, donc $g(x) > 0$.

ii. Pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\lambda f(x) = T_K(f)(x) = \int_a^x K(x,t)\,f(t)\,dt$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que :

$$\lambda^2 f^2(x) \leq \int_a^x K^2(x,t)\,dt \int_a^x f^2(t)\,dt \leq (b-a)\,\|K\|_\infty^2\, g(x)$$

soit :

$$\lambda^2 g'(x) \leq \beta g(x)$$

où $\beta = (b-a)\,\|K\|_\infty^2 > 0$ puisque $K \neq 0$.

iii. Pour tout $x \in \left]\alpha, b\right]$, on a $\lambda^2 \dfrac{g'(x)}{g(x)} \leq \beta$, ce qui signifie que la fonction :

$$h : x \mapsto \beta (x - \alpha) - \lambda^2 \ln (g(x))$$

est croissante sur $\left]\alpha, b\right]$, donc :

$$\forall x \in \left]\alpha, b\right], \ h(x) = \beta(x - \alpha) - \lambda^2 \ln(g(x)) \leq h(b) = \beta(b - \alpha) - \lambda^2 \ln(g(b))$$

ce qui contredit :

$$\lim_{x \to \alpha^+} h(x) = +\infty$$

pour $\lambda \neq 0$.
En définitive, T_K n'a pas de valeur propre réelle non nulle.

(c)

i. Pour $f \in E$ et $x \in [0, 1]$, on a :

$$T_K(f)(x) = \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t)\, dt + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t)\, dt$$

donc $T_K(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec :

$$\begin{aligned} T_K(f)'(x) &= -\sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t)\, dt + \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t)\, dt \\ &\quad + f(x) \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) \\ &= \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t)\, dt - \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t)\, dt + f(x) \end{aligned}$$

ii. On sait déjà que T_K n'a pas de valeur propre non nulle.
Il s'agit donc d'étudier le noyau de T_K.
Si $T_K(f) = 0$, on a aussi $T_K(f)' = 0$, soit :

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t)\, dt - \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t)\, dt$$

et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t)\, dt + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t)\, dt \\ &\quad + f(x) (\sin(x) \cos(x) - \cos(x) \sin(x)) \\ &= T_K(f)(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui nous donne $f = f(0) = 0$.
Donc $\ker(T_K) = \{0\}$ et T_K n'a pas de valeur propre.

7. Montrer que si K_1 et K_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]^2$, alors la composée $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ est un opérateur de Volterra sur E.

8. Pour $f \in E$ et $x \in [a,b]$, on a :

$$T_{K_1} \circ T_{K_2}(f)(x) = \int_a^x K_1(x,t)\, T_{K2}(f)(t)\, dt = \int_a^x \left(\int_a^t f(y)\, K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, dy \right) dt$$
$$= \int_a^x \left(\int_y^x K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, dt \right) f(y)\, dy = \int_a^x K_3(x,y)\, f(y)\, dy$$

(théorème de Fubini sur un triangle) où on a posé :

$$K_3(x,y) = \int_y^x K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, dt$$
$$= (x-y) \int_0^1 K_1(x, y+\theta(x-y))\, K_2(y+\theta(x-y), y)\, d\theta$$

pour $(x,y) \in [a,b]^2$.
Comme la fonction :

$$(\theta, x, y) \mapsto K_1(x, y+\theta(x-y))\, K_2(y+\theta(x-y), y)$$

est continue sur $[0,1] \times [a,b]^2$ et l'intégration se fait sur un segment, on déduit que l'application K_3 est continue sur $[a,b]^2$ et $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ est un opérateur de Volterra sur E.

9.

(a) Du résultat précédent, on déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que les T_K^n sont des opérateurs de Volterra, les noyaux associés étant définis par $K_1 = K$ et :

$$K_{n+1}(x,y) = \int_y^x K_n(t,y)\, K(x,t)\, dt$$

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
C'est vrai pour $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a, pour $(x,y) \in [a,b]^2$:

$$|K_{n+1}(x,y)| = \left| \int_y^x K_n(t,y)\, K(x,t)\, dt \right| \leq \|K\|_\infty \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \left| \int_y^x |t-y|^{n-1}\, dt \right|$$
$$\leq \|K\|_\infty \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \frac{|x-y|^n}{n} = \frac{\|K\|_\infty^{n+1}}{n!} |x-y|^n$$

(distinguer les cas $x \leq y$ et $x > y$).

(c) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in E$ et $x \in [a,b]$:

$$(T_K^n(f)(x))^2 = \left(\int_a^x f(t)\, K_n(x,t)\, dt \right)^2 \leq \int_a^x f^2(t)\, dt \int_a^x K_n^2(x,t)\, dt$$
$$\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \right)^2 \int_a^x (x-t)^{2(n-1)}\, dt$$
$$\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \right)^2 \frac{(x-a)^{2n-1}}{2n-1}$$

donc :

$$\begin{aligned}\left\|T_K^n(f)\right\|_2^2 &\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!}\right)^2 \int_a^b \frac{(x-a)^{2n-1}}{2n-1} dx = \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!}\right)^2 \frac{(b-a)^{2n}}{2n(2n-1)} \\ &\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!}\right)^2 \frac{(b-a)^{2n}}{n^2}\end{aligned}$$

($2n(2n-1) \geq n^2$ équivaut à $3n \geq 2$ pour $n \geq 1$) et :

$$\|T_K^n\|_2 \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b-a)^n}{n!}$$

(d) De $\|T_K^n\|_2 \leq \dfrac{\|K\|_\infty^n (b-a)^n}{n!}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum T_K^n$ est normalement convergente dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_2)$ et avec :

$$\begin{aligned}(Id - T_K) \circ \sum_{n=0}^{+\infty} T_K^n &= (Id - T_K) \circ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} T_K^k = \lim_{n \to +\infty} (Id - T_K) \circ \sum_{k=0}^{n} T_K^k \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left(Id - T_K^{n+1}\right) = Id\end{aligned}$$

(continuité de la composition), on déduit que :

$$(Id - T_K)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_K^n$$

soit, pour $f \in E$ et $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}(Id - T_K)^{-1}(f)(x) &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} T_K^n(f)(x) \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x f(t) K_n(x,t)\, dt \\ &= f(x) + \int_a^x f(t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x,t)\right) dt \\ &= f(x) + \int_a^x f(t) L(x,t)\, dt\end{aligned}$$

où :

$$L(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x,t)$$

la convergence uniforme de cette série étant assurée par les inégalités :

$$|K_n(x,t)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(e) En écrivant que $\lambda Id - T_K = \lambda \left(Id - \frac{1}{\lambda} T_K \right) = \lambda \left(Id - T_{\frac{1}{\lambda}K} \right)$ et en remplaçant la fonction K par $\frac{1}{\lambda} K$, on déduit que $\lambda Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'endomorphisme $\lambda Id - T_K$ est en particulier injectif, donc λ ne peut être valeur propre de T_K.

(f) Comme $T_K(f)(a) = 0$, l'opérateur T_K n'est pas surjectif et en conséquence n'est pas inversible, donc $\sigma(T_K) = \{0\}$.

10.

(a) C'est vrai pour $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} T^{n+1}(f)(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} T(f)(t)\,dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} T(f)(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt \end{aligned}$$

La fonction $T^{n+1}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ de dérivée $T^n(f)$ qui est de classe $\mathcal{C}^n$, donc $T^{n+1}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.
On a aussi $(T^n(f))^{(k)}(a) = 0$ pour k compris entre 0 et $n-1$.

(b) On a donc $T^n = T_{K_n}$, où $K_n(x,t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ sur $[a,b]^2$ et :

$$\|T^n\|_\infty = \|T_{K_n}\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \sup_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)^n}{n!} = \frac{(b-a)^n}{n!}$$

En remarquant qu'on peut aussi écrire $T^n = T_{K_n}$, avec $K_n(x,t) = \frac{|x-t|^n}{n!} \geq 0$ sur $[a,b]^2$, on déduit que :

$$\|T^n\|_1 = \sup_{t\in[a,b]} \int_t^b \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \sup_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)^n}{n!} = \frac{(b-a)^n}{n!}$$

(c) On a $K_n(x,y) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ pour tout $n \geq 1$ et $(Id - T)^{-1} = Id + T_L$ avec :

$$L(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{x-t}$$

donc :

$$(Id - T)^{-1}(f)(x) = f(x) + \int_a^x e^{x-t} f(t)\,dt$$

et, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
(\lambda Id - T)^{-1}(f)(x) &= \frac{1}{\lambda}\left(Id - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^n}T^n(f)(x) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^n}\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(f(x) + \frac{1}{\lambda}\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^{n-1}}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

(d) C'est vrai pour $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}
(T^*)^{n+1}(f)(x) &= \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}T^*(f)(t)\,dt = \left[\frac{(x-t)^n}{n!}T^*(f)(t)\right]_x^b + \int_x^b \frac{(x-t)^n}{n!}f(t) \\
&= \int_x^b \frac{(t-x)^n}{n!}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

(e) On a :

$$\begin{aligned}
T^n(f)(x) + (T^*)^n(f)(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt + \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt \\
&= \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt + \int_x^b \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{|t-x|^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

11. Supposons que $H \neq \{0\}$, notons $n = \dim(H) \geq 1$ et $\pi(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ le polynôme minimal de la restriction de T à H avec $1 \leq p \leq n$ et $a_p = 1$.

Pour toute fonction $f \in E$, on a $\sum_{k=0}^{p} a_k T^k(f) = 0$. La fonction $y = T^p(f)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ avec $y^{(k)} = T^{p-k}(f)$ pour $1 \leq k \leq p$ et $y^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leq k \leq p-1$, donc y est solution du problème de Cauchy :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(p-k)} = 0 \text{ avec } y^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq p-1$$

ce qui impose $y = 0$ par unicité de cette solution, ce qui contredit $H \neq \{0\}$.
En définitive, $H = \{0\}$ est l'unique sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par T.

12.

(a) Comme $\lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t) = 0$, la fonction φ se prolonge par continuité en b en posant $\varphi(b) = 0$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $f(a) = 0$, on a :

$$\lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{t-a} = \lim_{t\to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} = f'(a)$$

et :

$$\varphi(t) \cdot f(t) = \frac{\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)} \frac{f(t)}{t-a} \underset{t\to a^+}{\to} f'(a)$$

donc $\varphi \cdot f$ se prolonge par continuité en a en posant $(\varphi \cdot f)(a) = f'(a)$.

(b) Pour tout $t \in]a,b[$, on a $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)} = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{b-t}{b-a}\right)} = -\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{b-t}{b-a}\right)$

et :

$$\varphi'(t) = -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{b-t}{b-a}\right)\right) = -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} - \varphi^2(t)$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\|f' - \varphi \cdot f\|_2^2 &= \int_a^b (f'(t) - \varphi(t) \cdot f(t))^2 \, dt \\
&= \|f'\|_2^2 + \int_a^b \left(\varphi^2(t) f^2(t) - 2\varphi(t) f(t) f'(t)\right) dt
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\varphi^2 f^2 - 2\varphi \cdot f \cdot f' &= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} f^2 - \left(\varphi' f^2 + 2\varphi \cdot f \cdot f'\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} f^2 - \left(\varphi f^2\right)'
\end{aligned}$$

sur l'intervalle $]a,b[$, ce qui nous donne pour $a < \alpha < \beta < b$:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \left(\varphi^2(t) f^2(t) - 2\varphi(t) f(t) f'(t)\right) dt &= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_\alpha^\beta f^2(t)\, dt - \int_\alpha^\beta \left(\varphi f^2\right)'(t)\, dt \\
&= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_\alpha^\beta f^2(t)\, dt - \left(\varphi(\beta) f^2(\beta) - \varphi(\alpha) f^2(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

et faisant tendre (α, β) vers (a,b), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\|f' - \varphi \cdot f\|_2^2 &= \|f'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \|f\|_2^2 - \left(\varphi(b) f^2(b) - (\varphi \cdot f)(a) f(a)\right) \\
&= \|f'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

(d) On en déduit que $\|f'\|_2^2 - \dfrac{\pi^2}{4(b-a)^2}\|f\|_2^2 \geq 0$, soit que $\|f\|_2 \leq \dfrac{2(b-a)}{\pi}\|f'\|_2$.
L'égalité $\|f\|_2 = \dfrac{2(b-a)}{\pi}\|f'\|_2$ est réalisée si, et seulement si, $f' = \varphi \cdot f$, ce qui équivaut à :
$$f(t) = \lambda e^{\Phi(t)}$$
pour tout $t \in \left]a,b\right]$, où Φ est la primitive de φ nulle en b, soit :
$$\Phi(t) = -\int_t^b \varphi(x)\,dx = -\frac{\pi}{2(b-a)}\int_t^b \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)}dx = -\left[\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)\right)\right]_t^b$$
$$= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)\right)$$
On a donc :
$$f(t) = \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)$$
pour tout $t \in \left]a,b\right]$, cette égalité étant également assurée en a par continuité.

13. Pour toute fonction $f \in E$, la fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $(T(f))' = f$ et $(T(f))(a) = a$. On déduit alors de la question précédente que :
$$\|T(f)\|_2 \leq \frac{2(b-a)}{\pi}\left\|(T(f))'\right\|_2 = \frac{2(b-a)}{\pi}\|f\|_2$$
donc $\|T\|_2 \leq \dfrac{2(b-a)}{\pi}$.
Pour $f(t) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t-a}{b-a}\right)$, on a $T(f)(t) = \dfrac{2(b-a)}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t-a}{b-a}\right)$ et $\|T(f)\|_2 = \dfrac{2(b-a)}{\pi}\|f\|_2$, donc $\|T\|_2 = \dfrac{2(b-a)}{\pi}$.

– II – L'opérateur $S = T \circ T^*$

1. Pour tout $f \in E$, la fonction $T(f)$ [resp. $T^*(f)$] est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $(T(f))' = f$ [resp. $(T^*(f))' = -f$], donc $S = T \circ T^*$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ avec :
$$(S(f))'' = \left(T(T^*(f))'\right)' = (T^*(f))' = -f$$
Comme $T(f)(0) = T^*(f)(1) = 0$ pour tout $f \in E$, on a $g(0) = T(T^*(g))(0) = 0$ et $g'(1) = T^*(f)(1) = 0$.

2. Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, en notant $\lambda = T(f)(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$, on a :

$$\begin{aligned} S(f)(x) &= T(\lambda - T(f))(x) \\ &= \lambda x - T^2(f)(x) = \int_0^1 xf(t)\,dt - \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt \\ &= \int_0^x xf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt - \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt \\ &= \int_x^1 xf(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt = \int_0^1 \min(x,t)\,f(t)\,dt \end{aligned}$$

3. Pour tout $f \in E$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_2^2 &= \langle T(f) \mid T(f)\rangle = \langle f \mid T^* \circ T(f)\rangle \leq \|f\|_2 \|T^* \circ T(f)\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 \|T^* \circ T\|_2 \|f\|_2 = \|T^* \circ T\|_2 \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|T^*(f)\|_2^2 &= \langle T^*(f) \mid T^*(f)\rangle = \langle f \mid T \circ T^*(f)\rangle \leq \|f\|_2 \|T \circ T^*(f)\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 \|T \circ T^*\|_2 \|f\|_2 = \|T \circ T^*\|_2 \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

donc $\|T\|_2^2 \leq \|T^* \circ T\|_2 \leq \|T^*\|_2 \|T\|_2$, soit $\|T\|_2 \leq \|T^*\|_2$ et $\|T^*\|_2 \leq \|T\|_2$, ce qui donne $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$ et $\|T\|_2^2 = \|T^* \circ T\|_2 = \|T \circ T^*\|_2$.
Sachant que $\|T\|_2 = \dfrac{2}{\pi}$, on en déduit que :

$$\|S\|_2 = \frac{4}{\pi^2}$$

4. Pour f, g dans E, on a :

$$\langle S(f) \mid g\rangle = \langle T^*(f) \mid T^*(g)\rangle$$

et cette expression est symétrique en (f,g), donc S est symétrique.
Pour $f \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\langle S(f) \mid f\rangle = \|T^*(f)\|^2 > 0$$

(T^* est injectif car $(T^*(f))' = -f$), donc S est défini positif.

5. Résulte du fait que S est symétrique, défini et positif.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de S et $f \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, on a alors $S(f) = \lambda f$ et :

$$\lambda \|f\|^2 = \langle \lambda f \mid f\rangle = \langle S(f) \mid f\rangle = \|T^*(f)\|^2 > 0$$

avec $\|f\|^2 > 0$, donc $\lambda > 0$.

6. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de S et $f \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, on a alors $S(f) = \lambda f$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, $\lambda > 0$ et $\lambda f'' = -f$ avec les conditions $f(0) = f'(1) = 0$, ce qui nous donne :

$$f(t) = \alpha \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

avec :

$$\alpha = f(0) = 0 \text{ et } \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

avec $\beta \neq 0$ puisque $f \neq 0$, ce qui impose $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, soit $\lambda = \dfrac{4}{(2n+1)^2 \pi^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, on vérifie que les réels $\lambda_n = \mu_n^2$, où $\mu_n = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont bien valeurs propres de S. En effet, en désignant par f_n la fonction définie par $f_n(t) = \sin\left(\dfrac{t}{\mu_n}\right)$ pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
S(f_n)(x) &= \int_0^1 \min(x,t) f_n(t)\, dt = x\int_x^1 f_n(t)\, dt + \int_0^x t f_n(t)\, dt \\
&= x\int_x^1 \sin\left(\frac{t}{\mu_n}\right) dt + \int_0^x t\sin\left(\frac{t}{\mu_n}\right) dt \\
&= x\left[-\mu_n \cos\left(\frac{t}{\mu_n}\right)\right]_x^1 + \left[-\mu_n t\cos\left(\frac{t}{\mu_n}\right)\right]_0^x + \mu_n \int_0^x \cos\left(\frac{t}{\mu_n}\right) dt \\
&= x\mu_n \cos\left(\frac{x}{\mu_n}\right) - \mu_n x\cos\left(\frac{x}{\mu_n}\right) + \mu_n^2 \sin\left(\frac{x}{\mu_n}\right) \\
&= \lambda_n f_n(x)
\end{aligned}$$

Donc λ_n est bien valeur propre de S et ce qui précède nous dit que l'espace propre associé est la droite dirigée par f_n.

7. Pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\langle \lambda_n f_n \mid f_m\rangle = \langle S(f_n) \mid f_m\rangle = \langle f_n \mid S(f_m)\rangle = \langle f_n \mid \lambda_m f_m\rangle$$

soit :

$$(\lambda_n - \lambda_m)\langle f_n \mid f_m\rangle = 0$$

et $\langle f_n \mid f_m\rangle = 0$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2 &= \int_0^1 \sin^2\left(\frac{t}{\mu_n}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \cos\left(2\frac{t}{\mu_n}\right)\right) dt \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\mu_n}{4}\left[\sin\left(2\frac{t}{\mu_n}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu_n}{4}\sin((2n+1)\pi) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

9. Pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
c_n(f) = \langle f \mid \varphi_n\rangle &= \sqrt{2}\int_0^1 \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}t\right) f(t)\, dt \\
&= 2\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x) f\left(\frac{2}{\pi}x\right) dx
\end{aligned}$$

En désignant par g la fonction 2π-périodique et impaire définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2}{\pi}x\right) & \text{si } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ f\left(2 - \dfrac{2}{\pi}x\right) & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

et $f(0) = f(\pi) = 0$, ses coefficients de Fourier sont $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\, g(x)\, dx$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme, pour $x = \pi - t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, on a :

$$g(x) = f\left(2 - \frac{2}{\pi}(\pi - t)\right) = f\left(\frac{2}{\pi}t\right) = g(t)$$

et :

$$\sin(nx) = \sin(n(\pi - t)) = (-1)^{n+1} \sin(nt)$$

on a :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\, g(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)\, g(x)\, dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\, g(x)\, dx + (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)\, g(t)\, dt\right) \end{aligned}$$

soit $b_{2n} = 0$ et :

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x)\, g(x)\, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x)\, f\left(\frac{2}{\pi}x\right) dx \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} c_n(f) = \sqrt{2} c_n(f) \end{aligned}$$

10. La fonction g étant 2π-périodique, impaire et continue par morceaux, le théorème de Parseval nous dit que :

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2(g) + b_n^2(g)\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g^2(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g^2(x)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x)\, dx\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)\, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2\left(\frac{2}{\pi}x\right) dx \\ &= 2 \int_0^1 f^2(t)\, dt \end{aligned}$$

soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)^2 = \|f\|_2^2 \tag{1.2}$$

11. Soit $f \in E$.
    Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_n\left(S\left(f\right)\right) = \left\langle S\left(f\right) \mid \varphi_n\right\rangle = \left\langle f \mid S\left(\varphi_n\right)\right\rangle = \lambda_n \left\langle f \mid \varphi_n\right\rangle = \lambda_n c_n\left(f\right)$$

et utilisant (1.2) pour la fonction $S\left(f\right)$, on a le résultat annoncé.

12. Pour $f = 1$, on a :

$$\begin{aligned} c_n\left(f\right) &= 2\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\left(2n+1\right)x\right)dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\left(2n+1\right)\pi} \end{aligned}$$

$$S\left(f\right)\left(x\right) = \int_x^1 x\,dt + \int_0^x t\,dt = x\left(1-x\right) + \frac{x^2}{2} = x\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

et :

$$\left\|S\left(f\right)\right\|_2^2 = \int_0^1 x^2\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{2}{15}$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Puis avec :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n\right)^6}$$

on déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{64}{63}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

13. Pour tout $f \in E$, on a :

$$\left\|S\left(f\right)\right\|_2^2 = \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n\left(f\right)^2}{\left(2n+1\right)^4} \leq \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\left(f\right)^2 = \frac{16}{\pi^4}\left\|f\right\|_2^2$$

donc $\left\|S\right\|_2 \leq \dfrac{4}{\pi^2}$.
Prenant $f = \varphi_0 = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$, on a $\left\|f\right\|_2^2 = \left\|\varphi_0\right\|_2^2 = c_0\left(f\right) = 1$ et $c_n\left(f\right) = \left\langle \varphi_0 \mid \varphi_n\right\rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc :

$$\left\|S\left(f\right)\right\|_2^2 = \frac{16}{\pi^4}$$

En conclusion $\left\|S\right\|_2 = \dfrac{4}{\pi^2} = \left\|T\right\|_2^2$ et on retrouve $\left\|T\right\|_2 = \dfrac{2}{\pi}$.

14.

   (a) Résulte de :

$$K\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\left(x+t-\left|x-t\right|\right)$$

(b) Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $K_x : t \mapsto K(x,t)$ est dans E, donc :

$$\int_0^1 K^2(x,t)\,dt = \|K_x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(K_x)^2$$

avec :

$$c_n(K_x) = \int_0^1 K(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt = S(\varphi_n)(x) = \lambda_n \varphi_n(x)$$

Ce qui donne :

$$\int_0^1 K(x,t)^2\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 \varphi_n^2(x)$$

et en intégrant :

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x,t)^2\,dtdx = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 \|\varphi_n\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2$$

la convergence normale de la série de fonction qui est assurée par :

$$0 \leq \lambda_n^2 \varphi_n^2(x) \leq 2\lambda_n^2 = \frac{32}{(2n+1)^4\,\pi^4}$$

nous permet d'intégrer terme à terme.

(c) On retrouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{16} \int_0^1 \int_0^1 K(x,t)^2\,dtdx = \frac{\pi^4}{16} \int_0^1 \left(\int_0^x t^2 dt + \int_x^1 x^2 dt \right) + dx$$
$$= \frac{\pi^4}{16} \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + x^2(1-x) \right) dx = \frac{\pi^4}{96}$$

Puis avec :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4}$$

on déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Chapitre 2

Suites et séries numériques

Exo Sup 2.1. Valeurs d'adhérences de $\left(\cos\left(n^{\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $0<\alpha<1$ et de $\left(\cos\left(\ln\left(n\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

On se donne une fonction continue $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ dérivable sur $]1,+\infty[$ telle que $f'(x)>0$ pour tout $x\in\,]1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ et on s'intéresse aux valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=\cos\left(f\left(n\right)\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $]f(1),+\infty[$ et qu'on a $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y)=+\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(f^{-1}\right)'(y)=+\infty$.*
2. *Montrer qu'il existe un réel $a\geq f(1)$ tel que $f^{-1}(y+2\pi)-f^{-1}(y)>1$ pour tout $y\geq a$.*
3. *Soient $t\in\mathbb{R}$ et $n_0\in\mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $t+2n_0\pi>a$ ($n_0=0$ pour $t>a$ ou $n_0=\left[\dfrac{a-t}{2\pi}\right]+1\in\mathbb{N}^*$ pour $t\leq a$).*

   (a) *Montrer que pour tout entier $n\geq n_0$, il existe un unique entier $\varphi(n)\in\mathbb{N}^*$ tel que :*

   $$f\left(\varphi\left(n\right)\right)\leq t+2n\pi<f\left(\varphi\left(n\right)+1\right)\tag{2.1}$$

   (b) *Montrer que la suite d'entiers $\left(\varphi\left(n\right)\right)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*

   (c) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f\left(\varphi\left(n\right)\right)-2n\pi\right)=t$. Cela signifie que l'ensemble $\left\{f(m)-2n\pi \mid (n,m)\in\mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
4. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $[-1,1]$.*
5. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos\left(n^{\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ [resp. $\left(\sin\left(n^{\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$] pour $0<\alpha<1$ [resp. $\left(\cos\left(\ln\left(n\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$] est $[-1,1]$.*

Solution.

1. La fonction f étant continue strictement croissante sur $[1,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, elle réalise un homéomorphisme de $[1,+\infty[$ sur $[f(1),+\infty[$. Comme f' ne s'annule jamais sur $]1,+\infty[$, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $]f(1),+\infty[$ avec $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} > 0$ pour tout $y \in]f(1),+\infty[$. On a aussi $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \left(f^{-1}\right)'(y) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0^+$.
2. Pour tout $y \in [f(1),+\infty[$, il existe un réel $c_y \in]y, y+2\pi[$, tel que $f^{-1}(y+2\pi) - f^{-1}(y) = 2\pi\left(f^{-1}\right)'(c_y)$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(f^{-1}\right)'(t) = +\infty$, il existe un réel $a \geq f(1)$ tel que $\left(f^{-1}\right)'(t) > \dfrac{1}{2\pi}$ pour tout $t \geq a$, ce qui nous donne $f^{-1}(y+2\pi) - f^{-1}(y) > 1$ pour tout $y \geq a$.
3.
   (a) Comme les fonctions f et f^{-1} sont strictement croissantes, la condition (2.1) est équivalente à $\varphi(n) \leq f^{-1}(t+2n\pi) < \varphi(n)+1$, ce qui est réalisé uniquement pour $\varphi(n) = \left[f^{-1}(t+2n\pi)\right] \in \mathbb{N}^*$ ($t+2n\pi \geq t+2n_0\pi > a \geq f(1)$ et $f^{-1}(t+2n\pi) \geq 1$).

   (b) Cela résulte de la croissance de la partie entière (précisément si $y - x > 1$ alors $y - x = p + \varepsilon$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon \in [0,1[$, donc $[y] = [x] + p > [x]$) et de la stricte croissance de f^{-1}. En effet, pour $n \geq n_0$, on a :

   $$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \left[f^{-1}(t+2n\pi+2\pi)\right] - \left[f^{-1}(t+2n\pi)\right] > 0$$

   puisque $t + 2n\pi > a$.

   (c) Pour $n \geq n_0$, on a $0 \leq t + 2n\pi - f(\varphi(n)) < f(\varphi(n)+1) - f(\varphi(n)) = f'(c_n)$ où $c_n \in]\varphi(n), \varphi(n)+1[$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(c_n) = 0$ (la suite $(\varphi(n))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante) et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$.
4. Pour tout $x \in [-1,1]$, il existe un unique $t \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos(t)$ [resp. $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin(t)$] et de ce qui précède on déduit que :

   $$x = \lim_{n\to+\infty} \cos(f(\varphi(n)) - 2n\pi) = \lim_{n\to+\infty} \cos(f(\varphi(n))) = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$$

   [resp. $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(f(\varphi(n)))$], ce qui signifie que x est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Réciproquement, toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans $[-1,1]$ puisque cette suite est à valeurs dans $[-1,1]$.
5. On applique ce qui précède aux fonctions $f(x) = x^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$ et $f(x) = \ln(x)$.

Exercice 2.2. Formule de Stirling

1. *Vérifier que, pour tout* $x \in \mathbb{R}^{+,*}$*, on a* $1+\dfrac{1}{x} = \dfrac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}$*, puis en déduire que :*

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}$$

et :

$$\frac{1}{x(x+1)} = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^{2k}}$$

2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par* $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

   (a) *Montrer que les suites* $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\left(\ln(u_n) + \dfrac{1}{12n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *convergent vers un même réel* ℓ.

   (b) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers un réel* $\alpha > 0$*, que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\frac{\sqrt{n}}{\alpha}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \frac{\sqrt{n}}{\alpha}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

   et que $n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{\sqrt{n}}{\alpha}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

   (c) *En utilisant la suite* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *des intégrales de Wallis (exercice 5.1), montrer que* $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$*. On a donc* $n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ *(formule de Stirling) avec :*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. *Étudier les série de termes généraux* $\dfrac{e^n n!}{n^n}$ *et* $\dfrac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$.

Solution.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a :

$$\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} = \frac{2x+2}{2x} = \frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x}$$

avec $\dfrac{1}{2x+1} \in \left]0,1\right[$, ce qui nous donne en utilisant le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $\left]-1,1\right[$:

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \ln\left(1+\frac{1}{2x+1}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k(2x+1)^k} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(2x+1)^k}\\ &= 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{t^{2k+1}}{(2k+1)}$ étant égal à 1, on peut effectuer une dérivation terme à terme qui nous donne :

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} = -4\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2k}}$$

soit $\dfrac{1}{x(x+1)} = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2k}}$.

2.

(a) On vérifie que les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\ln(u_n) + \dfrac{1}{12n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En notant $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}\right) = -1 + \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)\\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} > 0\end{aligned}$$

donc la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. En utilisant le fait que $2k+1 \geq 3$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a aussi :

$$v_n < \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

soit $\ln(u_{n+1}) + \dfrac{1}{12(n+1)} < \ln(u_n) + \dfrac{1}{12n}$, ce qui signifie que la suite $\left(\ln(u_n) + \dfrac{1}{12n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Compte tenu du fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{12n} = 0$, on en déduit que ces deux suites sont adjacentes et en conséquence, convergentes vers un même réel ℓ.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(u_n) < \ell < \ln(u_n) + \dfrac{1}{12n}$ avec $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n)$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\alpha = e^\ell > 0$ avec $u_n < \alpha < u_n e^{\frac{1}{12n}}$, ou encore $\alpha e^{-\frac{1}{12n}} < u_n < \alpha$, soit :

$$\alpha e^{-\frac{1}{12n}} < \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n < \alpha$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\sqrt{n}}{\alpha} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \frac{\sqrt{n}}{\alpha} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

En vérifiant que $e^{\frac{x}{12}} \leq 1 + x$ pour tout $x \in [0,1]$ (en notant $f(x) = 1 + x - e^{\frac{x}{12}}$, on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{12} e^{\frac{x}{12}} \geq 0$ sur $[0,1]$, donc $f(x) \geq f(0) = 0$), il en résulte que :

$$\frac{\sqrt{n}}{\alpha} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \frac{\sqrt{n}}{\alpha} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et $n! \underset{n \to +\infty}{\backsim} \dfrac{\sqrt{n}}{\alpha} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

(c) Avec l'exercice 5.1 on a vu que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $W_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \dfrac{\pi}{2}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$ et $(n+1) W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, donc $W_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{(2n+1) W_{2n}}$ et $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{(2n+1)(W_{2n})^2}$ avec :

$$1 \leq \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leq \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2n+1} W_{2n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ avec :

$$\sqrt{2n+1} W_{2n} = \sqrt{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2n} \frac{\frac{\sqrt{2n}}{\alpha} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \left(\frac{\sqrt{n}}{\alpha} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \frac{\pi}{2} = \alpha\pi$$

ce qui nous donne $\alpha\pi = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, soit $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3. Pour $u_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\to} 1$ et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :

$$u_n \backsim \sqrt{2\pi} \frac{e^n}{n^n} \frac{\sqrt{n} n^n}{e^n} = \sqrt{2\pi} \sqrt{n}$$

et $\sum u_n$ diverge. Pour $u_n = \dfrac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a $u_n \backsim \sqrt{2\pi}\dfrac{n^n}{e^n n^\alpha}\dfrac{e^n}{\sqrt{n}n^n} = \sqrt{2\pi}\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ et $\sum u_n$ diverge pour $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, converge pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exo Sup 2.3. Série non commutativement convergente (2)

On s'intéresse encore à la série de Riemann alternée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

On se donne deux entiers naturels non nuls p, q et on désigne par σ la permutation de $\mathbb{N}$ qui ordonne $\mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbb{N}) = \{0, 2, \cdots, 2(p-1)\} \cup \{1, 3, \cdots, 2q-1\} \\ \cup \{2p, \cdots, 2(2p-1)\} \cup \{2q+1, \cdots, 4q-1\} \cup \cdots\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on place les p premiers entiers pairs, puis les q premiers entiers impairs, puis les p entiers pairs suivants, les q entiers impairs suivants, et ainsi de suite. En effectuant la division euclidienne par $p+q$ tout entier n s'écrit de manière unique $n = (p+q)k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r \leq p+q-1$ et une telle permutation σ peut être définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \begin{cases} 2(pk+r) & si\ 0 \leq r \leq p-1 \\ 2(qk+r-p)+1 & si\ p \leq r \leq p+q-1 \end{cases}$$

1. *Montrer que σ est bien permutation de $\mathbb{N}$.*
2. *En notant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on désigne par $\sum v_n$ la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$.*
   On se donne un entier $n \geq p+q$ et on écrit $n = (p+q)k + r$ sa division euclidienne par $p+q$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq p+q-1$.
   (a) *Écrire la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} v_j$ sous la forme $S_n = T_k - \varepsilon_k$ où $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$.*
   (b) *Pour tout entier $k \geq 1$, on note $H_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1}$. Montrer que :*
   $$T_k = T_k = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right)$$
   (c) *En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.*

Solution.

1. Soient n, m deux entiers naturels et $n = (p+q)\,k + r$, $m = (p+q)\,k' + r'$ les divisions euclidiennes de ces entiers par $p+q$. Si $\sigma(n) = \sigma(m)$, les restes r et r' sont tous deux dans $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ ou $\{p, \cdots, p+q-1\}$, sinon $\sigma(n)$ et $\sigma(m)$ sont deux entiers de parités différente. En supposant qu'ils sont tous deux dans $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ [resp. dans $\{p, \cdots, p+q-1\}$] l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $2(pk+r) = 2(pk'+r')$ [resp. par $2(qk+r-p)+1 = 2(qk'+r'-p)+1$] soit par $pk+r = pk'+r'$ [resp. par $qk+r-p = qk'+r'-p$] avec $0 \leq r, r' \leq p-1$ [resp. $0 \leq r-p, r'-p \leq q-1$] ce qui équivaut à $k = k'$ et $r = r'$ du fait de l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne par p [resp. par q]. On a donc $n = m$ et σ est injective.
   Si m est un entier pair, il s'écrit $m = 2s = 2(pk+r)$ avec $0 \leq r \leq p-1$ en effectuant la division euclidienne de s par p, soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)\,k + r$. Si m est un entier impair, il s'écrit $m = 2s+1 = 2(qk+r')+1$ avec $0 \leq r' \leq q-1$ en effectuant la division euclidienne de s par q, soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)\,k + p + r'$. L'application σ est donc surjective.
2. Soit $n = (p+q)\,k + r$ un entier avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq p+q-1$.
   (a) Pour $r = p+q-1$, on a $S_n = T_k$ et $\varepsilon_k = 0$, pour $0 \leq r \leq p+q-2$, on a :
   $$S_n = \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} v_j - \sum_{j=(p+q)k+r+1}^{(p+q)k+p+q-1} v_j = T_k - \varepsilon_k$$
   avec $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ et :
   $$|\varepsilon_k| \leq \left|v_{(p+q)k+1}\right| + \cdots + \left|v_{(p+q)k+p+q-1}\right| \leq \frac{p+q-1}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$
   (b) On a :
   $$\begin{aligned} T_k &= \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} u_{\sigma(j)} = \sum_{r=0}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma((p+q)i+r)} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(pi+r)} + \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(qi+r-p)+1} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} - \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(qi+r-p)+2} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} \end{aligned}$$
   En utilisant la division euclidienne par q, on a :
   $$\{qi+s+1 \mid 0 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq s \leq q-1\} = \{1, 2, \cdots, qk+q\}$$
   et $\displaystyle\sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} = \sum_{j=1}^{q(k+1)} \frac{1}{j} = H_{q(k+1)}$. En remarquant que les entiers de la forme $2(pi+r)+1$ où $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq s \leq p-1$ sont les entiers

impairs compris entre 1 et $2pk + 2p - 1$ (division euclidienne par $2p$), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2\left(pi+r\right)+1} &= \sum_{s=0}^{2p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2pi+s+1} - \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2pi+2r+2}\\ &= \sum_{s=0}^{2p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2pi+s+1} - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{pi+r+1}\\ &= \sum_{j=1}^{2p(k+1)}\frac{1}{j} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p(k+1)}\frac{1}{j} = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}H_{p(k+1)}\end{aligned}$$

On a donc $T_k = H_{2p(k+1)} - \dfrac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right)$.

(c) On utilisant $H_n = \ln(n) + \delta_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = \gamma$, on a :

$$\begin{aligned}T_k &= H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right)\\ &= \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + \delta_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(\delta_{p(k+1)} + \delta_{q(k+1)}\right)\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$. Toutes les suites extraites $\left(S_{(p+q)k+r}\right)_{k\geq 1}$ pour $0 \leq r \leq p+q-1$ convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers cette limite, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

Exo Sup 2.4. Permutation des termes d'une série convergente

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(\sigma(n) - n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que pour toute série convergente $\sum u_n$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Solution. Si la suite $(\sigma(n) - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe un entier N tel que $|\sigma(n) - n| \leq N$, ou encore $n - N \leq \sigma(n) \leq n + N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme σ est bijective, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$ il existe un entier j tel que $k = \sigma(j)$ et avec $j - N \leq \sigma(j) = k \leq j + N$, on déduit que cet entier j est compris entre 0 et $k + N$. Il en résulte que la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est une partie de la somme $\sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)}$ et $\sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{\substack{j=0\\ \sigma(j)\geq n+1}}^{n+N} u_{\sigma(j)}$. De plus avec $\sigma(j) \leq j + N \leq n + 2N$, on déduit que :

$$\{\sigma(j) \mid 0 \leq j \leq n+N \text{ et } \sigma(j) \geq n+1\} \subset \{n+1, \cdots, n+2N\}$$

et $\left| \sum_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leq \sum_{\substack{j=0 \\ \sigma(j) \geq n+1}}^{n+N} \left| u_{\sigma(j)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+2N} |u_k| = \varepsilon_n$. Comme chacune des suites $(|u_{n+r}|)_{n \in \mathbb{N}}$ pour r compris entre 1 et $2N$ tend vers 0, la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers 0 (somme finie de suites qui tendent vers 0). Il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$, ce qui signifie que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente avec $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Exo Sup 3.1. Polynomes de Bernstein

L'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Pour tout entier non nul n et tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ pour tout réel x et à toute fonction $f \in E$, on associe la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales de Bernstein définie par $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que, pour toute fonction $f \in E$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$B_n(xf) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))' + xB_n(f)$$

2. *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note e_k la fonction polynomiale définie par $e_k(x) = x^k$ pour tout réel x.*
   (a) *Calculer $B_n(e_k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,1,2\}$.*
   (b) *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) B_{n,k}(x) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

3.
   (a) *Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a :*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$$

   (la somme étant nulle quand l'ensemble des entiers k compris entre 0 et n tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha$ est vide).

(b) *Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*

4. *Montrer le théorème de Weierstrass : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$. Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.*

5. *Montrer que si une fonction f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales, c'est alors une fonction polynomiale (le théorème de Weierstrass n'est pas valable sur $\mathbb{R}$).*

6.

(a) *Montrer qu'une fonction $f \in E$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers relatifs si, et seulement si, $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers relatifs.*

(b) *En déduire que, pour tout réel $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, l'anneau $\mathbb{Z}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs est dense dans $\left(\mathcal{C}^0([\delta, 1-\delta]), \|\cdot\|_\infty\right)$.*

7.

(a) *Montrer que pour tout entier non nul n, on a :*

$$B'_{n,k} = \begin{cases} -nB_{n-1,0} \text{ pour } k = 0 \\ n\left(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}\right) \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 \\ nB_{n-1,n-1} \text{ pour } k = n \end{cases}$$

(b) *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$, montrer que :*

$$B_n(f)' = n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k} \qquad (3.1)$$

(c) *Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, montrer que la suite $\left(B_n(f)'\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.*

Solution.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, on a :

$$B'_{n,k}(x) = \begin{cases} -n(1-x)^{n-1} \text{ si } k = 0 \\ \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k - nx) \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ nx^{n-1} \text{ si } k = n \end{cases}$$

donc $x(1-x)B'_{n,k}(x) = (k-nx)B_{n,k}(x)$. Il en résulte que pour $f \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))' &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) - x \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \\ &= B_n(xf) - xB_n(f)\end{aligned}$$

2.

(a) Pour tout réel x, on a :

$$B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

soit $B_n(e_0) = e_0$. Il en résulte que :

$$B_n(e_1)(x) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(e_0))'(x) + xB_n(e_0)(x) = x$$

soit $B_n(e_1) = e_1$ et :

$$B_n(e_2)(x) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(e_1))'(x) + xB_n(e_1)(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$$

soit $B_n(e_2) = \dfrac{1}{n}e_1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)e_2$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_{n,k}(x) - x \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) \\ &= B_n(e_1)(x) - xB_n(e_0)(x) = x - x = 0\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) &= B_n(e_2)(x) - 2xB_n(e_1)(x) + x^2 B_n(e_0)(x) \\ &= \frac{x(1-x)}{n} + x^2 - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

3.

(a) Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \geq \alpha$, on a $1 \leq \dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} B_{n,k}(x) &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}\end{aligned}$$

(la fonction $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $\dfrac{1}{2}$).

(b) En utilisant l'égalité $B_n(e_0) = 1$, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) B_{n,k}(x)$$

La fonction f étant continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\left((x,y) \in [0,1]^2 \text{ et } |x-y| < \alpha \right) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
&|B_n(f)(x) - f(x)| \\
&\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| < \alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \\
&\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \alpha} B_{n,k}(x) + \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| < \alpha} B_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{4\alpha^2 n} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \varepsilon
\end{aligned}$$

soit $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \varepsilon$. Désignant par n_0 un entier non nul tel que $\dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, on déduit que $\|B_n(f) - f\|_\infty < 2\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, donc $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(a + t(b-a))$ est continue, donc la suite de fonctions polynomiales $(B_n(g))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$ et la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_n(x) = B_n(g)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$ sur $[a,b]$.

5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales, cette suite vérifie alors le critère de Cauchy uniforme, c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n > m \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

En particulier, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_{n_0}(x)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq n_0$ la fonction polynomiale $P_n - P_{n_0}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, elle est donc constante. Il existe donc une suite de réels $(c_n)_{n\geq n_0}$ telle que $P_n = P_{n_0} + c_n$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers $f(0)$, on déduit que la suite $(c_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $f(0) - P_{n_0}(0)$ et pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \geq n_0}} P_n(x) = P_{n_0}(x) + \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \geq n_0}} c_n = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0)$$

La fonction f est donc polynomiale.

6.

(a) S'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ qui converge vers f (même simplement), on a alors $f(0) = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(0)$, où $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers relatifs. Comme $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, on a nécessairement $f(0) \in \mathbb{Z}$. De manière analogue, on voit que $f(1) \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, soit $f \in E$ telle que $f(0)$ et $f(1)$ soient entiers. En notant $[\cdot]$ la fonction partie entière, on associe à la fonction f la suite $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,1], \ P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers, on a, pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leq B_n(f)(x) - P_n(f)(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

et avec $\displaystyle\binom{n}{k} = n \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-j}{k-j+1} \geq n$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$, on déduit que :

$$0 \leq B_n(f)(x) - P_n(f)(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}$$

Puis avec :

$$\begin{aligned} \|f - P_n(f)\|_\infty &\leq \|f - B_n(f)\|_\infty + \|B_n(f) - P_n(f)\|_\infty \\ &\leq \|f - B_n(f)\|_\infty + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

et la convergence uniforme de la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers f, on déduit que la suite de polynômes à coefficients entiers relatifs $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$.

(b) Une fonction $f \in \mathcal{C}^0([\delta, 1-\delta])$ se prolongeant en une fonction $f \in E$ nulle en 0 et en 1, on en déduit que $\mathbb{Z}[x]$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0([\delta, 1-\delta]), \|\cdot\|_\infty\right)$.

7.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a vu que $B'_{n,0}(x) = -nB_{n-1,0}(x)$, $B'_{n,n}(x) = nB_{n-1,n-1}(x)$ et pour $1 \leq k \leq n-1$ avec $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} B'_{n,k}(x) &= k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - n\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} \\ &= n\left(\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}\right) \\ &= n\left(B_{n-1,k-1}(x) - B_{n-1,k}(x)\right) \end{aligned}$$

(b) Pour $n \geq 2$, on a :

$$B_n(f)' = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B'_{n,k}$$

$$= n\left(-B_{n-1,0}f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}) + f(1)B_{n-1,n-1}\right)$$

$$\begin{aligned} &= n\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n-1,k}\right) \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k} \end{aligned}$$

ce qui est encore valable pour $n = 1$ $(B_1(f)(x) = f(0)(1-x) + f(1)x)$.

(c) Pour $n \geq 2$ et k compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f'(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f'\left(\frac{k+t}{n}\right)dt$$

donc, pour $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^1 f'\left(\frac{k+t}{n}\right)dt\right)B_{n-1,k}(x)$$

et :

$$B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^1 \left(f'\left(\tfrac{k+t}{n}\right) - f'\left(\tfrac{k}{n-1}\right)\right)dt\right)B_{n-1,k}(x)$$

La fonction f' étant uniformément continue sur l'intervalle compact $[0,1]$, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\left((x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| < \eta\right) \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$$

Pour $0 \leq k \leq n-1$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\left|\frac{k+t}{n} - \frac{k}{n-1}\right| = \frac{|t(n-1)-k|}{n(n-1)} \leq \frac{(n-1)+k}{n(n-1)} \leq \frac{2}{n}$$

donc il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que $\left|\frac{k+t}{n} - \frac{k}{n-1}\right| < \eta$ pour tous $n \geq n_0$, k compris entre 0 et $n-1$ et $t \in [0,1]$, ce qui nous donne $\left|f'\left(\frac{k+t}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right| < \varepsilon$. Il en résulte que pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\left|B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)\right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-1,k}(x) \leq \varepsilon B_{n-1}(e_0)(x) = \varepsilon$$

soit $\left\|B_n(f)' - B_{n-1}(f')\right\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et :

$$\begin{aligned}\left\|B_n(f)' - f'\right\|_\infty &\leq \left\|B_n(f)' - B_{n-1}(f')\right\|_\infty + \|B_{n-1}(f') - f'\|_\infty \\ &\leq \varepsilon + \|B_{n-1}(f') - f'\|_\infty\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \|B_{n-1}(f') - f'\|_\infty = 0$, ce qui nous assure de l'existence de $n_1 \geq n_0$ tel que $\left\|B_n(f)' - f'\right\|_\infty \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$. On a donc ainsi montré que la suite $\left(B_n(f)'\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

Exo Sup 3.2. Équation des ondes

Il s'agit de déterminer une fonction u définie sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{array}\right. \tag{3.2}$$

où $c > 0$, f et g sont des fonctions données, les hypothèses sur ces fonctions étant précisées en cours d'exercice.

1. *On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,\pi]$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$, $f''(0) = f''(\pi) = 0$ et on la prolonge en une fonction impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ que l'on note encore f.*

   (a) *Justifier le fait que la fonction f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nx)$.*

(b) *Vérifier que les fonctions* $u_1(x,t) = f(x-ct)$ *et* $u_2(x,t) = f(x+ct)$ *sont solutions de l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$ *avec la condition* $u(x,0) = f(x)$.

(c) *Construire, à partir de* u_1 *et* u_2 *une fonction* u_3 *solution de :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

2. *On suppose que* g *est de classe* $\mathcal{C}^3$ *sur* $[0,\pi]$ *avec* $g(0) = g(\pi) = 0$ *et on désigne par* G *la primitive de* g *sur* $[0,\pi]$ *telle que* $\int_0^\pi G(x)\,dx = 0$. *On prolonge* G *en une fonction paire et* 2π*-périodique sur* $\mathbb{R}$ *et* g *en une fonction impaire et* 2π*-périodique sur* $\mathbb{R}$.

(a) *Justifier l'existence et l'unicité de* G.

(b) *Justifier le fait que la fonction* G *est développable en série de Fourier sur* $\mathbb{R}$ *avec* $G(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n} \cos(nx)$.

(c) *Vérifier que les fonctions* $v_1(x,t) = G(x-ct)$ *et* $v_2(x,t) = G(x+ct)$ *sont solutions de l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$ *avec la condition* $u(x,0) = G(x)$.

(d) *Construire, à partir de* v_1 *et* v_2 *une fonction* v_3 *solution de :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

3. *Déduire de ce qui précède que la fonction* u *définie par :*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(f) \cos(nct) + \frac{b_n(g)}{n \cdot c} \sin(nct) \right) \sin(nx)$$

est solution de (3.2).

Solution.

1.

(a) La fonction prolongée f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. Compte tenu du fait que les $a_n(f)$ sont tous nuls (f est impaire), on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$. En fait, avec nos hypothèses, le prolongement f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même des fonctions u_1, u_2 et pour $k = 1, 2$, on a $u_k(x, 0) = f(x)$ et :

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}(x,t) = c^2 f''(x \pm ct) = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(x,t)$$

(c) On a :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = -cf'(x) = -\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0)$$

$$u_1(0,t) = f(-ct) = -f(ct) = -u_2(0,t)$$
$$u_1(\pi,t) = f(\pi - ct) = f(-\pi - ct) = -f(\pi + ct) = -u_2(\pi,t)$$

donc la fonction $u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ vérifie $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ avec les conditions $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ et $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

2.

(a) La fonction G est définie par $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt + \lambda$ pour $x \in [0, \pi]$ et la condition $\int_0^\pi G(x)\,dx = 0$, qui s'écrit $\int_0^\pi \left(\int_0^x g(t)\,dt\right) dx + \pi\lambda = 0$, détermine λ de manière unique.

(b) Cette fonction G est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. En effet, G est de classe $\mathcal{C}^3$ puisque g est de classe $\mathcal{C}^2$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G(-x) = \int_0^{-x} g(t)\,dt + \lambda = -\int_0^x g(-u)\,du + \lambda = \int_0^x g(u)\,du + \lambda = G(x)$$

puisque g est impaire et :

$$G(x + 2\pi) = \int_0^{x+2\pi} g(t)\,dt + \lambda = G(x) + \int_x^{x+2\pi} g(t)\,dt$$

avec :

$$\int_x^{x+2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 0$$

puisque g est impaire.
Le théorème de Dirichlet nous dit que G est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et avec $a_0(G) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi G(x)\,dx = 0$, $a_n(G) = \frac{b_n(g)}{n}$ pour tout $n \geq 0$, on déduit que, pour tout réel x, on a :

$$G(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n} \cos(nx)$$

la convergence étant uniforme.

(c) La fonction G étant de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, \pi]$ il en est de même de v_k, pour $k = 1, 2$ et on a $v_k(x, 0) = G(x)$ et :

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}(x, t) = c^2 G''(x \pm ct) = c^2 g'(x \pm ct) = c^2 \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}(x, t)$$

(d) On a :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}(x, 0) = -cG'(x) = -cg(x) = -\frac{\partial v_2}{\partial t}(x, 0)$$

$$\begin{aligned} v_1(0, t) &= G(-ct) = G(ct) = v_2(0, t) \\ v_1(\pi, t) &= G(\pi - ct) = G(-\pi - ct) = G(\pi + ct) = v_2(\pi, t) \end{aligned}$$

et la fonction $v_3 = \frac{1}{2c}(v_2 - v_1)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t}(x, t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \\ \forall x \in [0, \pi], \ u(x, 0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

3. La fonction $u = u_3 + v_3$ est solution de (3.2) et elle s'écrit :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c}(G(x + ct) - G(x - ct))$$

avec :

$$\begin{aligned} f(x + ct) + f(x - ct) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)(\sin(nx + nct) + \sin(nx - nct)) \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nx)\cos(nct) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} G(x + ct) - G(x - ct) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n}(\cos(nx - nct) - \cos(nx + nct)) \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n}\sin(nx)\sin(nct) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(f)\cos(nct) + \frac{b_n(g)}{nc}\sin(nct) \right) \sin(nx)$$

Problème 3.1. Polynômes de Legendre et séries de Fourier-Legendre

$\mathcal{C}^0([-1,1])$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}^n([-1,1])$ est l'algèbre des fonctions n fois continûment dérivables de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$ est l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}[x]$ est la sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$ formée des fonctions polynomiales et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus égal à n.

– I – Résultats préliminaires

Si $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, est continue par morceaux, on notera en tout point de discontinuité a de f :

$$f\left(a^-\right) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \ \text{(pour } a > -1\text{) et } f\left(a^+\right) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \ \text{(pour } a < 1\text{)}$$

On note $\mathcal{E}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues par morceaux de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(-1) = f(-1^+)$, $f(1) = f(1^-)$ et en tout point $a \in]-1,1[$ où f est discontinue on ait $f(a) = \frac{1}{2}\left(f(a^-) + f(a^+)\right)$. Pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{E}$, on note :

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,\ \|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \ \text{et}\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$$

1. Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f \mid g\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.
2. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est dense dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$, puis que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales est dense dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^n([-1,1])$, on a :

$$\left\langle f^{(n)} \mid g\right\rangle = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-1-k)} g^{(k)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^n \left\langle f \mid g^{(n)}\right\rangle$$

   (formule d'intégrations par parties itérées).
4. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx$.

– II – Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par π_{2n} et L_n les fonctions polynomiales définies par $\pi_{2n}(x) = \left(x^2-1\right)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\pi_{2n}^{(n)}$

1.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n de même parité que n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $L_n(0)$ ainsi que les coefficients de x^n et x^{n-1} dans L_n.

(b) En utilisant la formule de Leibniz, calculer pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$, on a $2^n n! \langle L_n \mid f \rangle = (-1)^n \left\langle \pi_{2n} \mid f^{(n)} \right\rangle$.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ (pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$). Calculer $\|L_n\|$ et $\langle L_n \mid x^n \rangle$ (en notant abusivement x^n la fonction $x \mapsto x^n$).

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme L_n admet n racines réelles simples $x_{n,1} < \cdots < x_{n,n}$ dans l'intervalle $]-1, 1[$.

(f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique suite $(\lambda_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ de réels strictement positifs telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$, on ait $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} P(x_{n,k})$.

2.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(n+1) L_{n+1}(x) + n L_{n-1}(x) = (2n+1)\, x L_n(x) \tag{3.3}$$

$$n(n+1)\left(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)\right) = (2n+1)\left(x^2 - 1\right) L_n'(x) \tag{3.4}$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous réels x, t on a :

$$(x - t) \sum_{k=0}^{n} (2k+1) L_k(x) L_k(t) = (n+1)\left(L_{n+1}(x) L_n(t) - L_n(x) L_{n+1}(t)\right)$$

(*formule de Darboux-Christoffel*).

3. En notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} x_{n,k}$ la plus grande des racines de L_n, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (nous verrons plus loin que cette limite vaut 1).

4. Pour $(x, r) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}^{+,*}$, on note $\gamma_{x,r}$ le lacet défini par $\gamma_{x,r}(t) = x + re^{it}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$L_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{x,r}} \frac{\left(z^2 - 1\right)^n}{(z - x)^{n+1}} \frac{dz}{2^n}$$

(*formule intégrale de Schläffi*) et :

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1 - x^2} \sin(t)\right)^n dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t)\right)^n dt$$

(*formule intégrale de Laplace*).

5. En utilisant la formule intégrale de Laplace, calculer pour tout entier naturel n, $L_n(1)$, $L_n(-1)$ et $\|L_n\|_\infty$.

6. Montrer que, pour tout réel $\delta \in \left]0,1\right[$, la suite de fonctions polynomiales $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-\delta,\delta]$.
7. Montrer que :

$$\forall (x,t) \in [-1,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right| \leq e^{-\frac{2}{\pi^2}(1-x^2)t^2}$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a $|L_n(x)| \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$.

Retrouver le résultat de **II.6**.

8.

(a) Soit α un réel. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\alpha^2\cos^2(t)}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)}$.

(b) Montrer que, pour tout $(x,y) \in [-1,1] \times \left]-1,1\right[$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{y^2-2xy+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, y^n$$

9.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que pour tout $(x,y) \in [-1,1] \times \left]-1,1\right[$, on ait $\dfrac{1}{y^2-2xy+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^n$, chaque polynôme T_n étant de degré n et de la parité de n.

(b) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \ T_1(x) = 2x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \ \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Préciser le coefficient dominant de T_n.

(c) Donner une expression simple de $\sin(\theta)\, T_n(\cos(\theta))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_n(x) = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) < x_n < 1$ (x_n est la plus grande des racines de L_n) et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

– III – Opérateur de Legendre

On définit l'opérateur de Legendre $\mathcal{L}$ sur l'espace $\mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R}), \ \mathcal{L}(f) = \left(x^2-1\right)f'' + 2xf'$$

1. Montrer que l'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique positif (*i.e.* $\langle \mathcal{L}(f) \mid g\rangle = \langle f \mid \mathcal{L}(g)\rangle$ et $\langle \mathcal{L}(f) \mid f\rangle \geq 0$ pour toutes fonctions f,g dans $\mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\left(x^2-1\right)\pi'_{2n}(x) = 2nx\pi_{2n}(x)$, puis que $\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)L_n$.
   (b) En étudiant les variations, pour tout entier naturel n, de la fonction θ_n définie sur $[-1,1]$ par $\theta_n(x) = (L_n(x))^2 + \dfrac{(1-x^2)}{n(n+1)}\left((L'_n(x))^2\right)$, retrouver la valeur de $\|L_n\|_\infty$.
3. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$xL'_n - L'_{n-1} = nL_n,\ L'_{n+1} = L'_{n-1} + (2n+1)L_n = xL'_n + (n+1)L_n$$
4. Pour tout réel λ, on note $\mathcal{E}_\lambda = \ker(\mathcal{L} - \lambda I_d)$.
   (a) Déterminer l'ensemble Σ des réels λ tels que $\mathcal{E}_\lambda \neq \{0\}$.
   (b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \Sigma$, l'espace $\mathcal{E}_\lambda$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur.
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$
de la forme $u(t,x) = a(t)\,b(x)$ avec a de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et b de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$.

– IV – Séries de Fourier-Legendre

On désigne par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Legendre normalisés. Cette famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[x]$. À toute fonction $f \in \mathcal{E}$ on associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} = (\langle f \mid P_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficient de Fourier-Legendre et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,P_k$ la $n^{ème}$ somme partielle de la série de Fourier-Legendre de f.

1. Montrer que $\|f - S_n(f)\| = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[x]}\|f - Q\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{E}$, ($S_n(f)$ est la meilleure approximation pour la norme $\|\cdot\|$ de f par des éléments de $\mathbb{R}_n[x]$).
2. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, la série de terme général $c_n^2(f)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f) \leq \|f\|^2$ (*inégalité de Bessel*), puis que $\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*).
3. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, la série de fonctions $\sum c_n(f)\,P_n$ converge vers f dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ (*convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier-Legendre*). En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f) = \|f\|^2$ (*égalité de Parseval*).

4. Montrer que deux fonctions f, g dans $\mathcal{E}$ sont égales si, et seulement si, elles ont les mêmes coefficients de Fourier-legendre.
5. Soit $f \in \mathcal{C}^1([-1,1])$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$c_n(f) = \frac{c_{n-1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} - \frac{c_{n+1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$$
En déduire que la série de Fourier-Legendre de f converge simplement sur $]-1,1[$, la convergence étant uniforme sur tout segment $[-\delta,\delta]$ contenu dans $]-1,1[$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute fonction $f \in \mathcal{E}$ et tout $x \in [-1,1]$, on a $S_n(f)(x) = \int_{-1}^{1} K_n(t,x) f(t)\,dt$, où K_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\begin{aligned} K_n(t,x) &= \sum_{k=0}^{n} P_k(t) P_k(x) \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} \begin{cases} \dfrac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x} & \text{si } t \neq x \\ P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) & \text{si } t = x \end{cases} \end{aligned}$$
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$, on a $\int_{-1}^{1} K_n(t,x)\,dt = 1$.
8. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que si f admet une dérivée à droite et à gauche en un point $x \in]-1,1[$, on a alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n(x)$.
9. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ vérifie une condition de Hölder de constante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et d'exposant $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (*i.e.* $|f(t) - f(x)| \leq \lambda |t-x|^\alpha$ pour tout $t \in [-1,1]$), la série de Fourier-Legendre $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f) P_k$ converge alors simplement vers f sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.
10. Calculer les coefficients de Fourier-Legendre de la fonction f définie par :
$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1,\alpha[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = \alpha \\ 1 \text{ si } x \in]\alpha, 1] \end{cases}$$
où α est un réel strictement compris entre -1 et 1. Étudier la série de Fourier-Legendre correspondante.
11. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'application S_n est linéaire continue de $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ et que sa norme d'opérateur $N_\infty(S_n) = \sup\limits_{f \in \mathcal{E}\setminus\{0\}} \dfrac{\|S_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est donnée par :
$$N_\infty(S_n) = \sup_{x \in [-1,1]} \int_{-1}^{1} |K_n(x,t)|\,dt$$

Solution.

– I – Résultats préliminaires

1. Des propriétés de l'intégrale sur un segment, on déduit que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{E}$. Si $f \in \mathcal{E}$ est telle que $\langle f \mid f \rangle = 0$, en notant $a_1 < \cdots < a_p$ ses éventuels points de discontinuités dans $]a_0, a_{p+1}[=]-1,1[$, on a :
$$0 = \int_{-1}^{1} (f(t))^2 \, dt = \sum_{k=0}^{p} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t))^2 \, dt$$
donc $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t))^2 \, dt = 0$ pour tout k compris entre 0 et p et f est nulle sur chaque intervalle $I_k =]a_k, a_{k+1}[$ puisque f^2 est continue positive sur I_k. On a alors $f\left(a_k^-\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a_k \\ x < a_k}} f(x) = 0$, $f\left(a_k^+\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a_k \\ x > a_k}} f(x) = 0$ et en conséquence, $f(a_k) = \dfrac{f\left(a_k^-\right) + f\left(a_k^+\right)}{2} = 0$ (pareil en -1 et 1). La fonction f est donc nulle sur $[-1,1]$. En définitive, l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est définie et c'est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

2.

   (a) Soient $f \in \mathcal{E}$ non continue (sinon, il n'y a rien à montrer) et $a_1 < \cdots < a_p$ ses points de discontinuités dans $]a_0, a_{p+1}[=]-1,1[$. Pour tout réel $\delta > 0$ tel que $[a_k - \delta, a_k + \delta] \subset [-1,1]$ pour k compris entre 1 et p, en désignant par f_δ la fonction définie sur $[-1,1]$ par :
$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{p} [a_k - \delta, a_k + \delta] \\ f(a_k - \delta) \dfrac{a_k + \delta - x}{2\delta} + f(a_k + \delta) \dfrac{x - (a_k - \delta)}{2\delta} \\ \text{si } x \in [a_k - \delta, a_k + \delta] \end{cases}$$
(f_δ coïncide avec f sur $[-1,1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} [a_k - \delta, a_k + \delta]$, est affine sur chaque intervalle $[a_k - \delta, a_k + \delta]$ et est continue sur $[-1,1]$ comme indiqué en figure 3.1), on a :
$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\|^2 &= \sum_{k=1}^{p} \int_{a_k - \delta}^{a_k + \delta} (f(t) - f_\delta(t))^2 \, dt \\ &\leq 4 \|f\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{p} \int_{a_k - \delta}^{a_k + \delta} dt \leq 8p \|f\|_\infty^2 \delta \end{aligned}$$
Pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ tel que $8p \|f\|_\infty^2 \delta < \varepsilon^2$ et la fonction f_δ qui est dans $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est telle que $\|f - f_\delta\| < \varepsilon$. Ce qui prouve la densité de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$.

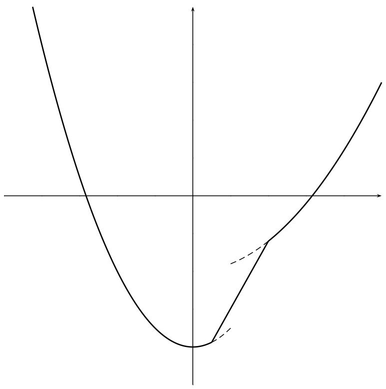

FIGURE 3.1 –

(b) Soient $f \in \mathcal{E}$, $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ telle que $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Le théorème de Weierstrass nous dit qu'il existe une fonction polynomiale P_ε telle que $\|f_\varepsilon - P_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$, donc $\|f_\varepsilon - P_\varepsilon\|^2 \leq \|f_\varepsilon - P_\varepsilon\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} dt < 2\varepsilon^2$ et en conséquence, $\|f - P_\varepsilon\| \leq \|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - P_\varepsilon\| < \left(1+\sqrt{2}\right)\varepsilon$, ce qui prouve la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$.

3. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, une intégration par parties nous donne pour f, g dans $\mathcal{C}^1([-1,1])$:

$$\langle f' \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(x)\, g(x)\, dx = [fg]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(x)\, g'(x)\, dx = [fg]_{-1}^{1} - \langle f \mid g'\rangle$$

Supposons le résultat acquis pour $n \geq 1$ et soient f, g dans $\mathcal{C}^{n+1}([-1,1])$. Le cas $n = 1$ appliqué au couple $\left(f^{(n)}, g\right)$ nous donne :

$$\left\langle f^{(n+1)} \mid g\right\rangle = \left\langle \left(f^{(n)}\right)' \mid g\right\rangle = \left[f^{(n)} g\right]_{-1}^{1} - \left\langle f^{(n)} \mid g'\right\rangle$$

puis appliquant l'hypothèse de récurrence au couple $\left(f^{(n)}, g'\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\langle f^{(n+1)} \mid g\right\rangle &= \left[f^{(n)} g\right]_{-1}^{1} + \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\left\langle f \mid g^{(n+1)}\right\rangle \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\left\langle f \mid g^{(n+1)}\right\rangle\end{aligned}$$

4. Pour tout entier naturel n, on a :

$$W_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n\, dx = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} \left((x+1)^{2n}\right)^{(n)} (x-1)^n\, dx$$

et utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$W_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n}\, dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

compte tenu du fait que -1 est racine d'ordre $2n$ de $(x+1)^{2n}$ et 1 est racine d'ordre n de $(x-1)^n$.

– II – Polynômes de Legendre

1.

(a) Pour $n = 0$ on a $\pi_0 = L_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, la fonction polynômiale $\pi_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^{2k}$ est de degré $2n$ et :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{\pi_{2n}^{(n)}(x)}{2^n n!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} x^{2k-n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{n} x^{2k-n} \qquad (3.5) \end{aligned}$$

est un polynôme de degré n. Le polynôme π_{2n} étant pair, sa dérivée d'ordre n est de la parité de n, ce qui entraîne que $L_{2p+1}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression (3.5) de L_{2p}, on a $L_{2p}(0) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \binom{2p}{p}$. Le coefficient dominant de L_n est $\lambda_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$ et le coefficient de x^{n-1} est nul du fait de la parité de $(-1)^n L_n$.

(b) En utilisant la formule de Leibniz, on a aussi :

$$\begin{aligned} 2^n n! L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (x+1)^k \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k \,\% \qquad (3.6) \end{aligned}$$

et le coefficient dominant de L_n est $\frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, ce qui nous donne l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ qui peut aussi se montrer avec des arguments combinatoires. Utilisant l'expression (3.6) de L_n, on a $L_n(1) = \frac{1}{2^n} 2^n = 1$ et la propriété de parité nous donne $L_n(-1) = (-1)^n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$, on a :

$$\begin{aligned} 2^n n! \langle L_n \mid f\rangle &= \left\langle \pi_{2n}^{(n)} \mid f \right\rangle \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \pi_{2n}^{(n-1-k)}(x) f^{(k)}(x)\right]_{-1}^{1} + (-1)^n \left\langle \pi_{2n} \mid f^{(n)} \right\rangle \\ &= (-1)^n \left\langle \pi_{2n} \mid f^{(n)} \right\rangle \end{aligned}$$

(-1 et 1 étant racines d'ordre n du polynôme π_{2n}, on a $\pi_{2n}^{(n-1-k)}(\pm 1) = 0$ pour k compris entre 0 et $n-1$).

(d) La famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ qui est formée de $n+1$ polynômes non nuls échelonnés en degrés dans $\mathbb{R}_n[x]$ est une base de cet espace vectoriel (qui est de dimension $n+1$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a $P^{(n)} = 0$ et de la question précédente, on déduit que $\langle L_n \mid P\rangle = 0$. Chaque polynôme L_k étant de degré k, on en déduit que $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[x]$. Pour $P = L_n$, on a :

$$\begin{aligned} 2^n n! \left\|L_n\right\|^2 &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \pi_{2n}(x) L_n^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} W_n \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} 2^n n! \end{aligned}$$

soit $\|L_n\| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$. En écrivant que $L_n(x) = \lambda_n x^n + P_{n-1}(x)$, où $P_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on obtient :

$$\langle L_n \mid x^n\rangle = \frac{1}{\lambda_n} \langle L_n \mid L_n - P_{n-1}\rangle = \frac{\left\|L_n\right\|^2}{\lambda_n} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n!)}$$

(e) Soit $\in \mathbb{N}^*$. Si L_n ne s'annule pas sur l'intervalle $]-1,1[$, il garde alors un signe constant (par continuité) et on a $\langle L_n \mid L_0\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)\, dt \neq 0$, ce qui contredit l'orthogonalité de L_n et L_0 pour $n \geq 1$. Le polynôme L_n a donc au moins une racine réelle dans $]-1,1[$. Si $x_1 \in]-1,1[$ est une racine de L_n de multiplicité $p \geq 2$, on peut alors écrire $L_n(x) = (x-x_1)^2 P_{n-2}(x)$ avec $P_{n-2} \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$ et on a :

$$0 = \langle L_n \mid P_{n-2}\rangle = \int_{-1}^{1} (t-x_1)^2 P_{n-2}^2(t)\, dt > 0$$

soit une impossibilité. Les racines de L_n qui sont dans $]-1,1[$ sont donc toutes simples. Notons $x_1, ..., x_p$ ces racines. Si $p < n$, on peut alors écrire $L_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (x-x_k) P_{n-p}(x)$,avec $P_{n-p} \in \mathbb{R}_{n-p}[x]$ de signe constant dans $]-1,1[$ et on a :

$$0 = \left\langle L_n \mid \prod_{k=1}^{p} (x-x_k) \right\rangle = \int_{-1}^{1} \prod_{k=1}^{p} (t-x_k)^2 P_{n-p}(t)\, dt \neq 0$$

soit encore une impossibilité. On a donc $p = n$, c'est-à-dire que toutes les racines de L_n sont dans $]-1, 1[$ et simples.

(f)

i. Par division euclidienne, tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ s'écrit sous la forme $P = QL_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et on a :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \langle L_n \mid Q\rangle + \int_{-1}^{1} R(t)\,dt = \int_{-1}^{1} R(t)\,dt$$

puisque $L_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[x])^{\perp}$. Comme $P(x_{n,k}) = R(x_{n,k})$ pour tout k compris entre 1 et n, il nous suffit de montrer le résultat annoncé sur $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, ce qui équivaut à prouver que le système linéaire de n équations aux n inconnues $\lambda_{n,k}$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{n,i}^{k-1}\lambda_{n,i} = \int_{-1}^{1} x^{k-1}dt \ \ (1 \leq k \leq n)$$

a une unique solution. Le déterminant de ce système étant le déterminant de Vandermonde $\prod\limits_{1\leq j<i\leq n} (x_{n,i} - x_{n,j}) \neq 0$, on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution $(\lambda_{n,k})_{1\leq k\leq n}$.

ii. En désignant, pour tout k compris entre 1 et n, par $P_{n,k} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $P_{n,k}(x_{n,i}) = 0$ pour $j \neq k$ et $P_{n,k}(x_{n,k}) = 1$, on a $P_{n,k}^2 \in \mathbb{R}_{2n-2}[x]$ et $\lambda_{n,k} = \int_{-1}^{1} P_{n,k}^2(t)\,dt > 0$. On a aussi :

$$P_{n,k}(x) = \frac{\prod\limits_{1\leq j\neq k\leq n}(x - x_{n,j})}{\prod\limits_{1\leq j\neq k\leq n}(x_{n,k} - x_{n,j})} = \frac{1}{L_n'(x_{n,k})}\frac{L_n(x)}{x - x_{n,k}}$$

et $\lambda_{n,k} = \dfrac{1}{L_n'(x_{n,k})}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{L_n(t)}{t - x_{n,k}}dt.$

2.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $xL_n \in \mathbb{R}_{n+1}[x] = \operatorname{Vect}\{L_0, \cdots, L_{n+1}\}$, donc $xL_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\alpha_k L_k$ avec $\alpha_k \|L_k\|^2 = \langle xL_n \mid L_k\rangle = \langle L_n \mid xL_k\rangle = 0$ pour $k+1 < n$, ce qui nous donne $xL_n = \alpha_{n+1}L_{n+1} + \alpha_n L_n + \alpha_{n-1}L_{n-1}$. Comme L_n est de la parité de n, la fonction xL_n^2 est impaire et :

$$\alpha_n \|L_n\|^2 = \langle xL_n \mid L_n\rangle = \int_{-1}^{1} xL_n^2(x)\,dx = 0$$

et il reste $xL_n = \alpha_{n+1}L_{n+1} + \alpha_{n-1}L_{n-1}$. Le coefficient dominant de L_n est $\lambda_n = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ et l'identification des coefficients de x^{n+1} dans la dernière égalité donne $\alpha_{n+1} = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Pour le calcul de α_{n-1}, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1}\left\|L_{n-1}\right\|^2 &= \langle L_n \mid xL_{n-1}\rangle = \langle L_n \mid \lambda_{n-1}x^n + P_{n-1}\rangle \\ &= \lambda_{n-1}\langle L_n \mid x^n\rangle = \lambda_{n-1}\frac{\left\|L_n\right\|^2}{\lambda_n}\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\alpha_{n-1} = \dfrac{\left\|L_n\right\|^2}{\left\|L_{n-1}\right\|^2}\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} = \dfrac{2n-1}{2n+1}\dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{n}{2n+1}$ et la relation de récurrence :

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) + nL_{n-1}(x) = (2n+1)\,xL_n(x)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(x^2-1\right)L_n' \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$, donc $\left(x^2-1\right)L_n' = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\beta_k L_k$ avec $\beta_n\left\|L_n\right\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)L_n'(x)\,L_n(x)\,dx = 0$ par imparité et :

$$\begin{aligned}\beta_k\left\|L_k\right\|^2 &= \left\langle\left(x^2-1\right)L_n' \mid L_k\right\rangle = \left\langle L_n' \mid \left(x^2-1\right)L_k\right\rangle \\ &= \left[\left(t^2-1\right)L_k(t)\,L_n(t)\right]_{-1}^{1} - \left\langle L_n \mid \left(x^2-1\right)L_k' + 2xL_k\right\rangle \\ &= -\left\langle L_n \mid \left(x^2-1\right)L_k' + 2xL_k\right\rangle = 0\end{aligned}$$

pour $k+1 < n$. Il reste donc $\left(x^2-1\right)L_n' = \beta_{n+1}L_{n+1} + \beta_{n-1}L_{n-1}$. L'évaluation en 1 donne $\beta_{n-1} = -\beta_{n+1}$, puis l'identification des coefficients de x^{n+1} donne $\beta_{n+1} = n\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = n\dfrac{n+1}{2n+1}$ et la relation de récurrence :

$$(2n+1)\left(x^2-1\right)L_n' = n\,(n+1)\,(L_{n+1} - L_{n-1})$$

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(2k+1)\,xL_k(x) = (k+1)\,L_{k+1}(x) + kL_{k-1}(x)$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $L_k(t)$, avec $t \in \mathbb{R}$, il vient $(2k+1)\,xL_k(x)\,L_k(t) = (k+1)\,L_{k+1}(x)\,L_k(t) + kL_{k-1}(x)\,L_k(t)$, ce qui peut aussi s'écrire en permutant les rôles de x et t :

$$(2k+1)\,tL_k(t)\,L_k(x) = (k+1)\,L_{k+1}(t)\,L_k(x) + kL_{k-1}(t)\,L_k(x)$$

En faisant la différence des deux égalités obtenues, on obtient :

$$(2k+1)\,(x-t)\,L_k(x)\,L_k(t) = U_{k+1}(t) - U_k(t)$$

en notant $U_k(t) = k\,(L_k(x)\,L_{k-1}(t) - L_{k-1}(x)\,L_k(t))$ et la somme pour k allant de 1 à n donne :

$$\begin{aligned}(x-t)\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\,L_k(x)\,L_k(t) &= U_{n+1}(t) - U_1(t) \\ &= (n+1)\,(L_{n+1}(x)\,L_n(t) - L_n(x)\,L_{n+1}(t)) - (x-t)\end{aligned}$$

soit :

$$(x-t)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,L_k(x)\,L_k(t)=(n+1)\left(L_{n+1}(x)\,L_n(t)-L_n(x)\,L_{n+1}(t)\right)$$

3. On vérifie par récurrence que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. On a $L_1(x)=x$, $L_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$ et $L_3(x)=\frac{x}{2}\left(5x^2-3\right)$, donc $x_1=0<x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}<x_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Supposons que $0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n$ pour $n\geq 3$. Si $x_{n+1}=x_n$, la relation (3.3) nous donne $L_{n-1}(x_n)=0$ avec $x_n>x_{n-1}=\max\limits_{1\leq k\leq n-1}x_{n-1,k}$, ce qui n'est pas possible. Si $x_{n+1}<x_n$, on a alors $\alpha=\max\left(x_{n-1},x_{n+1}\right)<x_n$ et pour tout $x>\alpha$:

$$(2n+1)\,xL_n(x)=(n+1)\,L_{n+1}(x)+nL_{n-1}(x)>0$$

(puisque les coefficients dominants des L_k sont strictement positifs), ce qui est incompatible avec $x_n>\alpha$ et $L_n(x_n)=0$. On a donc $x_n<x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante majorée par 1 (les x_n sont dans $]0,1[$) et en conséquence convergente vers un réel $\ell\in\left]0,1\right]$.

4.

(a) Pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{r,x}}\frac{z^{2k}}{(z-x)^{n+1}}dz&=\int_0^{2\pi}\frac{\left(x+re^{it}\right)^{2k}}{\left(re^{it}\right)^{n+1}}ire^{it}dt=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}\left(x+re^{it}\right)^{2k}e^{-int}dt\\&=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}x^jr^{2k-j}e^{i(2k-j)t}e^{-int}dt\\&=\frac{i}{r^n}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}x^jr^{2k-j}\int_0^{2\pi}e^{i(2k-j-n)t}dt\end{aligned}$$

avec $\int_0^{2\pi}e^{imt}dt=0$ pour tout entier relatif non nul m. Pour $0\leq k<\frac{n}{2}$, on a $2k-j-n<0$ pour tout $j\geq 0$ et pour $\frac{n}{2}\leq k\leq n$, il ne reste dans la somme ci-dessus que l'intégrale correspondante à $j=2k-n$, ce qui nous donne :

$$\int_{\gamma_{r,x}}\frac{z^{2k}}{(z-x)^{n+1}}dz=\frac{i}{r^n}\binom{2k}{2k-n}x^{2k-n}r^n2\pi=2i\pi\binom{2k}{n}x^{2k-n}$$

Il en résulte que :

$$\int_{\gamma_{x,r}}\frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}}dz=2i\pi\sum_{\frac{n}{2}\leq k\leq n}(-1)^{n-k}\binom{2k}{n}\binom{n}{k}x^{2k-n}=2i\pi 2^nL_n(x)$$

soit :

$$\begin{aligned} 2^n L_n(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r,x}} \frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(\left(x+re^{it}\right)^2-1\right)^n}{\left(re^{it}\right)^{n+1}} ire^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(2x+re^{it}-\frac{1-x^2}{re^{it}}\right)^n dt \end{aligned}$$

Cette solution qui suppose le résultat connu n'est pas très élégante. L'élégance nécessite les formules de Cauchy pour les fonctions holomorphes (qui ne sont pas au programme de l'agrégation interne). Pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage du disque fermé $\overline{D}(x,r)$ de centre x et de rayon r, on a pour tout nombre complexe z_0 dans le disque ouvert $D(x,r)$ et tout entier naturel n, $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_{r,x}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, ce qui nous donne pour $f=\pi_{2n}$ et $z_0 = x \in D(x,r)$:

$$2^n L_n(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r,x}} \frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

(b) Pour $x \in \left]-1,1\right[$ et $r=\sqrt{1-x^2}$, cela donne :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(2x+\sqrt{1-x^2}e^{it}-\sqrt{1-x^2}e^{-it}\right)^n \frac{dt}{2^n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin(t)\right)^n dt \end{aligned}$$

Le changement de variable $t=\theta+\dfrac{\pi}{2}$ nous donne compte tenu de la 2π-périodicité de la fonction intégrée :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta \end{aligned}$$

Comme $L_n(x)$ est réel, on a aussi par conjugaison complexe :

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta$$

La fonction $\varphi : (\theta,x) \mapsto \left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n$ étant continue sur $[0,\pi]\times[-1,1]$ et l'intégration se faisant sur un segment, la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi}\varphi(x,\theta)\,d\theta$ est continue sur $[-1,1]$ comme L_n, il s'en suit que l'égalité précédente est encore valable pour $x=\pm 1$ par continuité.

5. En utilisant la formule intégrale de Laplace, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n(\pm 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pm 1)^n \, dt = (\pm 1)^n$$

Pour tout $(\theta, x) \in [0, \pi] \times [-1, 1]$:

$$\left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(\theta) \right|^2 = x^2 + \left(1 - x^2\right) \cos^2(\theta) \leq x^2 + 1 - x^2 = 1$$

donc $|L_n(x)| \leq 1 = L_n(1)$ et en conséquence, $\|L_n\|_\infty = 1$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on a $L_n(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f_n(x, t) \, dt$ en posant $f_n(x, t) = \left(x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t)\right)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(t, x) \in [0, \pi] \times [-\delta, \delta]$, on a :

$$\begin{aligned} \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^2 &= x^2 + \left(1 - x^2\right) \cos^2(t) = x^2 \sin^2(t) + \cos^2(t) \\ &\leq \delta^2 \sin^2(t) + \cos^2(t) = g^2(t) \end{aligned}$$

donc $|L_n(x)| \leq \varepsilon_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi g^n(t) \, dt$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} g^n(t) = 0$ pour tout $t \in]0, \pi[$ (puisque $0 < g^2(t) < \sin^2(t) + \cos^2(t)) = 1$) et $0 \leq g(t)^n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \pi]$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, ce qui nous assure la convergence uniforme de $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 sur $[-\delta, \delta]$.

7.
   (a) Pour $(x, t) \in [-1, 1] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^2 = x^2 + \left(1 - x^2\right) \cos^2(t)$ avec $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ et $\sin(t) \geq \dfrac{2}{\pi} t$, ce qui nous donne :

   $$\left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^2 \leq x^2 + \left(1 - x^2\right) \left(1 - \frac{4}{\pi^2} t^2\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2} \left(1 - x^2\right) t^2$$

   puis en utilisant l'inégalité de convexité $1 - y < e^{-y}$ pour $y \geq 0$, on en déduit que :

   $$\left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^2 \leq e^{-\frac{4}{\pi^2}\left(1 - x^2\right) t^2}$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$, on a :

   $$|L_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^n dt = \frac{1}{\pi} I_n(x)$$

   Le changement de variable $t \mapsto \pi - t$ dans l'intégrale sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ donne :

   $$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^n dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos(t) \right|^n dt \end{aligned}$$

Il en résulte que $I_n(x) \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)t^2}dt$ et en effectuant le changement de variable $\theta = \frac{\sqrt{2n(1-x^2)}}{\pi}t$, on obtient :

$$I_n(x) \leq 2\frac{\pi}{\sqrt{2n(1-x^2)}}\int_0^{+\infty} e^{-\theta^2}d\theta = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$$

et $|L_n(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$.

(c) On en déduit que, pour tout $\delta \in \left]0,1\right[$, on $\sup_{x\in[-\delta,\delta]} |L_n(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-\delta^2)}}$, ce qui entraîne la convergence uniforme de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 sur $[-\delta,\delta]$.

8.

(a) Pour α réel, on a $1+\alpha^2\cos^2(t) \neq 0$ et $1-i\alpha\cos(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,\pi]$, donc les deux intégrale sont bien définies. Le changement de variable $t = \pi - \theta$ nous donne :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^{\pi} \frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+i\alpha\cos(t)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\alpha^2\cos^2(t)} \end{aligned}$$

puis en effectuant le changement de variable $x = \tan(t)$ (invariance de $\frac{dt}{1+\alpha^2\cos^2(t)}$ par $t \mapsto \pi + t$), on obtient :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2+1+x^2} = \frac{2}{\alpha^2+1}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\frac{x^2}{\alpha^2+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+1}} \end{aligned}$$

(b) En notant $\varphi(x,t) = x+i\sqrt{1-x^2}\cos(t)$, on a pour $(t,x) \in \left]0,\pi\right[\times\left]-1,1\right[$:

$$|\varphi(x,t)|^2 = x^2 + \left(1-x^2\right)\cos^2(t) < x^2 + \left(1-x^2\right) = 1$$

ce qui nous donne pour tout $y \in \left]-1,1\right[$:

$$f(t,x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n y^n = \frac{1}{1-xy-iy\sqrt{1-x^2}\cos(t)}$$

D'autre part, en notant $f_n(t,x,y) = \left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n y^n$ pour $(t,x,y) \in \left]0,\pi\right[\times\left]-1,1\right[^2$, on dispose d'une fonction continue telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi} |f_n(t,x,y)|\,dt \leq \pi\sum_{n=0}^{+\infty} |y|^n < +\infty$$

ce qui nous permet d'écrire que :

$$\int_0^\pi f(t,x,y)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n y^n dt = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, y^n$$

avec $1 - xy > 0$ et :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t,x,y)\,dt &= \int_0^\pi \frac{dt}{1 - xy - iy\sqrt{1-x^2}\cos(t)} = \frac{1}{1-xy} I\left(\frac{y\sqrt{1-x^2}}{1-xy}\right) \\ &= \frac{1}{1-xy}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{y^2(1-x^2)}{(1-xy)^2}+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-2xy+1}}\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-2xy+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, y^n$, cette formule étant encore valable pour $x = \pm 1$ (puisque $L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$).

9.

(a) Pour x fixé dans $[-1,1]$, on a le produit de Cauchy des séries entières :

$$\frac{1}{y^2-2xy+1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, y^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^n \tag{3.7}$$

pour tout $y \in \left]-1,1\right[$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, L_{n-k}(x) \in \mathbb{R}_n[x]$$

Le coefficient de x^n dans T_n étant $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \in \mathbb{R}^{+,*}$, ce polynôme est de degré n. Chaque L_k étant de la parité de k, le polynôme T_n est de la parité de n.

(b) La relation (3.7) s'écrit $\left(y^2 - 2xy + 1\right)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^n = 1$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^{n+2} - 2x\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^n = 1$$

ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_{n-1}(x)\, y^{n+1} - 2x\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^{n+1} + \sum_{n=-1}^{+\infty} T_{n+1}(x)\, y^{n+1} = 1$$

ou encore :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(T_{n-1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n+1}(x)\right) y^{n+1} + T_0(x) + \left(T_1(x) - 2xT_0(x)\right) y = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que les polynômes T_n sont définis par la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 2xT_0(x) = 2x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\ \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{array}\right.$$

On en déduit que le coefficient dominant de T_n est 2^n, ce qui nous donne en prime l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}$.

(c) On a $\sin(\theta) T_0(\cos(\theta)) = \sin(\theta)$, $\sin(\theta) T_1(\cos(\theta)) = \sin(2\theta)$ et par récurrence, on vérifie que $\sin(\theta) T_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$. C'est vrai pour $n \in \{0,1\}$ et supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta) \\ &= 2\cos(\theta)(\sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta)) - \sin(n\theta) \\ &= \left(2\cos^2(\theta) - 1\right)\sin(n\theta) + \cos(n\theta)\sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta)\sin(n\theta) + \cos(n\theta)\sin(2\theta) = \sin((n+2)\theta) \end{aligned}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et k compris entre 1 et n, on a $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) T_n\left(\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right) = \sin(k\pi) = 0$, donc $\dfrac{k\pi}{n+1}$ est une racine de T_n, ce qui nous donne n racines distinctes de ce polynôme de degré n et en conséquence, $T_n(x) = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(x - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$.

(e) Pour tout $x \geq x_n$, on a $L_k(x) > 0$ pour k compris entre 0 et $n-1$ (car $x_n > x_k$ et $L_0 = 1$) et $L_n(x) \geq 0$, donc $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k(x) L_{n-k}(x) > 0$. Il en résulte que $y_n < x_n$ (si $y_n \geq x_n$, on a alors $0 = T_n(y_n) > 0$, ce qui est impossible). On a donc $y_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) < x_n < 1$ et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

– III – Opérateur de Legendre

1. Pour f, g dans $\mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$, on a en notant abusivement $\left(x^2-1\right) f'$ la fonction $x \mapsto \left(x^2-1\right) f'(x)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(f) \mid g \rangle &= \left\langle \left(\left(x^2-1\right) f'\right)' \mid g \right\rangle = \left[\left(x^2-1\right) f' \cdot g\right]_{-1}^{1} - \left\langle \left(x^2-1\right) f' \mid g' \right\rangle \\ &= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) f'(x) g'(x)\, dx \end{aligned}$$

cette expression étant symétrique en (f,g), ce qui nous assure que $\mathcal{L}$ est symétrique. Pour $g = f$ on a :

$$\langle \mathcal{L}(f) \mid f \rangle = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) \left(f'(x)\right)^2 dx \geq 0$$

l'égalité étant uniquement réalisée pour f constante puisque f' est continue.

2.

(a) Pour $n = 0$, on a $\pi_0' = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_{2n}'(x) = 2nx\left(x^2-1\right)^{n-1}$, donc $\left(x^2-1\right)\pi_{2n}'(x) = 2nx\pi_{2n}(x)$. En dérivant $n+1$ fois cette relation, la formule de dérivation de Leibniz nous donne :

$$\begin{aligned}&\left(x^2-1\right)\pi_{2n}^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x\pi_{2n}^{(n+1)}(x) + n(n+1)\pi_{2n}^{(n)}(x)\\&= 2n\left(x\pi_{2n}^{(n+1)}(x) + (n+1)\pi_{2n}^{(n)}(x)\right)\end{aligned}$$

soit $\left(x^2-1\right)\pi_{2n}^{(n+2)}(x) + 2x\pi_{2n}^{(n+1)}(x) = n(n+1)\pi_{2n}^{(n)}(x)$ ou encore :

$$\mathcal{L}(L_n)(x) = \left(x^2-1\right)L_n''(x) + 2xL_n'(x) = n(n+1)L_n(x)$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\theta_n'(x) &= \frac{2L_n'(x)}{n(n+1)}\left(n(n+1)L_n(x) - xL_n'(x) - \left(x^2-1\right)L_n''(x)\right)\\&= \frac{2x\left(L_n'(x)\right)^2}{n(n+1)} \geq 0\end{aligned}$$

donc la fonction θ_n est croissante sur $[0,1]$ et on a :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq \left(L_n(x)\right)^2 \leq \theta_n(x) \leq \theta_n(1) = \left(L_n(1)\right)^2 = 1$$

ce résultat est encore valable sur $[-1,1]$ par parité de L_n^2. Il en résulte que $\|L_n\|_\infty = 1$.

3.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $xL_n' - L_{n-1}' \in \mathbb{R}_n[x] = \mathrm{Vect}\{L_0, \cdots, L_n\}$, donc $xL_n' - L_{n-1}' = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k L_k$ avec :

$$\begin{aligned}\alpha_k\|L_k\|^2 &= \left\langle xL_n' - L_{n-1}' \mid L_k\right\rangle = \left\langle L_n' \mid xL_k\right\rangle - \left\langle L_{n-1}' \mid L_k\right\rangle\\&= \left[xL_n(x)L_k(x)\right]_{-1}^1 - \left\langle L_n \mid (xL_k)'\right\rangle - \left[L_{n-1}(x)L_k(x)\right]_{-1}^1 + \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle\\&= 1 + (-1)^{n+k} - \left\langle L_n \mid (xL_k)'\right\rangle - \left(1 - (-1)^{n-1+k}\right) + \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle\\&= \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle - \left\langle L_n \mid (xL_k)'\right\rangle\\&= \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle - \left\langle L_n \mid L_k\right\rangle - \left\langle L_n \mid xL_k'\right\rangle = 0\end{aligned}$$

our $k \leq n-1$ et $xL_n' - L_{n-1}' = \alpha_n L_n$. Les coeeficients de x^n dans cette égalité donnent $\alpha_n = n$.

(b) La relation (3.4) nous donne par dérivation :

$$n(n+1)\left(L_{n+1}' - L_{n-1}'\right) = (2n+1)\mathcal{L}(L_n) = (2n+1)n(n+1)L_n$$

soit $L_{n+1}' - L_{n-1}' = (2n+1)L_n$.

(c) De ces deux égalités, on déduit que :

$$L'_{n+1} = L'_{n-1} + (2n+1)\, L_n = xL'_n - nL_n + (2n+1)\, L_n = xL'_n + (n+1)\, L_n$$

4.

(a) La question précédente nous dit que Σ contient $\Sigma' = \{\lambda_n = n\,(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et il nous reste à vérifier que pour réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma'$, on a $\mathcal{E}_\lambda = \{0\}$. Pour $f \in E_\lambda$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lambda \langle f \mid L_n \rangle = \langle \mathcal{L}(f) \mid L_n \rangle = \langle f \mid \mathcal{L}(L_n) \rangle = n\,(n+1) \langle f \mid L_n \rangle$$

avec $\lambda \neq n\,(n+1)$, donc $\langle f \mid L_n \rangle = 0$. Comme $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[x]$, on en déduit $\langle f \mid Q \rangle = 0$ pour toute fonction polynomiale $Q \in \mathbb{R}[x]$. Par ailleurs, le théorème de Weierstrass nous dit qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[-1,1]$ (f est continue), donc la suite $(fQ_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[-1,1]$ ($\left\| fQ_n - f^2 \right\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|Q_n - f\|_\infty$) et :

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f(x)\, Q_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \langle f \mid Q_n \rangle = 0$$

ce qui impose la nullité de f.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{E}_{\lambda_n}$ contient L_n et c'est l'ensemble des solutions sur $[-1,1]$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\left(x^2-1\right) y''(x) + 2xy'(x) - n\,(n+1)\, y(x) = 0$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que l'ensemble $\mathcal{S}_{\lambda_n}$des solution de cette équation différentielle sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ est de dimension 2. On dispose donc d'une base (L_n, f_n) de cet espace. Pour vérifier que l'espace $\mathcal{E}_{\lambda_n} \subset \mathcal{S}_{\lambda_n}$ qui nous intéresse est de dimension 1, il suffit de vérifier que la solution f_n n'est pas dans $\mathcal{E}_{\lambda_n}$, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas se prolonger en fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$. Pour ce faire, on utilise le wronskien $w_n = L_n f'_n - L'_n f_n$. Sur $]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}\left(x^2-1\right) w'_n + 2xw_n &= \left(x^2-1\right)\left(L_n f''_n - L''_n f_n\right) + 2x\left(L_n f'_n - L'_n f_n\right) \\ &= n\,(n+1)\left(L_n f_n - f_n L_n\right) = 0\end{aligned}$$

soit $\left(\left(x^2-1\right) w_n(x)\right)' = 0$ et en conséquence, $w_n(x) = \dfrac{w_n(0)}{1-x^2}$ avec $w_n(0) \neq 0$ (sans quoi $w_n = 0$ et $\left(\dfrac{f_n}{L_n}\right)' = 0$ en dehors des racines de L_n et $f_n = \alpha L_n$, ce qui n'est pas, ou de manière générale le wronskien d'une base de solution est non nul). Il en résulte alors que $\lim\limits_{|x|\to1} |w_n(x)| = \lim\limits_{|x|\to1} |L_n(x)\, f'_n(x) - f_n(x)\, L'_n(x)| = +\infty$ et f_n n'est pas dans $\mathcal{E}_{\lambda_n}$. En conclusion, $\mathcal{E}_{\lambda_n}$ est de dimension 1 engendré par L_n.

5. Pour $u(t,x) = a(t)\, b(x)$, notre équation aux dérivées partielles devient :

$$a''(t)\, b(x) = -a(t)\left(\left(x^2-1\right) b''(x) + 2xb'(x)\right) = -a(t)\, \mathcal{L}(b)(x)$$

Pour u non identiquement nulle, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a(t_0) \neq 0$ et b est non identiquement nulle telle que $\mathcal{L}(b) = \lambda b$ avec $\lambda = -\dfrac{a''(t_0)}{a(t_0)}$, il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = n(n+1)$ et $b = \alpha L_n$. Pour $x = 1$ et $t \in [-1,1]$, on a $a''(t)\, L_n(1) = -2L_n'(1)\, a(t)$ avec $L_n(1) = 1$ et $2L_n'(1) = n(n+1)$ (qui résulte de $\left(x^2-1\right) L_n''(x) + 2xL_n'(x) = n(n+1)\, L_n(x)$), soit $a''(t) = -n(n+1)\, a(t)$ et $a(t) = \beta + \gamma t$ pour $n = 0$, $a(t) = \beta \cos\left(\sqrt{n(n+1)}t\right) + \gamma \sin\left(\sqrt{n(n+1)}t\right)$ pour $n \geq 1$. Les solutions cherchées sont donc les fonctions de la forme $u(t,x) = a + bt$ ou $u(t,x) = \left(a \cos\left(\sqrt{n(n+1)}t\right) + b \sin\left(\sqrt{n(n+1)}t\right)\right) L_n(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

– III – Séries de Fourier-Legendre

1. Comme $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$, on a $S_n(f) \in \mathbb{R}_n[x]$ et pour tout entier j compris entre 0 et n :

$$\langle f - S_n(f) \mid P_j \rangle = \langle f \mid P_j \rangle - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) \langle P_k \mid P_j \rangle = c_j(f) - c_j(f) = 0$$

donc $f - S_n(f) \in (\mathbb{R}_n[x])^{\perp}$ et $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[x]$. Il en résulte que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[x]$, on a :

$$\begin{aligned} \|f - Q\|^2 &= \|(f - S_n(f)) + (S_n(f) - Q)\|^2 \\ &= \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f) - Q\|^2 \geq \|f - S_n(f)\|^2 \end{aligned}$$

donc $\|f - S_n(f)\| = \inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - Q\|$.

2. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[x]$, on a :

$$\|f\|^2 = \|(f - S_n(f)) + S_n(f)\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k^2(f) = \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|f - S_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$, ce qui entraîne la convergence de la série à termes positifs $\sum c_n^2(f)$ avec l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f) \leq \|f\|^2$. Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n(f) = 0$.

3.

   (a) Soit $f \in \mathcal{E}$. Comme $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $(E, \|\cdot\|)$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_ε et un polynôme $Q_\varepsilon \in \mathbb{R}_{n_\varepsilon}[x]$ tel que $\|f - Q_\varepsilon\| <$

ε. Pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$, le polynôme $S_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(f) P_k$ est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[x]$ qui contient $\mathbb{R}_{n_\varepsilon}[x]$, donc $\|f - S_n(f)\| \leq \|f - Q_\varepsilon\| < \varepsilon$. On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\| = 0$, c'est à dire que dans $(E, \|\cdot\|)$ on a l'égalité $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n$.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2\right) = \lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|^2 = 0$$

soit $\|f\|^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f)$.

4. Il est clair que deux fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont égales ont les mêmes coefficients de Fourier-legendre. Si f, g dans $\mathcal{E}$ sont telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $c_n(f - g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de l'égalité de parseval, on déduit que $\|f - g\| = 0$, ce qui équivaut à $f = g$.

5.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $c_n(f) = \langle f \mid P_n \rangle = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} \langle f \mid L_n \rangle$ avec $(2n+1) L_n = L'_{n+1} - L'_{n-1}$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
(2n+1)\langle f \mid L_n \rangle &= \left\langle f \mid L'_{n+1} - L'_{n-1} \right\rangle \\
&= \left[f(x)(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x))\right]_{-1}^{1} - \langle f' \mid L_{n+1} - L_{n-1} \rangle \\
&= -\langle f' \mid L_{n+1} - L_{n-1} \rangle
\end{aligned}$$

car $L_{n+1} - L_{n-1}$ est nulle en ± 1, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \left\langle f \mid \frac{2n+1}{2} L_n \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2(2n+1)}} \langle f' \mid L_{n+1} - L_{n-1} \rangle \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2(2n+1)}} \left(\sqrt{\frac{2}{2n+3}} \langle f' \mid P_{n+1} \rangle - \sqrt{\frac{2}{2n-1}} \langle f' \mid P_{n-1} \rangle \right) \\
&= \frac{c_{n-1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} - \frac{c_{n+1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}
\end{aligned}$$

(b) En utilisant l'inégalité $|ab| \leq \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
|c_n(f)| &\leq \frac{1}{2} \left(|c_{n-1}(f')|^2 + |c_{n+1}(f')|^2 + \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} \right) \\
&\leq \frac{|c_{n-1}(f')|^2 + |c_{n+1}(f')|^2}{2} + \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

et pour $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\begin{aligned}
|c_n(f)\,P_n(x)| &\leq \left(\frac{|c_{n-1}(f')|^2+|c_{n+1}(f')|^2}{2}+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,|L_n(x)| \\
&\leq \left(\frac{|c_{n-1}(f')|^2+|c_{n+1}(f')|^2}{2}+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}} \\
&\leq \left(\frac{|c_{n-1}(f')|^2+|c_{n+1}(f')|^2}{2}+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\frac{2n+1}{4n}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\leq \left(\frac{|c_{n-1}(f')|^2+|c_{n+1}(f')|^2}{2}+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f') < +\infty$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$. La convergence simple de $\sum c_n(f)\,P_n$ sur $\left]-1,1\right[$ et la convergence uniforme sur tout segment $[-\delta,\delta] \subset \left]-1,1\right[$ en résultent.

6. On a, pour tout $x \in [-1,1]$:

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,P_k(x) = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n} P_k(t)\,P_k(x)\right) f(t)\,dt$$

On définit la fonction K_n sur $\mathbb{R}^2$ par $K_n(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(t)\,P_k(x)$. Cette fonction étant polynomiale, elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$. La formule de Darboux-Christoffel s'écrit :

$$(x-t)\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\,P_k(t) = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\left(P_{n+1}(x)\,P_n(t) - P_n(x)\,P_{n+1}(t)\right)$$

et pour $x \neq t$, elle nous donne :

$$K_n(t,x) = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\frac{P_{n+1}(t)\,P_n(x) - P_n(t)\,P_{n+1}(x)}{t-x}$$

En écrivant que :

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n+1}(t)\,P_n(x) - P_n(t)\,P_{n+1}(x)}{t-x} &= \frac{P_{n+1}(t) - P_{n+1}(x)}{t-x}P_n(x) \\
&\quad - \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t-x}P_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

et en faisant tendre t vers x on obtient :

$$K_n(x,x) = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\left(P'_{n+1}(x)\,P_n(x) - P'_n(x)\,P_{n+1}(x)\right)$$

7. Prenant $f = 1 \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $S_n(1) = 1$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} K_n(t,x)\,dt = 1$. Plus généralement, pour $0 \leq k \leq n$, on a $S_n\left(x^k\right) = x^k$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} K_n(t,x)\,t^k dt = x^k$.
8. De ce qui précède on déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$ on a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x)\cdot 1 &= \int_{-1}^{1} K_n(t,x)\,f(t)\,dt - \int_{-1}^{1} K_n(t,x)\,f(x)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} K_n(t,x)\,(f(t) - f(x))\,dt \end{aligned}$$

avec $K_n(t,x)(f(t) - f(x))$ pour $t = x$ et :

$$\begin{aligned} &K_n(t,x)(f(t) - f(x)) \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\left(P_n(x)\,P_{n+1}(t) - P_{n+1}(x)\,P_n(t)\right)\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \end{aligned}$$

pour $t \in [-1,1] \setminus \{x\}$. Dans le cas où f est dérivable à droite et gauche en $x \in]-1,1[$, la fonction φ_x définie par :

$$\forall t \in [-1,1],\ \varphi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} & \text{si } t \neq x \\ \dfrac{f'_g(x) + f'_d(x)}{2} & \text{si } t = x \end{cases}$$

est alors un élément de $\mathcal{E}$ (comme $f \in \mathcal{E}$, la fonction φ_x est continue sur $[-1,1]$ privé de x et des éventuels points de discontinuité de f et en tous ces points, φ_x admet des limites à droite et à gauche puisque $f \in \mathcal{E}$ et f est dérivable à droite et gauche en x). On a donc :

$$\begin{aligned} &S_n(f)(x) - f(x) \\ &= \tfrac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\left(P_n(x)\int_{-1}^{1} \varphi_x(t)\,P_{n+1}(t)\,dt - P_{n+1}(x)\int_{-1}^{1} \varphi_x(t)\,P_n(t)\,dt\right) \\ &= \tfrac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\left(P_n(x)\,c_{n+1}(\varphi_x) - P_{n+1}(x)\,c_n(\varphi_x)\right) \end{aligned}$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |S_n(f)(x) - f(x)| &\leq \tfrac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\left(|P_n(x)|\,|c_{n+1}(\varphi_x)| + |P_{n+1}(x)|\,|c_n(\varphi_x)|\right) \\ &\leq |P_n(x)|\,|c_{n+1}(\varphi_x)| + |P_{n+1}(x)|\,|c_n(\varphi_x)| \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}\left(|c_{n+1}(\varphi_x)| + |c_n(\varphi_x)|\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

(on a $|P_n(x)| = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\,|L_n(x)| \leq \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}} \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $n \geq 1$), c'est-à-dire que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\,P_n(x)$.

9. Pour $x \in \left]-1,1\right[$ et $\delta > 0$ tel que $[x-\delta, x+\delta] \subset \left]-1,1\right[$, on désigne par $\varphi_{x,\delta}$ l'élément de $\mathcal{E}$ défini par :

$$\forall t \in [-1,1]\,,\ \varphi_{x,\delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} & \text{si } t \notin [x-\delta, x+\delta] \\ 0 & \text{si } t \in \left]x-\delta, x+\delta\right[\end{cases}$$

(en $t = x \pm \delta$, on prend la valeur moyenne $\dfrac{1}{2}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$) et on a :

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(t,x)(f(t)-f(x))\,dt = I_{n,\delta}(x) + J_{n,\delta}(x)$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} I_{n,\delta}(x) &= \int_{|t-x|\geq\delta} K_n(t,x)(f(t)-f(x))\,dt \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\left(P_n(x)\,c_{n+1}(\varphi_{x,\delta}) - P_{n+1}(x)\,c_n(\varphi_{x,\delta})\right) \end{aligned}$$

et :

$$J_{n,\delta}(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(t,x)(f(t)-f(x))\,dt$$

On a alors :

$$|I_{n,\delta}(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}\left(|c_{n+1}(\varphi_{x,\delta})| + |c_n(\varphi_{x,\delta})|\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et dans le cas où f vérifie une condition de Hölder de constante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et d'exposant $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, on a :

$$\forall t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]\,,\ |f(t)-f(x)| \leq \lambda\,|t-x|^{\alpha}$$

et :

$$\begin{aligned} |J_{n,\delta}(x)| &\leq \lambda\tfrac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\left(\tfrac{|P_n(x)||P_{n+1}(t)|+|P_{n+1}(x)||P_n(t)|}{|t-x|^{1-\alpha}}\right)dt \\ &\leq \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{|P_{n+1}(t)|}{|t-x|^{1-\alpha}}dt + \int_{x-\delta}^{x+\delta}\left(\frac{|P_n(t)|}{|t-x|^{1-\alpha}}\right)dt\right) \end{aligned}$$

les intégrales du membre de droite de cette inégalité étant convergentes puisque $1-\alpha < 1$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{|P_{n+1}(t)|}{|t-x|^{1-\alpha}}dt &\leq \sqrt{\int_{x-\delta}^{x+\delta}|P_n^2(t)|\,dt}\sqrt{\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{dt}{|t-x|^{2(1-\alpha)}}} \\ &\leq \|P_n\|\sqrt{\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{dt}{|t-x|^{2(1-\alpha)}}} = \sqrt{\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{dt}{|t-x|^{2(1-\alpha)}}} \end{aligned}$$

la dernière intégrale étant convergente du fait que $2(1-\alpha) < 1$ pour $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Enfin, avec :

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dy}{|y|^{2(1-\alpha)}} = 2\int_0^{\delta} \frac{dt}{y^{2(1-\alpha)}} = \frac{2\delta^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \underset{\delta\to 0}{\to} 0$$

on peut choisir, pour tout réel $\varepsilon > 0$ (à x fixé dans $]-1,1[$), un réel $\delta > 0$ assez petit de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{|P_{n+1}(t)|}{|t-x|^{1-\alpha}} dt < \varepsilon$$

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = f(x)$.

10. Les coefficients de Fourier-Legendre de f sont les $c_n(f) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} P_n(x)\,dx$. Pour $n = 0$, on a $c_0(f) = \dfrac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$. Pour $n \geq 1$, avec l'égalité :

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+3}} P'_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} P'_{n-1} \right)$$

on a pour $n \geq 1$:

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{P_{n+1}(1) - P_{n+1}(\alpha)}{\sqrt{2n+3}} - \frac{P_{n-1}(1) - P_{n-1}(\alpha)}{\sqrt{2n-1}} \right)$$

avec $P_k(1) = \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}}$, ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3}} P_{n+1}(1) - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} P_{n-1}(1) = 0$$

et $c_n(f) = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\dfrac{P_{n-1}(\alpha)}{\sqrt{2n-1}} - \dfrac{P_{n+1}(\alpha)}{\sqrt{2n+3}} \right)$. La fonction f étant lipschitzienne, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} P_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{P_{n-1}(\alpha)}{\sqrt{2n-1}} - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{\sqrt{2n+3}} \right) P_n(x)$$

En utilisant les polynômes $L_k = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k+1}} P_k$, cela s'écrit :

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(L_{n-1}(\alpha) - L_{n+1}(\alpha)\right) L_n(x)$$

Pour $x = \alpha$, on obtient :

$$\frac{1-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(L_{n-1}(\alpha) - L_{n+1}(\alpha)\right) L_n(\alpha) = \frac{1}{2}$$

ce qui peut se vérifier directement (somme télescopique).

11. S_n étant la projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}_n[x]$, elle est linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$\begin{aligned}|S_n(f)(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} K_n(t,x) f(t)\,dt\right| \leq \left(\int_{-1}^{1} |K_n(x,t)|\,dt\right) \|f\|_\infty \\ &\leq \left(\sup_{x\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} |K_n(x,t)|\,dt\right) \|f\|_\infty = \alpha \|f\|_\infty\end{aligned}$$

donc l'application linéaire S_n est continue avec $N_\infty(S_n) \leq \alpha$. La fonction $\varphi_n : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} |K_n(x,t)|\,dt$ étant continue sur le segment $[-1,1]$, est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $x_0 \in [-1,1]$ tel que $\alpha = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \varphi_n(x) = \varphi_n(x_0)$. On utilise la suite de fonctions continues $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [-1,1],\ f_k(t) = \frac{K_n(x_0,t)}{|K_n(x_0,t)| + \varepsilon_k}$$

où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a $|f_k(t)| = \dfrac{|K_n(x_0,t)|}{|K_n(x_0,t)| + \varepsilon_k} < 1$, soit $\|f_k\|_\infty \leq 1$ et :

$$\begin{aligned}|S_n(f_k)(x_0) - \alpha| &= \left|\int_{-1}^{1} \frac{K_n^2(x_0,t)}{|K_n(x_0,t)| + \varepsilon_k} dt - \int_{-1}^{1} |K_n(x_0,t)|\,dt\right| \\ &= \varepsilon_k \left|\int_{-1}^{1} \frac{K_n(x_0,t)}{|K_n(x_0,t)| + \varepsilon_k} dt\right| \leq 2\varepsilon_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

soit $\lim\limits_{k\to+\infty} S_n(f_k)(x_0) = \alpha$. Enfin, avec $|S_n(f_k)(x_0)| \leq \|S_n(f_k)\|_\infty \leq N_\infty(S_n)\|f_k\|_\infty \leq N_\infty(S_n)$, on déduit que $\alpha \leq N_\infty(S_n)$ et $N_\infty(S_n) = \alpha$.

Chapitre 4

Continuité, dérivabilité et convexité

Exo Sup 4.1. Accroissements sur des espaces de Banach

Pour toute application linéaire continue $u : E \to F$ *entre deux espaces de Banach* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$, *on note* $\|u\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$.

1. *Pour cette question,* $\mathcal{O}$ *est un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* a, b *sont deux points distincts de* $\mathcal{O}$ *tels que le segment* $[a, b]$ *soit contenu dans* $\mathcal{O}$. *Les espaces* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $F = \mathbb{R}^m$ *sont munis de la norme infinie notée* $\|\cdot\|$.
   (a) *Soit* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $\mathcal{O}$ *et différentiable en tout point de* $]a, b[$. *Montrer qu'il existe* $c \in]a, b[$ *tel que :*
   $$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c)(b_k - a_k)$$
   (b) *Soit* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ *une fonction continue sur* $\mathcal{O}$ *et différentiable en tout point de* $]a, b[$. *On suppose qu'il existe une constante* $\mu > 0$ *telle que* $\|df(c)\| \leq \mu$ *pour tout* $c \in]a, b[$. *Montrer que :*
   $$\|f(b) - f(a)\| \leq \mu \|b - a\|$$
2. *Pour cette question et la suivante,* $a < b$ *sont deux réels,* $f : [a, b] \to F$ *et* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sont deux fonctions continues sur* $[a, b]$ *et dérivables sur* $]a, b[$. *On suppose que* $\|f'(t)\|_F < g'(t)$ *pour tout* $t \in]a, b[$. *Pour tout* $\alpha \in]a, b[$, *on note* $E_\alpha = \{t \in]\alpha, b[\mid \|f(t) - f(\alpha)\|_F > g(t) - g(\alpha)\}$.
   (a) *Montrer que* E_α *est ouvert.*
   (b) *En supposant* E_α *non vide, on note* β *sa borne inférieure. Montrer que* $\beta \in]\alpha, b[$ *et en déduire une contradiction.*
   (c) *Montrer que* $\|f(b) - f(a)\|_F \leq g(b) - g(a)$.
3. *Dans le cadre de la question précédente, on suppose que* $\|f'(t)\|_F \leq g'(t)$ *pour tout* $t \in]a, b[$.

(a) *Montrer que* $\|f(b) - f(a)\|_F \leq g(b) - g(a)$ *(inégalité généralisée des accroissements finis). Dans le cas où il existe un réel* $\lambda \geq 0$ *tel que* $\|f'(t)\|_F \leq \lambda$ *pour tout* $t \in]a,b[$, *prenant* $g : t \mapsto \lambda t$, *on aboutit à l'inégalité des accroissements finis,* $\|f(b) - f(a)\|_F \leq \lambda(b-a)$.

(b) *Montrer que si l'égalité* $\|f(b) - f(a)\|_F = g(b) - g(a)$ *est réalisée, on a alors* $\|f(z) - f(t)\|_F = g(z) - g(t)$ *pour tous* $t < z$ *dans* $[a,b]$ *et* $\|f'(t)\|_F = g'(t)$ *pour tout* $t \in]a,b[$.

4. *Soient* $\mathcal{O}$ *un ouvert non vide de* E, $f : \mathcal{O} \to F$ *une fonction continue et* a, b *deux points distincts de* $\mathcal{O}$ *tels que le segment* $[a,b]$ *soit contenu dans* $\mathcal{O}$. *On suppose que* f *est différentiable en tout point de* $]a,b[$ *et qu'il existe une constante* $\mu > 0$ *telle que* $\|df(c)\| \leq \mu$ *pour tout* $c \in]a,b[$. *Montrer que* $\|f(b) - f(a)\|_F \leq \mu \|b-a\|_E$.

5. *Montrer que le système d'équations :*

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 2x \\ \cos(x-y) = 2y \end{cases}$$

a une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Solution.

1.

(a) On se ramène au cas des fonctions d'une variable réelle en considérant la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(\gamma(t)) = f(a + t(b-a))$. Cette fonction est bien définie sur $[0,1]$ du fait que $[a,b] \subset \mathcal{O}$ et comme composée, elle continue sur cet intervalle, dérivable sur $]0,1[$ avec :

$$g'(t) = df(\gamma(t))(b-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t))(b_k - a_k)$$

pour tout $t \in]0,1[$. Le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles nous dit qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$, ce qui s'écrit :

$$f(b) - f(a) = df(c)(b-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c)(b_k - a_k)$$

où $c = a + \theta(b-a) \in]a,b[$.

(b) En notant $f = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$, on a pour tout $c \in \mathcal{O}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$df(c)(h) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j \right)_{1 \leq i \leq m} = (df_i(c)(h))_{1 \leq i \leq m}$$

Chaque fonction $f_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ étant continue sur $\mathcal{O}$ et différentiable sur $]a,b[$, il existe une suite $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ de points de $]a,b[$ telle que $f_i(b) - f_i(a) =$

$df_i(c_i)(b-a)$ pour tout i compris entre 1 et m. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)\| &= \max_{1\leq i\leq m}|f_i(b)-f_i(a)| = \max_{1\leq i\leq m}|df_i(c_i)(b-a)| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq m}\|df(c_i)(b-a)\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq m}|\!|\!|df(c_i)|\!|\!|\right)\|b-a\| \\ &\leq \mu\|b-a\|\end{aligned}$$

2. De l'hypothèse $\|f'(t)\|_F < g'(t)$ pour tout $t\in\left]a,b\right[$, on déduit que $g'(t)>0$, donc g est strictement croissante sur $[a,b]$ et en particulier, on a $g(b)-g(a)>0$

   (a) E_α est ouvert dans $\left]\alpha,b\right[$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^{+,*}$ par l'application continue $t\in\left]\alpha,b\right[\mapsto\|f(t)-f(\alpha)\|_F-(g(t)-g(\alpha)).$

   (b) Si E_α est non vide, il admet alors une borne inférieure $\beta\in\left[\alpha,b\right[$ car cet ensemble est minoré par α (pour $t\in E_\alpha$, on a $\beta\leq t<b$, donc $\beta<b$). Si $\beta=\alpha$, par définition de la borne inférieure, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un réel $t_n\in E_\alpha$ tel que $\alpha<t_n<\alpha+\dfrac{1}{n}$, donc $\dfrac{\|f(t_n)-f(\alpha)\|_F}{t_n-\alpha}>\dfrac{g(t_n)-g(\alpha)}{t_n-\alpha}$ et faisant tendre n vers l'infini, on aboutit à $\|f'(\alpha)\|_F\geq g'(\alpha)$ qui est en contradiction avec $\|f'(\alpha)\|_F<g'(\alpha)$. Donc $\beta\in\left]\alpha,b\right[$ et $\beta\notin E_\alpha$ puisque E_α est ouvert dans $\left]\alpha,b\right[$, ce qui nous donne :

   $$\|f(\beta)-f(\alpha)\|_F\leq g(\beta)-g(\alpha)\,,\ \|f'(\beta)\|_F<g'(\beta)$$

   et entraîne que pour tout $t>\beta$ dans un voisinage de β, on a $\dfrac{\|f(t)-f(\beta)\|_F}{t-\beta}<\dfrac{g(t)-g(\beta)}{t-\beta}$ ($\|f'(\beta)\|_F<g'(\beta)$ et définition du nombre dérivé), donc :

   $$\left\{\begin{array}{l}\|f(t)-f(\beta)\|_F<g(t)-g(\beta)\\ \|f(\beta)-f(\alpha)\|_F\leq g(\beta)-g(\alpha)\end{array}\right.$$

   ce qui donne par addition :

   $$\|f(t)-f(\alpha)\|_F\leq\|f(t)-f(\beta)\|_F+\|f(\beta)-f(\alpha)\|_F<g(t)-g(\alpha)$$

   soit $t\notin E_\alpha$, ce qui est en contradiction avec le fait que β est la borne inférieure de E_α.

   (c) En définitive tous les ensembles E_α, pour $\alpha\in\left]a,b\right[$, sont vides et en conséquence, on a $\|f(t)-f(\alpha)\|_F\leq g(t)-g(\alpha)$ pour tout $t\in[\alpha,b]$ (c'est vrai sur $\left]\alpha,b\right[$, puis sur $[\alpha,b]$ par continuité). En particulier, on a $\|f(b)-f(\alpha)\|_F\leq g(b)-g(\alpha)$ pour tout $\alpha\in\left]a,b\right[$ et en faisant tendre α vers a on aboutit à $\|f(b)-f(a)\|_F\leq g(b)-g(a)$.

3.

   (a) Le cas général s'obtient en remplaçant la fonction g par la fonction $g_\varepsilon:t\mapsto g(t)+\varepsilon(t-a)$ avec $\varepsilon>0$ quelconque. On a $\|f'(t)\|_F<g'_\varepsilon(t)=g'(t)+\varepsilon$ sur $\left]\alpha,b\right[$, donc $\|f(b)-f(a)\|_F\leq g(b)+\varepsilon(b-a)-g(a)$ et en faisant tendre ε vers 0 on a le résultat annoncé.

(b) Supposons qu'il existe $t < z$ dans $]a, b[$ tels que $\|f(z) - f(t)\|_F < g(z) - g(t)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $\|f(t) - f(a)\|_F \leq g(t) - g(a)$ et $\|f(b) - f(z)\|_F \leq g(b) - g(z)$, donc :

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\|_F &\leq \|f(b) - f(z)\|_F + \|f(z) - f(t)\|_F + \|f(t) - f(a)\|_F \\ &< g(b) - g(z) + g(z) - g(t) + g(t) - g(a) = g(b) - g(a)\end{aligned}$$

Donc si $\|f(b) - f(a)\|_F = g(b) - g(a)$, on a alors $\|f(z) - f(t)\|_F = g(z) - g(t)$ pour tous $t < z$ dans $]a, b[$. Pour tout $t \in]a, b[$, on a aussi :

$$\|f'(t)\|_F = \lim_{\substack{z \to t \\ t<z<b}} \frac{\|f(z) - f(t)\|_F}{z - t} = \lim_{\substack{z \to t \\ t<z<b}} \frac{g(z) - g(t)}{z - t} = g'(t)$$

4. La fonction $g : t \in [0, 1] \mapsto f(\gamma(t)) = f(a + t(b - a)) \in F$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ avec :

$$\begin{aligned}\|g'(t)\|_F = \|df(\gamma(t))(b - a)\|_F &\leq \|\!|df(\gamma(t))|\!\| \cdot \|b - a\|_E \\ &\leq \mu \|b - a\|_E\end{aligned}$$

pour tout $t \in]0, 1[$. On déduit alors de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace de Banach que $\|f(b) - f(a)\|_F = \|g(1) - g(0)\|_F \leq \mu \|b - a\|_E$.

5. La fonction $f : (x, y) \mapsto (\sin(x + y), \cos(x - y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ -\sin(x - y) & \sin(x - y) \end{pmatrix}$$

et en utilisant la norme euclidienne, on a :

$$\begin{aligned}\|df(x, y)(h, k)\|^2 &= \cos^2(x + y)(h + k)^2 + \sin^2(x - y)(k - h)^2 \\ &\leq (h + k)^2 + (h - k)^2 = 2\|(h, k)\|^2\end{aligned}$$

pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, donc $\|\!|df(x, y)|\!\| \leq \sqrt{2}$. On déduit de l'inégalité des accroissements finis que $\|f(x, y) - f(x', y')\| \leq \sqrt{2}\|(x, y) - (x', y')\|$ et les égalités $f(x, y) = 2(x, y)$, $f(x', y') = 2(x', y')$ impliquent $2\|(x, y) - (x', y')\| \leq \sqrt{2}\|(x, y) - (x', y')\|$, soit $(x, y) = (x', y')$. L'équation $f(x, y) = 2(x, y)$ a donc au plus une solution. En fait l'inégalité des accroissements finis nous dit la fonction $\frac{1}{2}f$ est strictement contractante, ce qui nous assure de l'existence (et de l'unicité) d'une solution comme limite de la suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$ pour tout $n \geq 0$ (théorème du point fixe). Une solution approchée est $(x, y) \backsimeq (0.386\,45, 0.496\,95)$ (programmation Xcas).
En utilisant la norme infinie, on aboutit à $\|\!|df(x, y)|\!\| \leq 2$, ce qui n'est pas suffisant pour conclure.

Exo Sup 4.2. Prolongement par continuité ou par différentiabilité

1. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point, a un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Montrer que si f' a une limite à gauche [resp. une limite à droite, resp. une limite] ℓ en a, alors f est dérivable à gauche [resp. dérivable à droite, resp. dérivable] en a avec $f'_g(a) = \ell$ [resp. $f'_d(a) = \ell$, resp. $f'(a) = \ell$].*
2. *Montrer que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Soit I un intervalle réel non réduit à un point Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe est continûment dérivable (voir aussi la question **4b** de l'exercice **4.5**).*
4. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E, a un point de $\mathcal{O}$ et $f : \mathcal{O} \to F$ une fonction continue. On suppose que f est différentiable sur $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ et que la différentielle df admet une limite $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ quand x tend vers a. Montrer que f est différentiable en a de différentielle $df(a) = L$.*

Solution.

1. Soit $\ell = \lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$ [resp. $\ell = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$]. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|f'(t) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $t \in J_\eta =]a - \eta, a[\subset I$ [resp. $t \in J_\eta =]a, a + \eta[\subset I$]. Pour tout $x \in J_\eta$ le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe un réel $c_x \in]x, a[\subset J_\eta$ [resp. $c_x \in]a, x[\subset J_\eta$] tel que :
$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| = |f'(c_x) - \ell| < \varepsilon$$
ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ [resp. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$] et signifie que f est dérivable à gauche [resp. à droite] en a avec $f'_g(a) = \ell$ [resp. $f'_d(a) = \ell$]. Dans le cas où f admet une limite en a, on a $\ell = \lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$, donc $\ell = f'_g(a) = f'_g(a)$, ce qui signifie que f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ $\left(\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)\right)$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, elle est donc dérivable en 0 de dérivée nulle et f' est continue sur $\mathbb{R}$. En supposant, pour $n \geq 1$, que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, où P_n est une fonction polynomiale de degré $3n$, on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$ avec :
$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

le polynôme P_{n+1} étant de degré $3n+3$. Puis avec $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$, on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n+1)}(0) = 0$.

3. Si f est convexe et dérivable de I dans $\mathbb{R}$, sa dérivée f' est alors croissante et en conséquence admet une limite à gauche et à droite en tout point $a \in I$. De la question **1**, on déduit alors que $f'(a) = f'_g(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ et $f'(a) = f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, donc $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(a)$ et f' est continue en a, ce qui signifie que f est continûment dérivable sur I.
4. Comme $\lim\limits_{x\to a} df(x) = L$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que la boule ouverte $B(a,\eta)$ de centre a et de rayon η soit contenue dans l'ouvert $\mathcal{O}$ et $\|df(x) - L\| < \varepsilon$ pour tout $x \in B(a,\eta) \setminus \{a\}$. La fonction g définie sur $\mathcal{O}$ par $g(x) = f(x) - f(a) - L(x-a)$ est continue sur $\mathcal{O}$, différentiable sur $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ avec $dg(x) = df(x) - L$ pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{a\}$. On a donc $\|dg(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in B(a,\eta) \setminus \{a\}$ et de l'inégalité des accroissements finis, on déduit que :
$$\|g(x)\|_F = \|g(x) - g(a)\|_F \leq \varepsilon \|x-a\|_E$$
(le segment $[a,x]$ est contenu dans $\mathcal{O}$ car $B(a,\eta)$ est convexe et g est diffrentiable sur $]a,x[$). On a donc prouvé que :
$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} = \lim_{x\to a} \frac{\|g(x)\|_F}{\|x-a\|_E} = 0$$
ce qui signifie que f est différentiable en a de différentielle égale à L.

Exo Sup 4.3. Accroissements finis et limites à l'infini

f, g sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1. *On suppose que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ell$.*

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = e^{\ell}$.
2. *On suppose que f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Que dire pour f' continue ?*
3. *On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell$.*
   (a) *Dans le cas où $\ell = 0$, on désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = e^x f(x)$. En appliquant le théorème généralisé des accroissements finis au couple de fonctions $(g, \exp)$, montrer que pour tous réels $x > \alpha > 0$, il existe un réel $c_{x,\alpha} \in]\alpha, x[$ tel que :*
   $$f(x) = e^{\alpha - x} f(\alpha) + \left(1 - e^{\alpha - x}\right)\left(f(c_{x,\alpha}) + f'(c_{x,\alpha})\right)$$
   En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) *Pour ℓ quelconque, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.*

> *4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \ell'$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(t+1) - \varphi(t))\, dt = \ell - \ell'$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt$.*

Solution.

1. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\left| \dfrac{f'(t)}{f(t)} - \ell \right| < \varepsilon$ pour tout $x > \alpha$. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $g = \ln(f)$ (f est à valeurs strictement positives) nous dit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe $c_x \in \left]x, x+1\right[$ tel que $\ln\left(\dfrac{f(x+1)}{f(x)}\right) = g(x+1) - g(x) = g'(c_x) = \dfrac{f'(c_x)}{f(c_x)}$ avec $\left| \dfrac{f'(c_x)}{f(c_x)} - \ell \right| < \varepsilon$ pour $x > \alpha$, ce qui nous donne :
$$\left| \ln\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right) - \ell \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{f(c_x)} - \ell \right| < \varepsilon$$
et prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{f(x+1)}{f(x)}\right) = \ell$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = e^{\ell}$ (continuité de exp et ln).
2. Comme f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|f'(y) - f'(x)| < \varepsilon$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $|y - x| < \eta$. Pour tout réel $x > 0$, il existe $c_x \in \left]x, x+\eta\right[$ tel que :
$$\left| \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} - f'(x) \right| = |f'(c_x) - f'(x)| < \varepsilon$$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\left| \dfrac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} \right| < \varepsilon$ pour tout $x > \alpha$, ce qui nous donne pour $x > \alpha$:
$$|f'(x)| \leq \left| \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} - f'(x) \right| + \left| \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} \right| < 2\varepsilon$$
et prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Ce résultat n'est plus vrai si on suppose f' seulement continue. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée définie par $f'(x) = 2\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ pour $x > 0$ et $f'(0) = 1$. Cette dérivée est continue sur $\mathbb{R}^+$ et n'a pas de limite à l'infini (on a $f'(\sqrt{n\pi}) = 2(-1)^n$).
3.
   (a) Le théorème généralisé des accroissements finis nous dit que pour tous réels $x > \alpha > 0$, il existe $c_{x,\alpha} \in \left]\alpha, x\right[$ tel que :
$$(g(x) - g(\alpha))\, e^{c_{x,\alpha}} = (e^x - e^{\alpha})\, g'(c_{x,\alpha})$$

avec $g'(t) = e^t(f(t) + f'(t))$, ce qui nous donne :

$$(e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)) e^{c_{x,\alpha}} = (e^x - e^\alpha) e^{c_{x,\alpha}} (f(c_{x,\alpha}) + f'(c_{x,\alpha}))$$

ou encore :

$$f(x) = e^{\alpha - x} f(\alpha) + \left(1 - e^{\alpha - x}\right)(f(c_{x,\alpha}) + f'(c_{x,\alpha}))$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|f(t) + f'(t)| < \varepsilon$ pour tout $t > \alpha$. On déduit alors que que pour tout $x > \alpha$, on a :

$$|f(x)| \leq e^{\alpha - x} |f(\alpha)| + \left(1 - e^{\alpha - x}\right)\varepsilon \leq e^{\alpha - x} |f(\alpha)| + \varepsilon$$

puis avec $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha - x} = 0$, on en déduit qu'il existe un réel $\beta > \alpha$ tel que $|f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x > \beta$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrite que $g(x) = \displaystyle\int_\alpha^x g'(t)\,dt + g(\alpha)$, ce qui nous donne :

$$f(x) = e^{-x} \int_\alpha^x e^t (f(t) + f'(t))\,dt + e^{\alpha - x} f(\alpha)$$

et pour $\alpha > 0$ tel que $|f(t) + f'(t)| < \varepsilon$ pour tout $t > \alpha$, cela donne :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq e^{-x} \int_\alpha^x e^t |f(t) + f'(t)|\,dt + e^{\alpha - x} |f(\alpha)| \\ &\leq \varepsilon e^{-x} \int_\alpha^x e^t dt + e^{\alpha - x} |f(\alpha)| = \varepsilon\left(1 - e^{\alpha - x}\right) + e^{\alpha - x} |f(\alpha)| \\ &< \varepsilon + e^{\alpha - x} |f(\alpha)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

pour $x > \beta > \alpha$.

(b) En notant $h = f - \ell$, on dispose d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) + h'(x)) = 0$ et de la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) - \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4. En notant F la primitive de f nulle en 0, on a pour tout réel $x > 0$:

$$\int_0^x (f(t+1) - f(t))\,dt = F(x+1) - F(x) - F(1)$$

le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe un réel $c_x \in]x, x+1[$ tel que :

$$\int_0^x (f(t+1) - f(t))\,dt = f(c_x) - F(1)$$

Dans le cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\,dt = \ell - F(1)$$

De manière analogue, pour $x < 0$ on a :

$$\int_x^0 (f(t+1) - f(t))\, dt = F(1) - (F(x+1) - F(x)) = F(1) - f(d_x)$$

avec $d_x \in \left]x, x+1\right[$ et avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell'$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^0 (f(t+1) - f(t))\, dt = F(1) - \ell'$$

Ce qui donne en définitive $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\, dt = \ell - \ell'$. Pour $f = \arctan$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt = \pi$$

Exo Sup 4.4. Règle de l'Hospital et applications

I est un intervalle réel non réduit à un point et f, g sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

1. *On suppose que f, g sont dérivables sur $I \setminus \{a\}$, où $a \in I$, avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$ (règle de l'Hospital). La réciproque de ce résultat est-elle vraie ?*
2. *Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x - 1}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.*
3. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) > 0$ et $f'(0) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{\frac{\lambda^2 f''(0)}{2f(0)}}$.*
4. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $f : \left]-\alpha, \alpha\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction g définie sur $\left]-\alpha, \alpha\right[\setminus \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\alpha, \alpha\right[$ (voir aussi l'exercice* **??**, *question* **??**).
5. *On suppose que f, g sont dérivables sur $I = \mathbb{R}^+$ telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (règle généralisée de l'Hospital). Dans le cas particulier où $g(x) = x$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.*

6. *On suppose que f, g sont dérivables sur $I = \mathbb{R}^+$ et qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\lambda f(x) + f'(x)) = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\ell}{\lambda}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.*

Solution.

1. De $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I \setminus \{a\}$ on déduit du théorème des accroissements finis que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\left| \dfrac{f'(t)}{g'(t)} - \ell \right| < \varepsilon$ pour tout $t \in J_\eta = (]a - \eta, a + \eta[\cap I) \setminus \{a\}$.
Le théorème généralisé des accroissements finis nous dit que pour tout $x \in J_\eta$ il existe un réel c_x strictement compris entre a et x, donc dans J_η, tel que :
$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - \ell \right| < \varepsilon$$
ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \ell$.
La réciproque de ce résultat est fausse. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 et $g : x \mapsto x$. La fonction f est dérivable avec $f'(0) = 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, alors que $\dfrac{f'}{g'} = f'$ n'a pas de limite en 0 (puisque $f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1}$).

2.
   (a) Notant $f(x) = \arccos(x)$ et $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f(1) = g(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$ (la règle de l'Hospital est encore valable quand a est l'une des extrémités de l'intervalle I).

   (b) Notant $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ et $g(x) = x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(1) = g(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{x^4 + 1} = 1$ et en conséquence, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)}{x - 1} = 1$.

   (c) Pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, on a $\dfrac{\sin(x)}{x} > 0$ et $h(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f(x)}{g(x)}}$, où $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$, $g(x) = x$. On a alors $f(0) = g(0) = 1$ et

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}=0$ (développement limité à l'ordre 3), donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1.$

3. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)>0$, il existe $\eta>0$ tel que $f(t)>0$ pour tout $t\in\,]-\eta,\eta[$ et pour $x>\dfrac{\lambda^2}{\eta^2}$, on a $\left(f\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}\right)\right)^x=e^{g(x)}$ avec $g(x)=x\ln\left(f\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}\right)\right)$. Le changement de variable $x=\dfrac{1}{t^2}$ avec $0<t<\dfrac{\eta}{|\lambda|}$, nous donne $g(x)=\dfrac{\ln(f(\lambda t))}{t^2}=\dfrac{u(t)}{v(t)}$ avec $u(0)=v(0)=0$ et $\dfrac{u'(t)}{v'(t)}=\dfrac{\lambda f'(\lambda t)}{2tf(\lambda t)}$ pour $t\in\left]-\dfrac{\eta}{|\lambda|},\dfrac{\eta}{|\lambda|}\right[\setminus\{0\}$. On a aussi $u'(0)=v'(0)=0$ et $\dfrac{u''(t)}{v''(t)}=\dfrac{\lambda^2 f''(\lambda t)}{2(f(\lambda t)+\lambda t f'(\lambda t))}$, pour $t\in\left]-\dfrac{\eta}{|\lambda|},\dfrac{\eta}{|\lambda|}\right[\setminus\{0\}$, donc :

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{u(t)}{v(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{u'(t)}{v'(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{u''(t)}{v''(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda^2 f''(\lambda t)}{2(f(\lambda t)+\lambda t f'(\lambda t))}=\frac{\lambda^2 f''(0)}{2f(0)}$$

ce qui nous donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}\right)\right)^x=e^{\frac{\lambda^2 f''(0)}{2f(0)}}$.

4. Dans le cas où f est développable en série entière sous la forme $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, on a $a_0=f(0)=0$, $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^{n-1}$ et c'est terminé.

Avec $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$, on voit que g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0)=f'(0)$. Avec $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ pour $]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$, où $u(0)=v(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{2x}=\dfrac{f''(0)}{2}$, on déduit que $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\dfrac{f''(0)}{2}$ (règle de l'Hospital), donc g est dérivable en 0 avec $g'(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$ et g' se prolonge par continuité en 0. Supposant que, pour $n\geq 1$, g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ avec $g^{(n)}(0)=\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$, on a pour tout $x\in\,]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(x)&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)(-1)^{n+1-k}\frac{(n+1-k)!}{x^{n+2-k}}\\&=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\frac{(n+1)!}{k!}\frac{f^{(k)}(x)}{x^{n+2}}x^k=(-1)^{n+1}(n+1)!\frac{u(x)}{v(x)}\end{aligned}$$

où $u(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^k$ et $v(x) = x^{n+2}$. Comme $u(0) = f(0) = 0 = v(0)$ et :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} x^k - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!} x^j \\ &= (-1)^{n+1} \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+1)!} x^{n+1} \end{aligned}$$

on a $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+2)}(x)}{(n+2)(n+1)!} = (-1)^{n+1} \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}$ et $\lim_{x\to 0} g^{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$, donc $g^{(n)}$ est dérivable en 0 avec $g^{(n+1)}(0) = \frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$ et $g^{(n)}$ se prolonge par continuité en 0. La fonction g se prolonge donc en fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\alpha, \alpha[$.

5. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - \ell\right| < \varepsilon$ pour tout $t > \alpha$. Le théorème généralisé des accroissements finis nous dit que pour tout $x > \alpha$, il existe $c_{x,\alpha} \in]\alpha, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(c_{x,\alpha})}{g'(c_{x,\alpha})}$, donc :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x) - g(\alpha)} - \ell\right| \leq \left|\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} - \ell\right| + \left|\frac{f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)}\right| < \varepsilon + \left|\frac{f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)}\right|$$

avec $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = 0$. Il existe donc $\beta > \alpha$ tel que $\left|\frac{f(x)}{g(x) - g(\alpha)} - \ell\right| < 2\varepsilon$ pour tout $x > \beta$. En écrivant que $\frac{f(x)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1}{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| &= \left|\left(1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}\right) \frac{f(x)}{g(x) - g(\alpha)} - \ell\right| \\ &\leq \left|\frac{f(x)}{g(x) - g(\alpha)} - \ell\right| + \left|\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right| \left|\frac{f(x)}{g(x) - g(\alpha)}\right| \\ &< 2\varepsilon + \left|\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right| (2\varepsilon + |\ell|) \end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to +\infty} \frac{g(\alpha)}{g(x)} = 0$. Il existe donc $\gamma > \beta$ tel que $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| < 2\varepsilon + \varepsilon(2\varepsilon + |\ell|)$, ce qui prouve que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x} f(x)}{e^{\lambda x}} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $v'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u'(x)}{v'(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lambda f(x) + f'(x)}{\lambda} = \dfrac{\ell}{\lambda}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\ell}{\lambda}$. Pour $\lambda = 1$, on a une solution rapide de la question **3** de l'exercice **4.3**. Pour $\lambda < 0$, ce résultat n'est plus valable. Prendre $\lambda = -1$, $f(x) = e^x$.

Exo Sup 4.5. Théorème de Darboux et applications

Le théorème des accroissements finis peut être utilisé (avec le théorème des valeurs intermédiaires) pour montrer le théorème de Darboux qui nous dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. On donne ensuite quelques applications du théorème de Darboux.

1. *On se donne une fonction f à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point et il s'agit de montrer que pour tous $a < b$ dans I et tout λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\lambda = f'(c)$. Dans le cas où $f'(a) = f'(b)$, $c = a$ convient. On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$, on se donne $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$ et on définit les fonctions τ_a et τ_b sur $[a, b]$ par :*

$$\tau_a(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \end{cases} \qquad \tau_b(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b \\ \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si } x \neq b \end{cases}$$

   Dans le cas où $\lambda \leq \tau_a(b)$ [resp. $\lambda > \tau_a(b)$] montrer qu'il existe $\alpha \in]a, b]$ [resp. $\alpha \in]a, b[$] tel que $\lambda = \dfrac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a}$ [resp. $\lambda = \dfrac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha}$]. Conclure.

2. *Donner un exemple de fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.*

3. *Justifier l'existence de fonctions définies sur un intervalle réel qui n'admettent pas de primitive.*

4. *Soit I un intervalle réel non réduit à un point.*

   (a) *Montrer qu'une fonction monotone $\varphi : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est continue sur I.*

   (b) *Montrer qu'une fonction convexe et dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ est continûment dérivable (voir aussi la question **3** de l'exercice **4.2**).*

5. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

   (a) *Montrer que si f' ne s'annule jamais, alors f est strictement monotone.*

   (b) *Trouver toutes les fonctions dérivables $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $(f'(x))^2 = 1$ pour tout $x \in I$.*

6. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que s'il existe deux réels $a < b$ dans I tels que $f'(a) = f'(b)$, il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ (il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M passe par $(a, f(a))$).*
7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f''(c) = 0$.*
8. *Soient $a < b$ deux réels et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Montrer que $f'(]a, b[) = \mathbb{R}$.*

Solution.

1. Les fonctions τ_a et τ_b sont continues sur I puisque f est dérivable sur I et on a $\tau_a(a) = f'(a) < \lambda < f'(b) = \tau_b(b)$. L'idée est d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction τ_a ou τ_b en fonction de la position de λ par rapport à $\tau_a(b)$.
   (a) Si $\lambda \leq \tau_a(b)$, on a alors $\tau_a(a) = f'(a) < \lambda \leq \tau_a(b)$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe $\alpha \in]a, b]$ tel que $\lambda = \tau_a(\alpha) = \dfrac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a}$, puis le théorème des accroissements qu'il existe $c \in]a, \alpha[$ tel que $\lambda = f'(c)$.
   (b) Si $\lambda > \tau_a(b)$, on a alors $\tau_b(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tau_a(b) < \lambda < f'(b) = \tau_b(b)$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $\lambda = \tau_b(\alpha) = \dfrac{f(b) - f(\alpha)}{b - \alpha}$, puis le théorème des accroissements qu'il existe $c \in]\alpha, b[$ tel que $\lambda = f'(c)$.
2. Il suffit de donner un exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue en 0 ($f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$, $f'(0) = 0$ et $f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = (-1)^{n+1}$).
   Ce qu'il manque à une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires pour être continue est donné par le résultat suivant : une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires est continue si, et seulement si, pour tout réel y, l'ensemble $f^{-1}\{y\}$ est fermé dans I (on peut même se contenter de $y \in I \cap \mathbb{Q}$).
3. Si f admet une primitive F sur un intervalle I, le théorème de Darboux nous dit alors qu'elle doit vérifier la propriété des valeurs intermédiaires. Une fonction ne vérifiant pas cette propriété, par exemple une fonction en escalier non constante, n'admet pas de primitive sur I.

4.

(a) On suppose que φ est croissante et vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in I$ on a $\lim\limits_{t \to x} \varphi(t) = \varphi(x)$. On sait déjà qu'en tout $x \in I$, φ admet une limite à gauche $\varphi(x^-) = \sup\limits_{t \in I,\, t<x} \varphi(t) \leq \varphi(x)$ (quand x n'est pas l'extrémité gauche de I) et à droite $\varphi(x^+) = \inf\limits_{t \in I,\, t>x} \varphi(t) \geq \varphi(x)$ (quand x n'est pas l'extrémité droite de I) et il s'agit de montrer que $\varphi(x^-) = \varphi(x^+) = \varphi(x)$ pour $x \in \overset{\circ}{I}$ [resp. $\varphi(x^-) = \varphi(x)$, resp. $\varphi(x^+) = \varphi(x)$, dans le cas où x est une extrémité de I]. Supposons que x n'est pas l'extrémité gauche de I et que $\varphi(x^-) < \varphi(x)$. Pour tout $t \in I$ tel que $t < x$, on a :

$$\varphi(t) \leq \varphi\left(x^-\right) < \varphi(x)$$

Comme la fonction φ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, pour tout $\lambda \in \left]\varphi(x^-), \varphi(x)\right[\subset \left]\varphi(t), \varphi(x)\right[$, il existe $c \in \left]t, x\right[$ tel que $\lambda = \varphi(c)$, mais alors $\lambda = \varphi(c) \leq \varphi(x^-)$, ce qui est en contradiction avec $\lambda > \varphi(x^-)$. On a donc $\varphi(x^-) = \varphi(x)$. On montre de manière analogue que $\varphi(x) = \varphi(x^+)$. Les limites à droite et à gauche en x sont donc égales à $\varphi(x)$, ce qui prouve la continuité de φ en x.

(b) Si f est convexe et dérivable de I dans $\mathbb{R}$, sa dérivée f' est alors croissante. Cette dérivée vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, on déduit de la question précédente qu'elle est continue sur I.

5.

(a) Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, le théorème de Darboux nous dit que f' est de signe constant (s'il existe $x < y$ dans I tels que $f'(x) < 0$ et $f'(y) > 0$, il existe alors $z \in \left]x, y\right[$ tel que $f'(z) = 0$), donc f est strictement monotone.

(b) La fonction f' qui ne s'annule jamais est de signe constant telle que $(f')^2 = 1$, donc $f' = -1$ ou $f' = 1$ et on a soit $f(x) = -x + c$ pour tout $x \in I$, soit $f(x) = x + c$ pour tout $x \in I$, où c est une constante réelle.

6. On désigne par τ_a la fonction définie sur I par :

$$\tau_a(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ \tau_a'(x) = \frac{1}{x-a}\left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

En particulier, on a pour $x = b$:

$$\begin{aligned} \tau_a'(b) &= \frac{1}{b-a}\left(f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) = \frac{1}{b-a}\left(f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \\ &= -\frac{\tau_a(b) - \tau_a(a)}{b - a} = -\tau_a'(c) \end{aligned}$$

où $c \in \left]a, b\right[$. Dans le cas où $\tau_a'(c) = 0$, on a $\dfrac{1}{c-a}\left(f'(c) - \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right) = 0$, soit $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$. Dans le cas contraire, on a $\tau_a'(b)\,\tau_a'(c) = -\left(\tau_a'(c)\right)^2 < 0$ et le théorème de Darboux nous dit qu'il existe $d \in \left]c, b\right[$ tel que $\tau_a'(d) = 0$, ce qui équivaut à $f'(d) = \dfrac{f(d)-f(a)}{d-a}$.

7. Pour $f' = 0$, f est constante et le résultat est trivial. On suppose donc que $f' \neq 0$ et on se donne un réel a tel que $f'(a) \neq 0$. On peut supposer que $f'(a) > 0$. Si $f''(a) = 0$ c'est alors terminé. Sinon, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on peut écrire pour tout réel $x \neq a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2$$

où c_x est un réel strictement compris entre a et x et on a :

$$\frac{f''(c_x)}{2}(x-a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{|x|\to+\infty}{\to} -f'(a) < 0$$

puisque $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. On peut donc trouver deux réel $c_1 < a$ et $c_2 > a$ tels que $f''(c_1) > 0$ et $f''(c_2) < 0$. Le théorème de Darboux nous assure alors l'existence d'un réel $c \in \left]c_1, c_2\right[$ tel que $f''(c) = 0$.

8. En notant $c = \dfrac{a+b}{2}$, on a $\displaystyle\lim_{h\to\left(\frac{b-a}{2}\right)^-} f(c+h) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{h\to\left(\frac{b-a}{2}\right)^-} f(c-h) = \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, donc pour tout réel $\lambda > 0$, il existe des réels h, k dans $\left]0, \dfrac{b-a}{2}\right[$ tels que $f(c-h) > f(c) > f(c) - \lambda h$ et $f(c+k) > f(c) + \lambda\dfrac{b-a}{2} > f(c) + \lambda k$, ce qui nous donne :

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h} = f'(\alpha) < \lambda < \frac{f(c+k)-f(c)}{k} = f'(\beta)$$

avec $\alpha \in \left]c-h, c\right[$ et $\beta \in \left]c, c+k\right[$. Le théorème de Darboux nous assure alors de l'existence de $\gamma \in \left]\alpha, \beta\right[$ tel que $\lambda = f'(\gamma)$. Pour $\lambda \leq 0$, on procède de manière analogue avec h, k dans $\left]0, \dfrac{b-a}{2}\right[$ tels que $f(c-h) > f(c) - \lambda\dfrac{b-a}{2} \geq f(c) - \lambda h$ et $f(c+k) > f(c) \geq f(c) + \lambda k$, ce qui nous donne :

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h} = f'(\alpha) < \lambda < \frac{f(c+k)-f(c)}{k} = f'(\beta)$$

Exo Sup 4.6. Équation fonctionnelle $f' = f \circ f$ avec f strictement croissante

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante et dérivable, telle que $f' = f \circ f$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'une telle fonction existe.

1. *Montrer la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée première f' strictement croissante et à valeurs strictement positives.*
2. *En déduire que $f(0) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.*
3. *Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f''(t) \geq (f'(t))^2$ pour tout réel $t > \alpha$. En déduire que $x - \alpha \leq \dfrac{1}{f'(\alpha)} - \dfrac{1}{f'(x)}$ pour tout $x > \alpha$ et conclure.*

Solution.

1.
   (a) De l'égalité $f' = f \circ f$ avec f dérivable sur $\mathbb{R}$, on déduit que f' est dérivable, donc continue, avec $f'' = (f' \circ f) f'$ qui est continue comme composée et produit. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) L'égalité $f' = f \circ f$ avec f strictement croissante nous dit aussi que f' est strictement croissante.

   (c) Comme f est dérivable et croissante, sa dérivée est à valeurs positives. S'il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$, de l'encadrement $0 \leq f'(x) \leq f'(x_0) = 0$ pour $x \leq x_0$, on déduit que f' est nulle sur $]-\infty, x_0]$ et donc que f est constante sur cet intervalle, ce qui n'est pas compatible avec la stricte croissance de f. On a donc $f'(x) > 0$ pour tout réel x.

2.
   (a) Si $f(0) \leq 0$, on a alors $f'(0) = f(f(0)) \leq f(0) \leq 0$, en contradiction avec $f'(0) > 0$. On a donc $f(0) > 0$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe un réel $c_x \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + x f'(c_x) > x f'(0)$$

   avec $f'(0) > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$.

   (c) Pour tout réel $A > 0$, on peut donc trouver un réel $\alpha > 0$ tel que $f'(x) > 2A$ pour tout $x > \alpha$. En utilisant le théorème des accroissements finis, on en déduit que pour tout réel $x > \alpha$, il existe un réel $c_x \in]\alpha, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(c_x) > 2A$ et en conséquence :

$$\frac{f(x)}{x - \alpha} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{f(\alpha)}{x - \alpha} > 2A$$

(on a $f(\alpha) > f(0) > 0$), soit $\dfrac{f(x)}{x}\dfrac{1}{1-\frac{\alpha}{x}} > 2A$, ou encore $\dfrac{f(x)}{x} > 2A\left(1-\dfrac{\alpha}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\alpha}{x}\right) = 1$. Il existe donc un réel $\beta > \alpha$ tel que $1-\dfrac{\alpha}{x} > \dfrac{1}{2}$ pour tout $x > \beta$, ce qui nous donne $\dfrac{f(x)}{x} > A$ pour tout $x > \beta$. On a donc bien $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

3. Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{f(t)}{t} > 1$ pour tout $t > \alpha$. Pour tout $t > \alpha$ et tout $h > 0$, il existe un réel $c_{t,h} \in \left]f(t), f(t+h)\right[$ tel que

$$\begin{aligned} f'(t+h) - f'(t) &= f(f(t+h)) - f(f(t)) \\ &= (f(t+h) - f(t))\, f'(c_{t,h}) > (f(t+h) - f(t))\, f'(f(t)) \\ &> (f(t+h) - f(t))\, f'(t) \end{aligned}$$

(f, f' sont strictement croissantes et $f(t) > t$), donc :

$$\frac{f'(t+h) - f'(t)}{h} > \frac{f(t+h) - f(t)}{h} f'(t)$$

Faisant tendre h vers 0^+, on en déduit que $f''(t) \geq (f'(t))^2$, soit $1 \leq \dfrac{f''(t)}{(f'(t))^2}$. Par intégration, il en résulte que pour tout $x > \alpha$, on a :

$$x - \alpha = \int_\alpha^x dt \leq \int_\alpha^x \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} dt = -\int_\alpha^x \left(\frac{1}{f'}\right)'(t)\, dt = \frac{1}{f'(\alpha)} - \frac{1}{f'(x)} \quad (4.1)$$

ce qui est peu compatible avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{f'(\alpha)} - \dfrac{1}{f'(x)}\right) = \dfrac{1}{f'(\alpha)}$. En conclusion notre équation fonctionnelle n'a pas de solution.

Exo Sup 4.7. Accroissements finis et sommes de Riemann

On se donne deux réels $a < b$ et deux fonctions f, g de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ dérivables de dérivées Riemann-intégrables sur $[a, b]$.

1. *Montrer que* $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dx = f(b) - f(a)$.

2. *Montrer que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt$.

3. *On suppose que* $[a, b] = [0, 1]$ *et on note* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{n+1} - S_n) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Solution. On rappelle que si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est une subdivision de $[a, b]$ telle que :

$$a_{n,0} = a < a_{n,1} < \cdots < a_{n,n-1} < a_{n,n} = b \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) = 0$$

on a alors pour toute suite réelle $(c_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ telle que $c_{n,k} \in [a_{n,k}, a_{n,k+1}]$ pour tout k compris entre 0 et $n - 1$:

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k})\, \varphi(c_{n,k})$$

(sommes de Riemann).

1. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par $(a_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ la subdivision de pas constant $\dfrac{b-a}{n}$ où $a_{n,k} = a + k\dfrac{b-a}{n}$, pour $0 \leq k \leq n$. Le théorème des accroissements finis nous dit que pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, il existe un réel $c_{n,k} \in \left]a_{n,k}, a_{n,k+1}\right[$ tel que :

$$f(a_{n,k+1}) - f(a_{n,k}) = (a_{n,k+1} - a_{n,k})\, f'(c_{n,k}) = \frac{b-a}{n} f'(c_{n,k})$$

ce qui nous donne :

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(a_{n,k+1}) - f(a_{n,k})\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k})$$

et on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction f' qui tend vers $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt$ quand n tend vers l'infini. On a donc $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$.

2. Le fonction fg est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée $(fg)' = f'g + fg'$ Riemann-intégrable (l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre), donc :

$$f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) = \int_a^b (fg)'(t)\, dt = \int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt + \int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) + f(1) = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f'(c_{n,k}) + f(1)$$

où $c_{n,k} \in \left] \dfrac{k}{n+1}, \dfrac{k}{n} \right[$ pour k compris entre 1 et n, ce qui peut aussi s'écrire :

$$S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} f'(c_{n,k}) + f(1) - \frac{1}{n+1} R_n$$

où :

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-c_{n,k}\right)f'(c_{n,k})\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-c_{n,k}\right)|f'(c_{n,k})| \\
&\leq \|f'\|_\infty \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{k}{n+1}\right) = \frac{\|f'\|_\infty}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{\|f'\|_\infty}{2}
\end{aligned}$$

(f' est bornée car Riemann-intégrable) et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}c_{n,k}f'(c_{n,k})\right) = \int_0^1 tf'(t)\,dt$$

(on a $\frac{k}{n+1} < c_{n,k} < \frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$, ce qui nous donne une somme de Riemann pour $x \mapsto xf'(x)$), donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(S_{n+1}-S_n) &= -\int_0^1 tf'(t)\,dt + f(1) \\
&= -[tf(t)]_0^1 + \int_0^1 f(t)\,dt + f(1) = \int_0^1 f(t)\,dt
\end{aligned}$$

Exo Sup 4.8. Différentiabilité de $(x,y) \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Soient I un intervalle ouvert non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à laquelle on associe la fonction $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

1. *Montrer que φ est continue sur I^2 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I^2\setminus\{(x,x) \mid x \in I\}$.*
2. *Dans le cas où f est deux fois dérivable en $a \in I$, montrer que φ est différentiable en (a,a).*

Solution.

1. Les fonctions $(x,y) \mapsto f(y)-f(x)$ et $(x,y) \mapsto y-x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^2, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I^2 \setminus \Delta$ où $\Delta = \{(x,x) \mid x \in I\}$ et en particulier elle est continue. On se donne $a \in I$ et $r > 0$ tel que $K = [a-r, a+r]^2 \subset I^2$. Pour tout $(x,y) \in K \setminus \Delta$, il existe un réel $c_{x,y}$ strictement compris entre x et y tel que $\varphi(x,y) - \varphi(a,a) = f'(c_{x,y}) - f'(a)$. Comme f' est continue sur I, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta \in]0, r[$ tel que $|f'(t) - f'(a)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [a-\eta, a+\eta]$. Pour $(x,y) \in [a-\eta, a+\eta]^2\setminus\Delta$, on a $c_{x,y} \in [a-\eta, a+\eta]$ et en conséquence, $|\varphi(x,y) - \varphi(a,a)| < \varepsilon$. Cela prouve que la fonction φ est

continue en (a,a). En conclusion, φ est continue sur I^2.
On peut aussi procéder comme suit. Pour $y \neq x$ dans I, on a :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,dt = (y-x)\int_0^1 f'(x+\theta(y-x))\,d\theta$$

donc $\varphi(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'(x+\theta(y-x))\,d\theta$, cette égalité étant encore vérifiée pour $y = x$. La fonction $(x,y,\theta) \mapsto f'(x+\theta(y-x))$ étant continue sur $I^2 \times [0,1]$ et l'intégration se faisant sur un segment, on en déduit que φ est continue sur I^2.

2. On se donne $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \subset I$. Pour $h \neq k$ dans $[-r,r]$, on a :

$$\varphi(a+h, a+k) = \frac{f(a+k) - f(a+h)}{k-h}$$

avec $f(a+t) = f(a) + f'(a)\,t + \dfrac{f''(a)}{2}t^2 + g(t)$ pour $t \in [-r,r]$, où $g(t) = o\left(t^2\right)$ (développement de Taylor-Young), ce qui nous donne :

$$\varphi(a+h, a+k) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2}(k+h) + \frac{g(k)-g(h)}{k-h}$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-r,r]$ avec $g'(t) = f'(a+t) - f'(a) - f''(a)\,t$ et $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{g'(t)}{t} = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in \left]0, r\right[$ tel que $|g'(t)| < \varepsilon\,|t|$ pour tout $t \in [-\eta, \eta]$ (on a $g'(0) = 0$). Le théorème des accroissements finis nous dit alors que pour tous $h \neq k$ dans $[-r,r]$, il existe c strictement compris entre h et k tel que :

$$\left|\frac{g(k)-g(h)}{k-h}\right| = |g'(c)| \leq \varepsilon\,|c| \leq \varepsilon \max(|h|, |k|) = \varepsilon\,\|(h,k)\|_\infty$$

(pour $h < k$, on a $-\max(|h|,|k|) \leq -|h| \leq h < c < k \leq |k| \leq \max(|h|,|k|)$).
La fonction φ est donc différentiable en (a,a) de différentielle donnée par $d\varphi(a,a)(h,k) = \dfrac{f''(a)}{2}(k+h)$. On a aussi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(a,a) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(a,a) = \dfrac{f''(a)}{2}$.

Chapitre 5

Intégration

Exercice 5.1. Intégrales de Wallis

On note $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des intégrales de Wallis.*

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.
2. *Calculer* W_0 *et* W_1.
3. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*
$$W_n = 2\int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)^n}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{\mathrm{ch}^{n+1}(\theta)}$$
4. *Montrer que la suite* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers* 0.
5. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$*. En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((n+1)\,W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante, puis que* $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$*. Il suffit donc de calculer* W_n *pour* n *pair ou pour* n *impair.*
6. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a :*
$$(\cos(t))^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)\,t)$$
puis en déduire que $W_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\dfrac{\pi}{2}$ *et* $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.
7. *Montrer que l'on a* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$*, ce qui se traduit par* $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$.*

   (a) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}$, puis que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

   (b) *Montrer que l'on a aussi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et en déduire ainsi la valeur de l'intégrale de Gauss.*

Solution.

1. Le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n (\theta)\, d\theta$$

2. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt = 1$.

3. Le changement de variable $x = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ nous donne $dx = \dfrac{1+x^2}{2} dt$, $\cos(t) = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) - 1 = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et :

$$W_n = 2\int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)^n}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} dx$$

   Puis le changement de variable $x = \operatorname{th}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ nous donne $dx = \dfrac{1-x^2}{2} d\theta$, $\operatorname{ch}(\theta) = 2\operatorname{ch}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1 = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ et :

$$W_n = \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{n+1} \frac{2dx}{1-x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{\operatorname{ch}^{n+1}(\theta)}$$

4. Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos(t) \leq 1$, donc $0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par intégration, $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante minorée par 0 et en conséquence, convergente vers un réel $\lambda \geq 0$. Pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq W_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n(t)\, dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt \leq \int_0^{\varepsilon} dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varepsilon)\, dt \leq \varepsilon + \frac{\pi}{2}\cos^n(\varepsilon)$$

   (sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos(t) \leq 1$ et cos est décroissante) avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos^n(\varepsilon) = 0$ (puisque $0 < \cos(\varepsilon) < 1$ pour $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$), il existe donc un entier naturel n_ε tel que $\frac{\pi}{2}\cos^n(\varepsilon) < \varepsilon$. On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée puisque $0 \leq \cos(t) \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(t) = 0$ pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

5. Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1-\sin^2(t)\right)dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n(t)\sin(t))\sin(t)\,dt \\ &= W_n - \left[-\sin(t)\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1}\end{aligned}$$

soit $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$. En notant $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$, on a :

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = u_n$$

donc $u_n = u_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$, soit $W_{n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(n+1)W_n}$. Avec cette relation, on retrouve le fait que la limite λ de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle. En effet de l'égalité $W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$, on déduit en passant à la limite quand n tend vers l'infini que $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$.

6. On a :

$$(\cos(t))^n = \frac{\left(e^{it}+e^{-it}\right)^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikt}e^{-i(n-k)t} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t}$$

donc $(\cos(t))^n = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t}\right) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)t)$. Il en résulte que :

$$W_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2(k-n))t)\,dt = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{2}$$

et $W_{2n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)W_{2n}} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

7. On a $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)(W_{2n})^2}$ avec $1 \leq \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leq \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$ (puisque la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante), donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ce qui compte tenu de $W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{2}$ se traduit par $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

8.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(\theta)$, nous donne :

$$\begin{aligned} I_n &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2(\theta)\right)^n \cos(\theta)\,d\theta = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\,d\theta \\ &= \sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{n}\frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)W_{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2n+1}W_{2n}} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ce qui nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{]0,\sqrt{n}[}(t)$. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et on a $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $n_t \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \in [0,\sqrt{n}[$ pour tout $n \geq n_t$, donc on a $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n > 0$ et $\ln(f_n(t)) = n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t^2$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$. De plus avec l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x \in [0,1[$, on déduit que $\ln(f_n(t)) \leq -t^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \in [0,\sqrt{n}[$, ce qui nous donne $f_n(t) \leq e^{-t^2}$, cette inégalité étant encore valable pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n} \leq t$ puisque $f_n(t) = 0$ dans ce cas. On a donc $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exo Sup 5.2. Calcul de $\zeta(2)$ en utilisant une intégrale double

On rappelle que $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

1. *Montrer que* $\zeta(2) = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}dy = \iint_{]0,1[^2}\frac{dxdy}{1-xy}$.

2.

   (a) *Montrer que l'application* $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur lui même et préciser son inverse.*

   (b) *Déterminer l'image par* φ^{-1} *du carré ouvert* $]0,1[^2$.

   (c) *Montrer que pour* $u \in]0,1[$, *on a* $\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin(u)$ *et* $\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin(u)}{2}$.

   (d) *En utilisant le changement de variable* $(x,y) = \varphi(u,v)$, *montrer que* $\iint_{]0,1[^2}\frac{dxdy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}$ *et en conséquence* $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution.

1.

(a) Pour tout réel $y \in \left]0,1\right[$, on a $-\dfrac{\ln(1-y)}{y} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n}$, les fonctions considérées étant toutes à valeurs positives et continues sur $\left]0,1\right[$. Tenant compte de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, on déduit du théorème de convergence monotone que :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

(b) Pour y fixé dans $\left]0,1\right[$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-xy} = \left[-\frac{\ln(1-xy)}{y}\right]_0^1 = -\frac{\ln(1-y)}{y}$ et :

$$\int\int_{]0,1[^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{1-xy}\right) dy = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

2.

(a) L'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ étant linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$ sur lui même (son déterminant vaut $2 \neq 0$) d'inverse $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$, elle réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

(b) L'image $\varphi^{-1}\left(]0,1[^2\right)$ est le carré ouvert $\mathcal{C}$ de sommets $\varphi^{-1}(0,0) = (0,0)$, $\varphi^{-1}(1,0) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\varphi^{-1}(1,1) = (1,0)$ et $\varphi^{-1}(0,1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. En effet, en désignant par (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, un point du carré ouvert $]0,1[^2$ s'écrit $xe_1 + ye_2$ avec $0 < x, y < 1$ et son image par φ^{-1} est $x\left(\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2\right) + y\left(\dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{1}{2}e_2\right)$, elle est donc dans le carré $\mathcal{C}$ et réciproquement tout point de $\mathcal{C}$ s'écrit $\varphi^{-1}(xe_1 + ye_2)$ avec $xe_1 + ye_2 \in]0,1[^2)$.

(c) Si $g(u) = \arctan\left(\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, on a pour $u \in \left]0,1\right[$:

$$g'(u) = \frac{\sqrt{1-u^2} - u\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin'(u)$$

et en conséquence $g(u) = \arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = 0$ et $g(u) = \arcsin(u)$. De même, si

$h(u) = \arctan\left(\dfrac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, on a pour $u \in \left]0,1\right[$:

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{-\sqrt{1-u^2} - (1-u)\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1 + \frac{(1-u)^2}{1-u^2}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin'(u) \end{aligned}$$

et en conséquence $h(u) = -\dfrac{1}{2}\arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = \dfrac{\pi}{4}$ et $h(u) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\arcsin(u)$.

(d) Le changement de variable $(x,y) = \varphi(u,v) = (u-v, u+v)$ nous donne $dxdy = 2dudv$ et :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{]0,1[^2} \frac{dxdy}{1-xy} = 2\iint_{\varphi^{-1}\left(]0,1[^2\right)} \frac{dudv}{1-u^2+v^2} \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-u}^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-(1-u)}^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du\right) \\ &= 4\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du\right) \end{aligned}$$

avec, pour u fixé dans $\left]0,1\right[$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{1-u^2+v^2} &= \frac{1}{1-u^2}\int \frac{dv}{1+\frac{v^2}{1-u^2}} = \frac{1}{1-u^2}\int \frac{dv}{1+\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{g(u)}{\sqrt{1-u^2}} du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{h(u)}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}} du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(u)\right) du \\ &= \left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\left[\arcsin(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{72}\right) = \frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

et $I = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exo Sup 5.3. Comparaison série-intégrale (2)

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *une fonction décroissante telle que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge, cette intégrale étant non nulle. Montrer que, pour tout réel strictement positif* x*, la série* $\sum f(nx)$ *est convergente et qu'on a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$*.*

2. *Montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2n^2} = \frac{\pi}{2}$*.*

3. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+,*}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$*.*

   (a) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = e^{\ell}$*.*

   (b) *Notant* h *la fonction définie par* $h(x) = f(x) - \ell\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ *sur* $\mathbb{R}^+$*, montrer que* $h'(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(f(x))$ *et* $h(x+1) - h(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(f(x))$*.*

   (c) *Montrer que* $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\ell}-1}{\ell} f(x)$*.*

   (d) *Montrer que si* $\ell > 0$*, alors la série* $\sum f(n)$ *diverge et :*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{e^{\ell}-1}\int_0^{n+1} f(t)\,dt$$

   (e) *Montrer que si* $\ell < 0$*, alors la série* $\sum f(n)$ *converge et :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{e^{\ell}-1}\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt$$

   (f) *Montrer que, pour tout réel* α *strictement positif, on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha-1}\ln(n+1)$*.*

4. *Soient* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *et* $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ *une fonction continue par morceaux.*

   (a) *Montrer que l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est convergente si, et seulement si, pour toute suite croissante* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* $[a, b[$ *telle* *que* $x_0 = a$, $x_n > a$ *pour tout* $n \geq 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b$, *la série* $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ *est convergente. Dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$$

(b) *On suppose que* f *est à valeurs réelles positives. Montrer que l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est convergente si, et seulement si, il existe une suite croissante* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de* $[a, b[$ *avec* $x_0 = a$, $x_n > a$ *pour tout* $n \geq 1$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b$, *telle que la série* $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ *soit convergente.*

(c) *Montrer que, s'il existe une suite croissante* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de points de* $[a, b[$ *telle que* $x_0 = a$, $x_n > a$ *pour tout* $n \geq 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\, dt = 0$, *alors la convergence de la série* $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ *entraîne celle de l'intégrale* $\int_a^b f(t)\, dt$.

5. *Montrer que, pour* $0 < \alpha \leq 1$, *l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ *est divergente.*
6. *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $\beta > 0$.*Montrer que l'intégrale* $\int_\pi^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)} dt$ *est convergente si, et seulement si,* $\beta - 2\alpha > 2$.
7. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue par morceaux et décroissante à valeurs positives telle que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t)\, dt$ *converge. Par exemple pour* $f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$, *où* $\alpha > 0$ *et* $\beta \geq 0$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ *est convergente.*

Solution.

1. Comme f est décroissante et $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et f est positive (exercice **??**). Pour $x > 0$, la série $\sum f(nx)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(xt)\, dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(u)\, du$, donc convergente.

   Les inégalités $\int_{n+1}^{+\infty} f(xt)\, dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(xk) \leq \int_n^{+\infty} f(xt)\, dt$ s'écrivent aussi $\int_{(n+1)x}^{+\infty} f(u)\, du \leq x \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(xk) \leq \int_{nx}^{+\infty} f(u)\, du$ et en particulier, pour $n = 0$

on obtient :
$$\int_x^{+\infty} f(u)\,du \leq x\sum_{k=1}^{+\infty} f(xk) \leq \int_0^{+\infty} f(u)\,du$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} x\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(xk) = \int_0^{+\infty} f(u)\,du$, ce qui revient à dire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nx) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

2. Pour $f(x) = e^{-x^2}$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$, ou encore :

$$\lim_{x\to 0} x\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2n^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2x}$, ou encore $\lim\limits_{x\to 0} x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2n^2} = \frac{\pi}{2}$.

3.

(a) Comme f est à valeurs strictement positives, il est équivalent de montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right) = \ell$. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \ln(f(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout réel $x > 0$:

$$\ln\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right) = g(x+1) - g(x) = g'(c_x) = \frac{f'(c_x)}{f(c_x)}$$

où $c_x \in \left]x, x+1\right[$. De $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ell$, on déduit que :

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(c_x)}{f(c_x)} = \ell$$

(b) La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$h'(x) = f'(x) - \ell f(x) = f(x)\left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \ell\right) = \underset{x\to +\infty}{o}(f(x))$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout réel $x > 0$:

$$h(x+1) - h(x) = h'(c_x)$$

où $c_x \in]x, x+1[$, donc $\dfrac{h(x+1)-h(x)}{f(x)} = \dfrac{h'(c_x)}{f(x)} = \dfrac{h'(c_x)}{f(c_x)}\dfrac{f(c_x)}{f(x)}$. Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ell \neq 0$ et $f(x) > 0$, on déduit qu'il existe un réel $x_0 \geq 0$ tel que $f'(x)$ soit non nulle de signe constant sur $[x_0, +\infty[$, ce qui signifie que f est strictement monotone sur $[x_0, +\infty[$. On a donc, pour tout $x \geq x_0$, $1 < \dfrac{f(c_x)}{f(x)} < \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ pour $\ell > 0$ ou $0 < \dfrac{f(x+1)}{f(x)} < \dfrac{f(c_x)}{f(x)} < 1$ pour $\ell < 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ étant bornée puisqu'elle est à valeurs positives avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ell$. Dans tous les cas, il existe un réel $M > 0$ tel que $0 < \dfrac{f(c_x)}{f(x)} \leq M$ pour tout $x \geq x_0$. Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h'(c_x)}{f(c_x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h'(x)}{f(x)} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x+1)-h(x)}{f(x)} = 0$, ce qui signifie que $h(x+1) - h(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(f(x))$.

(c) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{h(x+1)-h(x)}{f(x)} &= \frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} - \frac{\ell}{f(x)}\int_x^{x+1} f(t)\,dt \\ &= \left(\frac{f(x+1)}{f(x)} - 1\right) - \frac{\ell}{f(x)}\int_x^{x+1} f(t)\,dt\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x+1)-h(x)}{f(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x+1)}{f(x)} - 1\right) = e^{\ell} - 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell}{f(x)}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt = e^{\ell} - 1$, soit $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\ell}-1}{\ell} f(x)$.

(d) Pour $\ell > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = e^{\ell} > 1$, donc la série $\sum f(n)$ est divergente (critère de d'Alembert).
On peut aussi dire que $f(n) \geq f(x_0) > 0$ pour $n \geq x_0$, donc la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et la série diverge.
Avec $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\ell}-1}{\ell} f(n)$ et la divergence de la série à termes strictement positifs $\sum f(n)$, on déduit qu'on a l'équivalence des sommes partielles $\dfrac{e^{\ell}-1}{\ell}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_0^{n+1} f(t)\,dt$.

(e) Pour $\ell < 0$, de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = e^{\ell} < 1$, on déduit que la série à termes positifs $\sum f(n)$ est convergente et on a l'équivalence des restes :

$$\frac{e^{\ell}-1}{\ell}\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt$$

(f) Pour $f(x) = \alpha^x \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}^+$, où $\alpha > 1$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(\alpha) + \frac{1}{(1+x)\ln(1+x)} \right) = \ln(\alpha) > 0$$

donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \ln(1+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\alpha)}{\alpha-1} \int_0^n \alpha^x \ln(1+x)\, dx$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^n \alpha^x \ln(1+x)\, dx &= \left[\frac{\alpha^x}{\ln(\alpha)} \ln(1+x) \right]_0^n - \frac{1}{\ln(\alpha)} \int_0^n \frac{\alpha^x}{1+x} dx \\ &= \frac{\alpha^n}{\ln(\alpha)} \ln(n+1) - \frac{1}{\ln(\alpha)} \int_0^n \frac{\alpha^x}{1+x} dx \end{aligned}$$

Comme les intégrales $\int_0^{+\infty} \alpha^x \ln(1+x)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha^x}{1+x} dx$ sont divergentes avec $\frac{\alpha^x}{1+x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\alpha^x \ln(1+x)\right)$, on en déduit que :

$$\int_0^n \frac{\alpha^x}{1+x} dx \underset{n\to+\infty}{=} o \int_0^n \alpha^x \ln(1+x)\, dx$$

et $\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \ln(1+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(\alpha)}{\alpha-1} \frac{\alpha^n}{\ln(\alpha)} \ln(n+1) = \frac{\alpha^n}{\alpha-1} \ln(n+1)$.

4.

(a) On note $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$. Dire que $\int_a^b f(t)\, dt$ converge équivaut à dire que F a une limite finie ℓ en b, ce qui équivaut encore à dire que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ qui converge en croissant vers b avec $x_0 = a$ et $x_n > a$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On conclut alors en écrivant que :

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt.$$

(b) La question précédente nous dit que si $\int_a^b f(t)\, dt$ converge alors la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ est convergente pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ qui converge vers b avec $x_0 = a$ et $x_n > a$ pour tout $n \geq 1$ (l'hypothèse $f \geq 0$ n'est pas utile ici). Supposons qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$, avec $x_0 = a$, $x_n > a$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, telle que la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ soit convergente vers un réel S. En notant $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt = \int_a^{x_n} f(t)\, dt = F(x_n) \leq S$$

du fait que f est à valeurs positives (ce qui entraîne que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ et la fonction F sont croissantes). Comme pour tout réel $x \in [a, b[$, on peut trouver un entier n tel que $x_n \leq x < b$ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$), on en déduit que $F(x) \leq F(x_n) \leq S$ et la fonction F est croissante majorée, donc convergente, ce qui revient à dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Sans l'hypothèse de positivité, la condition suffisante ne garantit pas la convergence de l'intégrale comme le montre l'exemple de $f(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ avec la suite $(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Notons $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt < \varepsilon \text{ et } \left|\sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - S\right| < \varepsilon$$

Pour tout réel $x \in]x_{n_0}, b[$, il existe un entier $n \geq n_0$ tel que $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers b) et on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt\right| &= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_{n+1}} f(t)\,dt\right| \\ &= \left|\int_x^{x_{n+1}} f(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_x^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt \leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt < \varepsilon\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f(t)\,dt - S\right| &\leq \left|\int_a^x f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt\right| + \left|\sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - S\right| \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

On a donc ainsi montré que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente vers S.

5. En utilisant une intégration par parties, on vérifie facilement que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ sont convergentes pour $\alpha > 0$.

Comme pour $t \geq 1$ et $0 < \alpha \leq 1$, on a $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \geq \left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right|$ (qui résulte de $t \geq t^\alpha$ ou encore $t^{1-\alpha} \geq 1$), il nous suffit de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente. Pour ce faire, on utilise la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (n\pi)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour $n \geq 1$, le changement de variable $t = n\pi + u$ nous donne :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{n\pi + u}du \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi \sin(u)\,du = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

et en conséquence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=+\infty$, ce qui entraîne la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$.

6. Pour tout réel $t>0$, on note $f(t)=\dfrac{t^\alpha}{1+t^\beta\sin^2(t)}$. Cette fonction est continue à valeurs positives. On note pour tout entier $n\geq 1$:

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta\sin^2(x)}dx=\int_0^\pi\frac{(n\pi+t)^\alpha}{1+(n\pi+t)^\beta\sin^2(t)}dt$$

et on a :

$$(n\pi)^\alpha\int_0^\pi\frac{dt}{1+((n+1)\pi)^\beta\sin^2(t)}\leq u_n\leq((n+1)\pi)^\alpha\int_0^\pi\frac{dt}{1+(n\pi)^\beta\sin^2(t)}$$

(les fonctions $x\mapsto x^\alpha$ et $x\mapsto x^\beta$ sont croissantes pour $\alpha\geq 0$ et $\beta>0$).
Pour tout réel $\lambda>0$, on a $\displaystyle\int_0^\pi\frac{dt}{1+\lambda\sin^2(t)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\lambda\sin^2(t)}$ et le changement de variable $x=\tan(t)$, nous donne :

$$\int_0^\pi\frac{dt}{1+\lambda\sin^2(t)}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\left(1+\lambda\frac{x^2}{1+x^2}\right)}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(1+\lambda)x^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\lambda}}$$

On a donc $\dfrac{\pi(n\pi)^\alpha}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^\beta}}\leq u_n\leq\dfrac{\pi((n+1)\pi)^\alpha}{\sqrt{1+(n\pi)^\beta}}$ et $u_n\underset{n\to+\infty}{\backsim}\dfrac{\pi^{\alpha+1-\frac{\beta}{2}}}{n^{\frac{\beta}{2}-\alpha}}$. Il en résulte que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\beta-2\alpha>2$ et il en est de même pour $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{t^\alpha dt}{1+t^\beta\sin^2(t)}$.

7. On note pour tout entier $n\geq 1$:

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(t)\sin(t)\,dt\text{ et }v_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f(t)\sin(t)|\,dt$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(t)|\sin(t)|\,dt$$

(f est positive). Le changement de variable $t=n\pi+x$ nous donne :

$$u_n=(-1)^n\int_0^\pi f(x+n\pi)\sin(x)\,dx\text{ et }v_n=\int_0^\pi f(x+n\pi)\sin(x)\,dx=|u_n|$$

Comme f est décroissante de limite nulle à l'infini, on a :

$$0\leq v_n\leq f(n\pi)\int_0^\pi\sin(x)\,dx=2f(n\pi)\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)\sin(t)|\,dt = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0.$
Avec la décroissance de f, on déduit aussi que :

$$v_{n+1} = \int_0^{\pi} f(x + (n+1)\pi)\sin(x)\,dx \leq \int_0^{\pi} f(x + n\pi)\sin(x)\,dx = v_n$$

c'est-à-dire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
On déduit alors du théorème des séries alternées que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}\,dt$ sont convergentes.

Chapitre 6

Transformées de Fourier et de Laplace

Rien de neuf pour l'instant.

Chapitre 7

Équations fonctionnelles

Rien de neuf pour l'instant.

Chapitre 8

Fonctions de plusieurs variables réelles

Rien de neuf pour l'instant.

Chapitre 9

Dénombrements et probabilités

Exo Sup 9.1. Variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes

1. *Soient* $n \geq 2$ *et* $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une famille de variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *mutuellement indépendantes.*

   En notant pour tout entier r *compris entre* 1 *et* $n-1$, $Y_r = \sum_{k=1}^{r} X_k$, *montrer que les variables aléatoires* $Y_r, X_{r+1}, \cdots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes.*
2. *Soient* X, Y *deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres respectifs* (n, p) *et* (m, p). *Montrer que la variable aléatoire* $Z = X + Y$ *suit une loi binomiale de paramètre* $(n + m, p)$.
3. *Soit* $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une suite de* $n \geq 1$ *variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre* p. *Montrer que la variable aléatoire* $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *suit une loi binomiale de paramètre* (n, p).

   Par exemple, si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ *est une suite de* n *événements indépendants dans* $\mathcal{B}$, *tous de même probabilité* p, *la variable aléatoire* $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$ *suit alors une loi binomiale de paramètre* (n, p).
4. *Soit* $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une suite de* $n \geq 1$ *variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre* p. *Montrer que la variable aléatoire* $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$ *suit une loi de Bernoulli de paramètre* p^n.
5. *Soient* X, Y *deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètres respectifs* p *et* q.

   (a) *Déterminer la loi de* $U = X + Y$ *et celle de* $V = \min(X, Y)$.

(b) *Calculer* $\mathbb{P}(X < Y)$.

(c) *Calculer la probabilité que la matrice* $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ *soit diagonalisable.*

6. *Montrer que si* X, Y *sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs* λ, μ, *alors* $Z = X + Y$ *suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda + \mu$.

7. *Soient* $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une suite finie de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *et* $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ *la suite des fonctions de répartition correspondantes.*

   (a) *Calculer les fonction de répartition des variables aléatoires* $X = \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$ *et* $Y = \min\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$.

   (b) *Montrer que, pour tous réels* $y < x$, *on a :*

$$\mathbb{P}(y < Y \leq X \leq x) = \prod_{k=1}^{n} (F_k(x) - F_k(y))$$

   (c) *On suppose que, pour* k *compris entre* 1 *et* n, X_k *suit une loi géométrique de paramètre* $p_k \in \left]0, 1\right[$. *Déterminer la loi de* Y.

8. *Soient* X, Y *deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *telles que :*

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = m)) = (n + m) p^{n+m+3}$$

   où p *est un réel fixé dans* $\left]0, 1\right[$.

   (a) *Montrer que* X *et* Y *suivent une même loi que l'on précisera.*

   (b) *Les variables aléatoires* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Solution. On rappelle qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes si pour toute partie finie non vide J de I, les variables aléatoires $(X_j)_{j \in` J}$ sont indépendantes. Dans le cas où toutes les variables aléatoires X_i sont discrètes, elles sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour toute partie finie J de I et toute suite $(t_j)_{j \in J}$ de réels, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} (X_j = t_j)\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j = t_j)$$

1. Pour $r = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que $n \geq 3$ et on procède par récurrence finie sur r compris entre 2 et $n - 1$. Pour $r = 2$ et tout réel $x \in Y_1(\Omega)$, on a $(Y_1 = x) = \bigcup\limits_{x_1 \in X_1(\Omega)} (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x - x_1)$, l'ensemble

$X_1(\Omega)$ étant dénombrable, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = x) &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x - x_1)) \\ &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x - x_1)\end{aligned}$$

(X_1 et X_2 sont indépendantes). Pour $x \in Y_1(\Omega)$ et $(x_i)_{3 \leq i \leq n} \in \prod_{i=3}^{n} X_i(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}A &= (Y_1 = x) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i) \right) \\ &= \bigcup_{x_1 \in X_1(\Omega)} (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x - x_1) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i) \right)\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}\left((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x - x_1) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i) \right) \right) \\ &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x - x_1) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\ &= \left(\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x - x_1) \right) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\ &= \mathbb{P}(Y = x) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)\end{aligned}$$

et $Y_1, X_3, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Le résultat final s'en déduit facilement par récurrence finie sur r compris entre 2 et $n - 1$.

2. On a $Z(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n + m\}$ et pour tout entier k compris entre 0 et $n + m$, on a :

$$(Z = k) = \bigcup_{j=0}^{n} (X = j) \cap (Y = k - j) = \bigcup_{j=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} (X = j) \cap (Y = k - j)$$

ce qui nous donne compte de l'indépendance de X et Y

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k-j) \\
&= \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-(k-j)} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}
\end{aligned}$$

avec la convention que $\binom{p}{i} = 0$ pour $i < 0$ ou $i > p$.

En écrivant dans $\mathbb{R}[X]$ que $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n (1+X)^m$, soit :

$$\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} X^k = \left(\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{k} X^k\right) \left(\sum_{k=0}^{n+m} \binom{m}{k}\right) X^k$$

on déduit que, pour $0 \leq k \leq n+m$, le coefficient de X^k de ce polynôme est $\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$, ce qui nous donne :

$$\mathbb{P}(Z=k) = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$$

et signifie que la variable aléatoire $Z = X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

3. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, c'est clair et pour $n = 2$, c'est la question précédente. Supposons le résultat acquis au rang $n-1 \geq 2$ et soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit alors une loi binomiale de paramètre (n, p) et est indépendante de X_{n+1} qui suit une loi binomiale de paramètre $(1, p)$, donc $\sum_{k=1}^{n+1} X_k = X + X_{n+1}$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+1, p)$.
4. On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) = p^n$ (indépendance des X_k), donc $\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - p^n$.
5.

(a) La variable aléatoire $U = X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a du fait de l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} (X = j) \cap (Y = k - j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = j)\, \mathbb{P}(Y = k - j) = \sum_{j=1}^{k-1} p (1-p)^{j-1} q (1-q)^{k-j-1} \\
&= pq \sum_{i=0}^{k-2} (1-p)^i (1-q)^{k-2-i} = pq (1-q)^{k-2} \sum_{i=0}^{k-2} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^i
\end{aligned}$$

ce qui nous donne pour $p \neq q$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = k) &= pq (1-q)^{k-2} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k-1}}{1 - \frac{1-p}{1-q}} = pq (1-q)^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k-1}}{p - q} \\
&= pq \frac{(1-q)^{k-1} - (1-p)^{k-1}}{p - q}
\end{aligned}$$

et pour $p = q$, $\mathbb{P}(U = k) = (k-1)\, p^2 (1-p)^{k-2}$.
La variable aléatoire $V = \min(X, Y)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a du fait de l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V > k) &= \mathbb{P}((X > k) \cap (Y > k)) = \mathbb{P}(X > k)\, \mathbb{P}(Y > k) \\
&= (1-p)^n (1-q)^n
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V = k) &= \mathbb{P}(V > k - 1) - \mathbb{P}(V > k) \\
&= ((1-p)(1-q))^{k-1} (1 - (1-p)(1-q))
\end{aligned}$$

et V suit une loi géométrique de paramètre $r = (1-p)(1-q)$.

(b) On a, du fait de l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k) \cap (Y > k)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y > k)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\, \mathbb{P}(Y > k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} (1-q)^k \\
&= \frac{p(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)} = \frac{p(1-q)}{p + q - pq}
\end{aligned}$$

(c) La matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable si, et seulement si, $X \neq Y$, donc la probabilité cherchée est :

$$\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X > Y) = \frac{p(1-q)}{p + q - pq} + \frac{q(1-p)}{p + q - pq} = \frac{p + q - 2pq}{p + q - pq}$$

6. La variable aléatoire $Z = X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout entier naturel k, on a du fait de l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k}(X = j) \cap (Y = k - j)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X = j)\,\mathbb{P}(Y = k - j) = \sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j\mu^{k-j} = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}\end{aligned}$$

donc $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

7.

(a) Du fait de l'indépendance des X_k, on a pour tout réel x :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \leq x)\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k \leq x) = \prod_{k=1}^{n}F_k(x)$$

et :

$$\begin{aligned}F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y > x) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k > x)\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - F_k(x))\end{aligned}$$

(b) Pour $y < x$, on a :

$$(y < Y \leq X \leq x) = (Y > y) \cap (X \leq x) = \bigcap_{k=1}^{n}(y < X_k \leq x)$$

donc $\mathbb{P}(y < Y \leq X \leq x) = \prod_{k=1}^{n}(F_k(x) - F_k(y))$ par indépendance des X_k.

(c) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 > k)) + \mathbb{P}((X_1 > k) \cap (X_2 = k)) \\
&\quad + \mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) \\
&= p_1 (1 - p_1)^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} p_2 (1 - p_2)^{j-1} \\
&\quad + p_2 (1 - p_2)^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} p_1 (1 - p_1)^{j-1} + p_1 p_2 (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1} \\
&= \frac{p_1 p_2 (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^k}{1 - (1 - p_2)} + \frac{p_1 p_2 (1 - p_2)^{k-1} (1 - p_1)^k}{1 - (1 - p_1)} \\
&\quad + p_1 p_2 (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1} \\
&= p_1 (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^k + p_2 (1 - p_2)^{k-1} (1 - p_1)^k \\
&\quad + p_1 p_2 (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1} \\
&= (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1} (p_1 (1 - p_2) + p_2 (1 - p_1) + p_1 p_2) \\
&= (1 - p_1)^{k-1} (1 - p_2)^{k-1} (p_1 + p_2 - p_1 p_2) \\
&= (1 - (1 - p_1)(1 - p_2)) ((1 - p_1)(1 - p_2))^{k-1}
\end{aligned}$$

donc $\min(X_1, X_2)$ suit une loi géométrique de paramètre $1-(1 - p_1)(1 - p_2)$ qui est bien dans $]0, 1[$. Par récurrence, on en déduit que $\min\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - p_k)$.

8.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = m)) = \sum_{m=0}^{+\infty} (n + m) p^{n+m+3} \\
&= p^4 \sum_{m=0}^{+\infty} (n + m) p^{n+m-1} = p^4 \sum_{k=n}^{+\infty} k p^{k-1}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{+\infty} k p^{k-1} &= \left(\sum_{k=n}^{+\infty} p^k\right)' = \left(p^n \sum_{k=0}^{+\infty} p^k\right)' = \left(\frac{p^n}{1 - p}\right)' \\
&= \frac{n (1 - p) p^{n-1} + p^n}{(1 - p)^2} = \frac{1}{1 - p} n p^{n-1} + \frac{1}{(1 - p)^2} p^n
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{p^4}{1-p} n p^{n-1} + \dfrac{p^4}{(1-p)^2} p^n$ et pour $n=0$:

$$
\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \frac{p^4}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} n p^{n-1} + \frac{p^4}{(1-p)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \\
&= \frac{p^4}{(1-p)^3} + \frac{p^4}{(1-p)^2} \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) = \frac{(1+p)\,p^4}{(1-p)^3}
\end{aligned}
$$

Comme n et m jouent des rôles symétriques, on a aussi $\mathbb{P}(Y=m) = \dfrac{p^4}{1-p} m p^{m-1} + \dfrac{p^4}{(1-p)^2} p^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(Y=0) = 1 - \dfrac{(1+p)\,p^4}{(1-p)^3}$.
Pour $p = \dfrac{1}{2}$, on a $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{n+1}{2^{n+2}}$, $\mathbb{P}(Y=n) = \dfrac{m+1}{2^{m+2}}$ pour n, m dans $\mathbb{N}$.

(b) Pour $p \in \left]0,1\right[\setminus \{\alpha\}$, où α est la racine dans $\left]0,1\right[$ de $(1+p)\,p^4 = (1-p)^3$ (figure 9.1), on a $\mathbb{P}((X=0) \cap (Y=0)) = 0 \neq \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)$ et ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

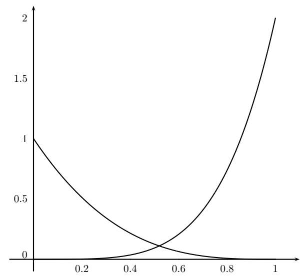

FIGURE 9.1 – Graphes de $y = (1-x)^3$ et $y = (1+x)\,x^4$

Deuxième partie

Exercices et problèmes d'algèbre

Chapitre 10

Groupes, anneaux, corps

Exo Sup 10.1. Groupe diédral

On dit qu'un groupe G est diédral de type $\mathcal{D}_{2n}$, s'il est dicyclique engendré par un élément ρ d'ordre n et un élément $\sigma \neq \rho$ d'ordre 2 tels que $\rho\sigma$ soit aussi d'ordre 2. On se place dans le plan complexe muni de sa structure euclidienne canonique et on se fixe un entier $n \geq 2$.

1. *On définit les applications ρ et σ par :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \rho(z) = e^{\frac{2i\pi}{n}} z,\ \sigma(z) = \overline{z}$$

(ρ est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ et σ est la réflexion d'axe O_x).

   (a) *Montrer que le sous-groupe $G = \langle \rho, \sigma \rangle$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ est diédral de type $\mathcal{D}_{2n}$.*

   (b) *Montrer que G est le groupe des isométries du plan complexe qui conservent l'ensemble $\Gamma_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$ des sommets d'un polygone régulier à n cotés.*

2. *Soit $G = \langle \rho, \sigma \rangle$ un groupe diédral de type $\mathcal{D}_{2n}$.*

   (a) *Montrer que $G = \left\{ Id, \rho, \cdots, \rho^{n-1} \right\} \cup \left\{ \sigma, \sigma\rho, \cdots, \sigma\rho^{n-1} \right\}$ et qu'il est d'ordre $2n$.*

   (b) *Montrer que deux groupes diédraux de type $\mathcal{D}_{2n}$ sont isomorphe.*

Solution. On rappelle que le groupe $G = \langle \rho, \sigma \rangle$ engendré par deux éléments ρ et σ est $G = \left\{ g_1 \cdots g_p \mid g_i \in \left\{ \rho, \rho^{-1}, \sigma, \sigma^{-1} \right\} \right\}$.

1. On remarque que, pour tout entier relatif m, on a $\rho^m(z) = e^{\frac{2im\pi}{n}} z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   (a) On a $\sigma \neq Id$, $\sigma^2 = Id$, donc σ est d'ordre 2 et $\rho^m = Id$ si, et seulement si, $e^{\frac{2im\pi}{n}} = 1$, ce qui équivaut à $m \equiv 0 \mod (n)$, donc ρ est d'ordre n.

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\rho\sigma\rho\sigma(z) = e^{\frac{2i\pi}{n}} \overline{e^{\frac{2i\pi}{n}} \overline{z}} = z$, donc $\rho\sigma\rho\sigma = Id$ ($\rho\sigma$ est la réflexion d'axe $\mathbb{R}e^{\frac{i\pi}{n}}$). Le groupe $G = \langle \rho, \sigma \rangle$ est donc bien diédral de

type $\mathcal{D}_{2n}$.
On peut aussi considérer le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $Is(\Gamma_n)$ le groupe des isométries qui conservent Γ_n. Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, on a $\sigma\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}} \in \Gamma_n$ et $\rho\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = e^{\frac{2i(k+1)\pi}{n}} \in \Gamma_n$, donc ρ et σ sont dans $Is(\Gamma_n)$ et $G = \langle \rho, \sigma \rangle$ est contenu dans $Is(\Gamma_n)$. Réciproquement si $\varphi \in Is(\Gamma_n)$, c'est soit une rotation, soit une réflexion. Si $\varphi : z \mapsto e^{i\alpha}z$ est une rotation avec $0 \leq \alpha < 2\pi$, comme $\varphi(1)$ est dans Γ_n, il existe un entier k compris entre 0 et $n-1$ tel que $\varphi(1) = e^{i\alpha} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\alpha = \dfrac{2k\pi}{n}$, donc $\varphi = \rho^k \in G$. Si c'est une réflexion, alors $\sigma \circ \varphi$ est une rotation dans $Is(\Gamma_n)$, donc $\sigma \circ \varphi \in G$ et $\varphi = \sigma \circ (\sigma \circ \varphi) \in G$. On a donc $Is(\Gamma_n) \subset G$ et $G = Is(\Gamma_n)$.

2.

(a) Comme ρ est d'ordre n et σ d'ordre 2, on a $\rho^{-1} = \rho^{n-1}$ (puisque $\rho^n = Id$) et $\sigma^{-1} = \sigma$, donc :

$$\begin{aligned} G = \langle \rho, \sigma \rangle &= \left\{ g_1 \cdots g_p \mid g_i \in \left\{ \rho, \rho^{-1}, \sigma, \sigma^{-1} \right\} \right\} \\ &= \left\{ g_1 \cdots g_p \mid g_i \in \left\{ \rho, \rho^{n-1}, \sigma \right\} \right\} \\ &= \left\{ \sigma^{k_1} \rho^{j_1} \cdots \sigma^{k_p} \rho^{j_p} \mid p \geq 1,\ k_i \geq 0,\ j_i \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \sigma^{k_1} \rho^{j_1} \cdots \sigma^{k_p} \rho^{j_p} \mid p \geq 1,\ 0 \leq k_i \leq 1,\ 0 \leq j_i \leq n-1 \right\} \end{aligned}$$

Notons $G' = \left\{ Id, \rho, \cdots, \rho^{n-1} \right\} \cup \left\{ \sigma, \sigma\rho, \cdots, \sigma\rho^{n-1} \right\}$. Il est clair que $\sigma^k \rho^j$ est dans G' pour tout $k \in \{0, 1\}$ et $j \in \{0, \cdots, n-1\}$ (pour $k = 0$, on a ρ^j et pour $k = 1$, on a $\sigma\rho^j$).
Montrons que le produit de deux tels éléments est encore dans G'. Soient donc $g = \sigma^k \rho^j$ et $g' = \sigma^{k'} \rho^{j'}$ dans G.
Si $(k, k') = (0, 0)$ ou $(k, k') = (1, 0)$, on a alors $gg' = \rho^{j+j'} = \rho^r$ ou $gg' = \sigma\rho^{j+j'} = \sigma\rho^r$ avec $0 \leq r \leq n-1$ (r est le reste dans la division euclidienne de $j + j'$ par n).
Si $(k, k') = (0, 1)$, on a alors $gg' = \rho^j \sigma \rho^{j'}$. Pour $j = 0$, c'est terminé. Pour $j \geq 1$, on utilise l'égalité $\rho\sigma\rho\sigma = 1$ qui se traduit par $\rho\sigma = (\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1} = \sigma\rho^{-1}$, pour écrire que $gg' = \rho^{j-1}\rho\sigma\rho^{j'} = \rho^{j-1}\sigma\rho^{j'-1}$ et au bout d'un nombre fini d'étapes, on arrive à $gg' = \sigma\rho^{j'-j} = \sigma\rho^r$ avec $0 \leq r \leq n-1$ (r est le reste dans la division euclidienne de $j' - p$ par n).
Si $(k, k') = (1, 1)$, on a alors $gg' = \sigma\rho^j\sigma\rho^{j'}$. Pour $j = 0$, on a $gg' = \sigma^2\rho^{j'} = \rho^{j'}$ et c'est terminé. Pour $j \geq 1$, on a :

$$gg' = \sigma\rho^{j-1}\rho\sigma\rho^{j'} = \sigma\rho^{j-1}\sigma\rho^{j'-1}$$

et au bout d'un nombre fini d'étapes, on arrive à $gg' = \rho^{j'-j} = \rho^r$ avec $0 \leq r \leq n-1$.
On en déduit alors par récurrence sur $p \geq 1$ que tout élément de la forme

$\sigma^{k_1}\rho^{j_1}\cdots\sigma^{k_p}\rho^{j_p}$ avec $0 \leq k_i \leq 1,\ 0 \leq j_i \leq n-1$ est dans G'. Pour $p=1$, c'est clair et supposant le résultat acquis pour $p \geq 1$, on a :

$$\sigma^{k_1}\rho^{j_1}\cdots\sigma^{k_{p+1}}\rho^{j_{p+1}} = \sigma^{k}\rho^{j}\sigma^{k_{p+1}}\rho^{j_{p+1}} = \sigma^{k'}\rho^{j'} \in G'.$$

On a donc $G \subset G'$ et $G = G'$. Il en résulte que G est d'ordre $2n$.

(b) Soient $G = \langle \rho, \sigma \rangle$ et $G' = \langle \rho', \sigma' \rangle$ deux groupes diédraux d'ordre $2n$. L'application $\varphi : G \to G'$ définie par $\varphi\left(\rho^j\right) = (\rho')^j$ et $\varphi\left(\sigma\rho^j\right) = \sigma\,(\rho')^j$ pour $0 \leq j \leq n-1$ réalise un isomorphisme de G sur G'.

Exo Sup 10.2. Groupe orthogonal et sous-groupes finis de $GL(E)$

Soient $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et G un sous-groupe fini de $GL(E)$.

1. *Montrer que l'application $(x,y) \in E^2 \mapsto \varphi(x,y) = \sum\limits_{g \in G} \langle g(x) \mid g(y) \rangle$ définit un produit scalaire sur E.*
2. *Montrer que G est un sous-groupe fini du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E,\varphi)$.*
3. *Pour E de dimension 2, montrer que G est cyclique ou diédral.*
4. *Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G, il admet alors un supplémentaire stable par tous les éléments de G (théorème de Maschke).*

Solution.

1. Comme une somme de produits scalaires est un produit scalaire, il suffit de montrer que pour tout $g \in G \subset GL(E)$, l'application $(x,y) \mapsto \langle g(x) \mid g(y) \rangle$ définit un produit scalaire sur E, ce qui résulte du fait que g est un isomorphisme.
2. Pour $g \in G$ et x, y dans E, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(g(x), y) &= \sum_{u \in G} \langle u(g(x)) \mid u(y) \rangle = \sum_{u \in G} \left\langle u \circ g(x) \mid u \circ g\left(g^{-1}(y)\right) \right\rangle \\ &= \sum_{v \in G} \left\langle v(x) \mid v\left(g^{-1}(y)\right) \right\rangle = \varphi\left(x, g^{-1}(y)\right)\end{aligned}$$

du fait que l'application $u \mapsto u \circ g$ est une permutation de G. Donc G est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E,\varphi)$.

3. Si G est contenu dans $\mathcal{O}^+(E,\varphi)$, comme E est de dimension 2, G est isomorphe à un sous-groupe du groupe Γ des nombres complexes de module égal à 1 et on sait que l'unique sous-groupe d'ordre $p = \mathrm{card}(G)$ de Γ est le groupe Γ_p des racines p-èmes de l'unité. L'unique sous-groupe d'ordre p de $\mathcal{O}^+(E,\varphi)$ est donc le groupe cyclique $\left\{Id, \rho, \cdots, \rho^{p-1}\right\}$ d'ordre p engendré par la rotation ρ d'angle $\dfrac{2\pi}{p}$.

   Si G n'est pas contenu dans $\mathcal{O}^+(E,\varphi)$, pour toute réflexion $\sigma \in G \setminus \mathcal{O}^+(E,\varphi)$, on a $G = G^+ \cup \sigma \circ G^+$, où $G^+ = G \cap \mathcal{O}^+(E,\varphi)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}^+(E,\varphi)$.

En effet, pour tout $\sigma' \in G \setminus G^+$, on a $u = \sigma \circ \sigma' \in G^+$ et $\sigma' = \sigma \circ u \in \sigma G^+$. Comme $G^+ = \left\{Id, \rho, \cdots, \rho^{r-1}\right\}$, où $r = \dfrac{p}{2}$ et ρ est une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{r}$ qui engendre G^+, on a $G = \left\{Id, \rho, \cdots, \rho^{r-1}, \rho \circ \sigma, \cdots, \rho^{r-1} \circ \sigma\right\}$ qui est diédral.

4. Soient $H = F^{\varphi,\perp}$ le supplémentaire orthogonal de F pour le produit scalaire φ et $g \in G$. Comme F est stable par g, on a $g(F) = F$ ($g(F) \subset F$ et l'égalité par les dimensions car g est un automorphisme) et $g^{-1}(F) = F$. Il en résulte que pour tout $x \in H$ et $y \in F$, on a $\varphi(g(x), y) = \varphi\left(x, g^{-1}(y)\right) = 0$ et $g(x) \in H$. On a donc $g(H) \subset H$ et l'égalité par les dimensions. L'espace vectoriel H est donc un supplémentaire de F stable par G.

Exo Sup 10.3. Racines n-èmes de l'unité sur un corps fini

$p \geq 2$ est un nombre premier fixé et $\mathbb{F}_p$ est le corps $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.

1. *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il y a $\delta_n = n \wedge (p-1)$ racines n-èmes de l'unité dans le corps $\mathbb{F}_p$.*
2. *Que dire du cardinal de l'ensemble des racines n-èmes de l'unité dans un corps commutatif $\mathbb{K}$.*

Solution.

1. Notons, pour $n \geq 1$, $\Gamma_n = \left\{x \in \mathbb{F}_p^* \mid x^n = 1\right\}$($1 \in \Gamma_n$, donc $\Gamma_n \neq \emptyset$). Comme $\delta_n = n \wedge (p-1)$ divise n, l'équation $x^\delta = 1$ entraîne $x^n = 1$, donc $\Gamma_{\delta_n} \subset \Gamma_n$.
Si $x \in \Gamma_n$, on a alors $x^n = 1$ et l'ordre m de x dans le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$ divise n. Le théorème de Lagrange nous dit que m divise aussi $p-1 = \operatorname{card}\left(\mathbb{F}_p^*\right)$, donc m qui est un diviseur commun de n et $p-1$ est aussi un diviseur du pgcd δ_n, ce qui entraîne que $x^{\delta_n} = 1$, soit que $x \in \Gamma_{\delta_n}$. On a donc $\Gamma_{\delta_n} \subset \Gamma_n$ et l'égalité $\Gamma_n = \Gamma_{\delta_n}$.
Comme δ_n divise $p-1$, le polynôme $X^{\delta_n} - 1$ divise $X^{p-1} - 1 = \prod\limits_{\lambda \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*} (X - \lambda)$ (encore le théorème de Lagrange), ce qui implique que l'équation $X^{\delta_n} - 1 = 0$ a δ_n racines dans $\mathbb{F}_p^*$. On a donc $\operatorname{card}(\Gamma_n) = \operatorname{card}(\Gamma_{\delta_n}) = \delta_n = n \wedge (p-1)$.
2. Notons, pour $n \geq 2$, $\Gamma_n = \{x \in \mathbb{K}^* \mid x^n = 1\}$ cet ensemble. C'est un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ de cardinal au plus égal à n (racines du polynôme de degré n, $X^n - 1$) et il est cyclique. En notant δ_n le cardinal de Γ_n et ω_n un générateur de de ce groupe, on a $\omega_n^n = 1$, donc l'ordre δ_n de ω_n divise n et $\Gamma_{\delta_n} \subset \Gamma_n$.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $\omega_n = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ qui est d'ordre n et $\delta_n = n$.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $|\omega_n| = 1$, donc $\omega_n = \pm 1$ et $\delta_n = 1$ pour n impair ou $\delta_n = 2$ pour n pair.
Si $\mathbb{K}$ est un corps fini, il est alors de cardinal p^r où $p \geq 2$ est un nombre premier et r est un entier naturel non nul.
Comme pour $r = 1$, on voit que δ_n divise $n \wedge (p^r - 1)$, donc $\omega_n \in \Gamma_{p^r-1}$ et $\Gamma_{\delta_n} \subset \Gamma_n \subset \Gamma_{p^r-1}$, le groupe Γ_{p^r-1} ayant exactement $p^r - 1$ éléments. Il en résulte que Γ_{δ_n} a exactement δ_n éléments (c'est l'ensemble des racines de $X^{\delta_n} - 1$ divise

$X^{p^r-1}-1$ qui est scindé à racines simples), donc $\Gamma_n = \Gamma_{\delta_n} \subset \Gamma_{n\wedge(p^r-1)} \subset \Gamma_n$ et $\Gamma_n = \Gamma_{\delta_n} = \Gamma_{n\wedge(p^r-1)}$ avec $\Gamma_{n\wedge(p^r-1)}$ qui a a exactement $n \wedge (p^r-1)$ éléments. En conclusion, $\delta_n = n \wedge (p^r-1)$.
Par exemple, pour n premier avec p^r-1, on a $\Gamma_n = \{1\}$ et pour n multiple de p^r-1, on a $\Gamma_n = \mathbb{K}^*$.

Exo Sup 10.4. Nombres de Fibonacci

On désigne par $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de Fibonacci définie par $(F_0, F_1) = (0,1)$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Le pgcd *de deux entiers relatifs a, b est noté $a \wedge b$.*

1. *En notant $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que l'on a $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier naturel n.*
2. *Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel non nul n. En déduire que $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ (relation de Cassini), puis que F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux.*
3. *Soient $n \geq 2$ un entier et $d \geq 2$ un diviseur de n. Montrer que, modulo F_d, la matrice A^n est diagonale, puis en déduire que F_d divise F_n.*
4. *Montrer que $F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}$ pour tous les entiers naturels n, m (théorème de Lucas).*
5. *Montrer que pour $n \geq 3$ et $m \geq 1$, l'entier n divise m si, et seulement si, F_n divise F_m.*
6.
   (a) *Montrer que $F_{n+m+1} = F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m$ pour tous les entiers naturels n, m.*
   (b) *Retrouver le résultat de la question **3**, à savoir que F_d divise F_n si d divise n.*
7. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a $F_{kn} \equiv kF_nF_{n+1}^{k-1} \mod F_n^2$ et $F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k \mod F_n^2$.*
8. *Montrer que, pour $n \geq 3$ et $m \in \mathbb{N}^*$, l'entier F_m est divisible par F_n^2 si, et seulement si, m est divisible par nF_n (théorème de Matijasevitch).*

Solution. Pour tout réel $r \geq 2$ et toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, on note $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n$$

2. Pour $n = 1$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix}$ et, supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, il vient :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\det(A^n) = (\det(A))^n = (-1)^n = \begin{vmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$$

ce qui donne la relation de Bézout $((-1)^n F_{n+1}) F_{n-1} + \left((-1)^{n+1} F_n\right) F_n = 1$ qui traduit le fait que F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux.

3. Pour $n = qd$, on a dans dans $\mathcal{M}_2\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{F_d\mathbb{Z}}\right)$:

$$\begin{aligned} \overline{A}^n &= \begin{pmatrix} \overline{F_{n-1}} & \overline{F_n} \\ \overline{F_n} & \overline{F_{n+1}} \end{pmatrix} = \left(\overline{A}^d\right)^q = \begin{pmatrix} \overline{F_{d-1}} & \overline{F_d} \\ \overline{F_d} & \overline{F_{d+1}} \end{pmatrix}^q \\ &= \begin{pmatrix} \overline{F_{d-1}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{F_{d+1}} \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} \left(\overline{F_{d-1}}\right)^q & \overline{0} \\ \overline{0} & \left(\overline{F_{d+1}}\right)^q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\overline{F_n} = \overline{0}$ dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{F_d\mathbb{Z}}$, ce qui revient à dire que F_d divise F_n.

4. Pour n qui divise m, on a vu à la question précédente que F_n divise F_m, donc $F_n \wedge F_m = F_n = F_{n\wedge m}$. En supposant que n ne divise pas m, que m ne divise pas n et en notant d le pgcd de n et m, la question précédente nous dit que F_d divise F_n et F_m, donc aussi $\delta = F_n \wedge F_m$. Le théorème de Bézout nous dit qu'il existe deux entiers α, β tels que $\alpha b < 0$ et $d = \alpha n + \beta m$, ce que l'on écrit en supposant que $\alpha = -\gamma < 0$, $d + \gamma n = \beta m$ et nous donne dans $\mathcal{M}_2\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{\delta\mathbb{Z}}\right)$:

$$\begin{aligned} \overline{A}^d \left(\overline{A}^n\right)^\gamma &= \begin{pmatrix} \overline{F_{d-1}} & \overline{F_d} \\ \overline{F_d} & \overline{F_{d+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{F_{n-1}} & \overline{F_n} \\ \overline{F_n} & \overline{F_{n+1}} \end{pmatrix}^\gamma \\ = \begin{pmatrix} \overline{F_{d-1}} & \overline{F_d} \\ \overline{F_d} & \overline{F_{d+1}} \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \overline{F_{n-1}}^\gamma & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{F_{n+1}}^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{F_{d-1}F_{n-1}}^\gamma & \overline{F_dF_{n+1}}^\gamma \\ \overline{F_dF_{n-1}}^\gamma & \overline{F_{d+1}F_{n+1}}^\gamma \end{pmatrix} \\ = \left(\overline{A}^m\right)^\gamma &= \begin{pmatrix} \overline{F_{m-1}} & \overline{F_m} \\ \overline{F_m} & \overline{F_{m+1}} \end{pmatrix}^\gamma = \begin{pmatrix} \overline{F_{m-1}}^\gamma & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{F_{m+1}}^\gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\overline{F_dF_{n+1}}^\gamma = \overline{0}$, ce qui signifie que δ divise $F_dF_{n+1}^\gamma$. Comme F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux, δ est premier avec F_{n+1} (si $\delta \wedge F_{n+1} \geq 2$, il existe alors un diviseur premier p de δ et F_{n+1}, donc de F_n et F_{n+1}, ce qui contredit le fait que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux) et le théorème de Gauss nous dit que δ divise F_d. On a donc en conclusion $\delta = F_d$, soit $F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}$.

5. La condition nécessaire est déjà acquise. Supposons que F_n divise F_m avec $n \geq 3$. Dans ce cas, on a $F_n \wedge F_m = F_n = F_{n\wedge m}$ avec $1 \leq n \wedge m \leq n$, la suite $(F_k)_{k\geq 2}$ étant strictement croissante ($F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 1$ pour $k \geq 2$), donc $n \wedge m = n$ (si $n \wedge m = 1$, $F_1 = 1$ ne peut être égal à $F_n \geq F_3 > 1$) et n divise m.

6.

   (a) Pour $m = 0$ et $n \geq 0$, on a $F_{n+1} = F_{n+1}F_1 + F_nF_0$. On vérifie facilement par récurrence sur $m \geq 1$ (à $n \geq 0$ fixé) que $X_{n+m} = A^m X_n$, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} F_{n+m} \\ F_{n+m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m \\ F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m \end{pmatrix}$$

   et en particulier $F_{n+m+1} = F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m$.

   (b) On raisonne par récurrence sur $q = \dfrac{n}{d}$. Pour $d = n$, c'est clair. Supposant le résultat acquis pour $n = qd$ où $q \geq 1$ (à $d \geq 2$ fixé), on a :

$$F_{(q+1)d} = F_{d+(qd-1)+1} = F_{d+1}F_{qd} + F_dF_{qd-1}$$

   où F_{qd} est divisible par F_d, donc $F_{(q+1)d}$ est divisible par F_d.

7. On raisonne par récurrence sur $k \geq 1$ à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé (pour $n = 0$ on a des égalités dans $\mathbb{N}$). Pour $k = 1$, le résultat est évident (on a des égalités dans $\mathbb{N}$). Supposant le résultat acquis pour $k \geq 1$, le résultat de **6** pour $m = kn - 1$ nous donne :

$$\begin{aligned} F_{(k+1)n} &= F_{n+(kn-1)+1} = F_{n+1}F_{kn} + F_nF_{kn-1} = F_{n+1}F_{kn} + F_n\left(F_{kn+1} - F_{kn}\right) \\ &= \left(F_{n+1} - F_n\right)F_{kn} + F_nF_{kn+1} \\ &\equiv k\left(F_{n+1} - F_n\right)F_nF_{n+1}^{k-1} + F_nF_{n+1}^k \mod F_n^2 \\ &\equiv kF_nF_{n+1}^k + F_nF_{n+1}^k \mod F_n^2 \equiv (k+1)\,F_nF_{n+1}^k \mod F_n^2 \end{aligned}$$

De même, le résultat de **6** pour $m = kn$ nous donne :

$$\begin{aligned} F_{(k+1)n+1} &= F_{n+kn+1} = F_{n+1}F_{kn+1} + F_nF_{kn} \\ &\equiv F_{n+1}F_{n+1}^k + kF_n^2F_{n+1}^{k-1} \mod F_n^2 \equiv F_{n+1}^{k+1} \mod F_n^2 \end{aligned}$$

8. Si F_m est divisible par F_n^2, il est alors divisible par F_n, ce qui équivaut à dire que m est divisible par n (question **5**), donc $m = kn$ avec $k \geq 1$ et :

$$kF_nF_{n+1}^{k-1} \equiv F_{kn} = F_m \equiv 0 \mod F_n^2$$

donc $kF_nF_{n+1}^{k-1} = qF_n^2$ et $kF_{n+1}^{k-1} = qF_n$ avec $q \geq 1$, c'est-à-dire que F_n divise kF_{n+1}^{k-1} en étant premier avec F_n. Il en résulte que F_n divise k (théorème de Gauss) et nF_n divise $nk = m$. Réciproquement si m est divisible par nF_n, on a alors $m = qnF_n = kn$ et :

$$F_m \equiv kF_nF_{n+1}^{k-1} = qF_n^2F_{n+1}^{k-1} \equiv 0 \mod F_n^2$$

c'est-à-dire que F_n^2 divise F_m.

Exo Sup 10.5. Idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$

On se donne un espace métrique compact (E,d), $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ est l'anneau des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in E$, on désigne par δ_x l'application définie sur $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ par $\delta_x(f)=f(x)$ pour tout $f\in\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ (masse de Dirac en x).

1. *Montrer que, pour tout $x\in E$, l'application δ_x est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, réciproquement, pour tout morphisme d'anneaux φ de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $x\in E$ tel que $\varphi=\delta_x$.*
2. *Montrer que, pour tout $x\in E$, l'ensemble $I_x=\ker(\delta_x)$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*
3. *Montrer que, pour tout $x\in E$, l'idéal $I_x=\ker(\delta_x)$ n'est pas principal.*
4. *Soient I un idéal I de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ et $Z(I)=\{x\in E\mid\forall f\in I,\ f(x)=0\}$. Montrer que $Z(I)=\emptyset$ si, et seulement si, $I=\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*
5. *Montrer que, pour tout idéal maximal I de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$, il existe un unique $x\in E$ tel que $I=I_x$.*
6. *Soit φ un automorphisme de l'anneau $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*
   (a) *Montrer que l'image par φ d'un idéal maximal de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ est un idéal maximal.*
   (b) *Montrer que pour tout $x\in E$, il existe un unique $y\in E$ tel que $\delta_x\circ\varphi=\delta_y$, puis que la fonction $\psi:x\mapsto y$ est un homéomorphisme de E.*
   (c) *En déduire que les automorphismes de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ sont les application $f\mapsto f\circ\psi$, où ψ est un homéomorphisme de E.*

Solution.

1. Il est clair que, pour tout $x\in E$, δ_x est un morphisme d'anneaux surjectif de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Si φ est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, en identifiant l'ensemble des fonctions constantes à $\mathbb{R}$, il induit alors un morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc un morphisme de corps, et on a $\varphi(\lambda)=\lambda$ pour tout réel λ.
   Supposons qu'il existe un morphisme d'anneaux φ de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit pas de la forme δ_x, ce qui signifie que :
   $$\forall x\in E,\ \exists f_x\in\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})\mid\varphi(f_x)\neq f_x(x)$$
   En notant, pour tout $x\in E$, $\lambda_x=\varphi(f_x)\in\mathbb{R}$ et $g_x=f_x-\lambda_x$, on a alors $\varphi(g_x)=\varphi(f_x)-\lambda_x=0$. Comme g_x est continue avec $g_x(x)\neq 0$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_x$ de x dans E sur lequel g_x ne s'annule jamais. Du recouvrement ouvert du compact E par les $\mathcal{V}_x$, on peut extraire un sous-recouvrement fini $(\mathcal{V}_{x_k})_{1\leq k\leq n}$ et en notant $g=\sum_{k=1}^{n}g_{x_k}^2$, on définit une fonction continue sur E à valeurs strictement positives. Cette fonction g est alors inversible dans l'anneau

$\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ et telle que $\varphi(g) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi(g_{x_k}))^2 = 0$, ce qui est impossible.

Si $\delta_x = \delta_y$, on a alors $f(x) = f(y)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ et pour $f_x : t \mapsto d(t,x)$, on obtient $f_x(y) = d(y,x) = f_x(x) = 0$, soit $y = x$. En définitive, les δ_x sont les seuls morphismes d'anneaux de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in E$, le noyau $I_x = \ker(\delta_x)$ du morphisme d'anneaux δ_x est un idéal de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$. Si I est un idéal de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ qui contient strictement I_x, il existe alors une fonction h dans $I \setminus I_x$, donc $h(x) \neq 0$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$, la fonction $g = f - \dfrac{f(x)}{h(x)}h$ est dans I_x. Il en résulte que $f = g + \dfrac{f(x)}{h(x)}h$ est dans I (c'est un idéal et $g \in I_x \subset I$). On a donc $I = \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.
   En fait, cela résulte du fait que $I_x = \ker(\delta_x)$ est un hyperplan du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.
   On peut aussi utiliser le fait qu'un idéal I d'un anneau commutatif unitaire $\mathbb{A}$ est maximal si, et seulement si, l'anneau quotient $\dfrac{\mathbb{A}}{I}$ est un corps.
   Comme δ_x est un morphisme d'anneaux surjectif de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, il induit un isomorphisme de $\dfrac{\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})}{I_x} = \dfrac{\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})}{\ker(\delta_x)}$ sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})}{I_x}$ est un corps, ce qui revient à dire que l'idéal I_x est maximal.
3. Supposons que l'idéal I_x soit principal. Il existe alors une fonction $f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ nulle en x telle que $I_x = (f)$. La fonction $\sqrt{|f|}$ étant dans I_x, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ telle que $\sqrt{|f|} = fg$, ce qui nous donne $|f| = f^2g^2$, soit $|f|\left(1 - |f|g^2\right) = 0$ et f est nulle sur une boule ouverte $B(x,\alpha)$ (avec $\alpha > 0$) puisque $1 - |f|g^2$ vaut 1 en x, mais alors toutes les fonctions de I_x sont nulles sur $B(x,\alpha)$. Considérant la fonction $f_x : t \mapsto d(t,x)$ qui est dans I_x, on aboutit à une contradiction puisque f_x s'annule uniquement en x.
4. Si $I = \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$, il contient alors les constantes non nulles et $Z(I) = \emptyset$. Si $Z(I) = \bigcap_{f \in I} f^{-1}\{0\} = \emptyset$, on obtient alors en passant au complémentaire, le recouvrement ouvert $E = \bigcup_{f \in I} \left(E \setminus f^{-1}\{0\}\right)$ du compact E duquel on extrait un sous-recouvrement fini, $E = \bigcup_{k=1}^{p} \left(E \setminus f_k^{-1}\{0\}\right)$ où les f_k, pour k compris entre 1 et p, sont dans I, ce qui nous donne $\bigcap_{k=1}^{p} f_k^{-1}\{0\} = \emptyset$. En utilisant les équivalences :

$$\left(x \in \bigcap_{k=1}^{p} f_k^{-1}\{0\}\right) \Leftrightarrow (f_1(x) = \cdots = f_p(x) = 0) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x) = 0\right)$$

où $f = \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \in I$, l'égalité $\bigcap_{k=1}^{p} f_k^{-1}\{0\} = \emptyset$ équivaut à dire que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$, donc la fonction $f = \sum_{k=1}^{n} f_k^2$ qui est dans l'idéal I est inversible dans l'anneau $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$, ce qui revient à dire que $I = \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$.

5. Soit I un idéal maximal de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$. C'est un idéal propre et $Z(I) \neq \emptyset$. En prenant $x \in Z(I)$, on a $I \subset I_x \subsetneq \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$, donc $I = I_x$. Si $I_x = I_y$, toute fonction continue nulle en x est nulle en y, c'est donc le cas pour $f_x : t \mapsto d(t, x)$ et on a $f_x(y) = d(y, x) = 0$, soit $y = x$. L'application $x \mapsto I_x$ réalise donc une bijection de E sur l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$.

6.

(a) Soit I un idéal maximal de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$. Comme φ est surjectif, $\varphi(I)$ est un idéal de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ ($\varphi(I)$ est un sous-groupe de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ et pour $\varphi(f) \in \varphi(I)$ et $h \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$, dans le cas où φ est surjective, il existe $g \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ tel que $h = \varphi(g)$ et $\varphi(f) \cdot h = \varphi(fg) \in \varphi(I)$). Si J est un idéal de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ qui contient strictement $\varphi(I)$, $\varphi^{-1}(J)$ est alors un idéal de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ qui contient strictement I (φ est un automorphisme de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$), donc $\varphi^{-1}(J) = \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ et $J = \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$.

(b) Pour $x \in E$, $\delta_x \circ \varphi$ est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, donc il existe un unique $y \in E$ tel que $\delta_x \circ \varphi = \delta_y$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers $x \in E$, on a alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$, $\delta_{x_n} \circ \varphi(f) = \varphi(f)(x_n) = \delta_{\psi(x_n)}(f) = f(\psi(x_n))$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} f(\psi(x_n)) &= \lim_{n \to +\infty} \varphi(f)(x_n) = \varphi(f)(x) = \delta_x \circ \varphi(f) \\ &= \delta_{\psi(x)}(f) = f(\psi(x)) \end{aligned}$$

Prenant $f : t \mapsto d(t, \psi(x))$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} d(\psi(x_n), \psi(x)) = 0$, ce qui signifie que $(\psi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi(x)$. La fonction ψ est donc continue.

En remplaçant φ par φ^{-1}, on dispose d'une fonction continue $\tau : E \to E$ telle que $\delta_x \circ \varphi^{-1} = \delta_{\tau(x)}$ pour tout $x \in E$. On a alors, pour tout $x \in E$:

$$\delta_{\psi \circ \tau(x)} = \delta_{\tau(x)} \circ \varphi = \delta_x \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \delta_x$$

et $\delta_{\tau \circ \psi(x)} = \delta_{\psi(x)} \circ \varphi^{-1} = \delta_x \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \delta_x$, donc $\psi \circ \tau(x) = \tau \circ \psi(x) = x$, ce qui signifie que ψ est bijective d'inverse égal à τ qui est continue, c'est donc un homéomorphisme de E.

(c) Pour tout homéomorphisme ψ de E, l'application $\varphi : f \mapsto f \circ \psi$ est un automorphisme de l'anneau $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ d'inverse $\varphi^{-1} : f \mapsto f \circ \psi^{-1}$. Réciproquement si φ est un automorphisme de l'anneau $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$, les relations $\delta_x \circ \varphi = \delta_{\psi(x)}$ se traduisent par $\varphi(f)(x) = f(\psi(x))$ pour tout $x \in E$ et tout $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$, soit par $\varphi(f) = f \circ \psi$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$, où ψ est un homéomorphisme de E.

Chapitre 11

Polynômes

Exo Sup 11.1.

On propose plusieurs démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss qui nous dit que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algébriquement clos. Pour ce faire, on se donne un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$ et en raisonnant par l'absurde, on suppose qu'un tel polynôme ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$.

1. *On utilise le fait qu'une fonction continue sur un compact de $\mathbb{C}$ est bornée et atteint ses bornes.*

   (a) *Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{C}$ telle que $\varphi(t) = 1 - t^p + \underset{t \to 0^+}{o}(t^p)$. Montrer qu'il existe un réel $t_0 \in]0,1[$ tel que $|\varphi(t_0)| < 1$.*

   (b) *Soit Q un polynôme non constant tel que $Q(0) = 1$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(z_0)| < 1$.*

   (c) *Montrer que, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, il existe $t_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(t_1)| < |P(z_1)|$ (on rappelle que P est supposé ne jamais s'annuler).*

   (d) *Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que :*

   $$\forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0,R), \ \frac{|z|^n}{2} \leq |P(z)| \leq 3\frac{|z|^n}{2}$$

   où $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$.

   (e) *Montrer que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{|P(z)|}{|z|^k} = +\infty$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$.*

   (f) *Montrer qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_1)| = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$ et conclure.*

2. *Une démonstration très courte qui utilise la dérivation sous le signe d'intégration de la fonction $f : r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{P(re^{it})}$.*

(a) *Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(r,t) = \dfrac{1}{P(re^{it})}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, puis établir une relation entre $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$.*

(b) *Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Préciser sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$ et conclure.*

3. *Avec cette question, on se propose de montrer le résultat suivant qui est utilisé dans les deux questions suivantes : si f est une fonction développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$ et telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0,R)$, son inverse $\dfrac{1}{f}$ est alors développable en série entière en 0 avec le même rayon de convergence.*

   (a) *Montrer que pour tout $r \in [0,R[$, la fonction φ_r définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_r(t) = \dfrac{1}{f(re^{it})}$ est développable en série de Fourier. On note $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier exponentiels.*

   (b) *Montrer que, pour tout entier relatif n, la fonction b_n définie sur $]0,R[$ par $b_n(r) = \dfrac{c_n(r)}{r^n}$ est constante. On note b_n sa valeur.*

   (c) *Montrer que $b_n = 0$ pour tout $n < 0$ et conclure.*

4. *On utilise un théorème de permutation des signes de sommation et d'intégration pour une série normalement convergente et le résultat de la question **3**.*

   (a) *Soit f une fonction entière. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{it} dt = 0$.*

   (b) *Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|P(2\cos(t))|^2}$ et conclure.*

5. *On utilise le résultat de la question **3** et le théorème de Liouville.*

   (a) *Montrer que les seules fonctions entières et bornées sur $\mathbb{C}$ sont les fonctions constantes (théorème de Liouville).*

   (b) *En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.*

Solution. Le polynôme P est identifié à la fonction polynomiale $z \mapsto P(z)$.

1.

(a) Pour tout réel $t \in]0,1[$, on a $|\varphi(t)| \leq 1 - t^p + t^p |\varepsilon(t)|$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Il existe donc un réel $t_0 \in]0,1[$ tel que $|\varepsilon(t_0)| < \dfrac{1}{2}$, ce qui nous donne $|\varphi(t_0)| \leq 1 - t_0^p + \dfrac{t_0^p}{2} = 1 - \dfrac{t_0^p}{2} < 1$.

(b) Dire que Q est un polynôme non constant tel que $Q(0) = 1$, revient à dire qu'il est de la forme $Q(X) = 1 - \alpha X^p (1 + R(X))$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et

R est un polynôme nul en 0. En désignant par $\omega \in \mathbb{C}^*$ une racine p-ème de α, on a pour tout réel t :

$$Q\left(\frac{t}{\omega}\right) = 1 - \alpha\left(\frac{t}{\omega}\right)^p \left(1 + R\left(\frac{t}{\omega}\right)\right) = 1 - t^p + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^p\right)$$

d'où l'existence de $t_0 \in \left]0, 1\right[$ tel que $\left|Q\left(\frac{t_0}{\omega}\right)\right| < 1$.

(c) Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ fixé, le polynôme Q défini par $Q(X) = \dfrac{P(z_1 + X)}{P(z_1)}$ (P ne s'annule jamais) est non constant tel que $Q(0) = 1$, donc il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(z_0)| < 1$, ce qui se traduit par $|P(z_1 + z_0)| < |P(z_1)|$.

(d) Pour tout z dans $\mathbb{C}^*$, on a $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^n} = \lim_{|z|\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right| = 1$, donc il existe un réel $R > 0$ tel que $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{|P(z)|}{|z|^n} \leq \dfrac{3}{2}$ pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus D(0, R)$, ce qui nous donne le résultat annoncé.

(e) On en déduit que $\dfrac{|z|^{n-k}}{2} \leq \dfrac{|P(z)|}{|z|^k} \leq 3\dfrac{|z|^{n-k}}{2}$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et en conséquence $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^k} = +\infty$.

(f) Comme $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, il existe $R_1 > 0$ tel que $|P(z)| > |P(0)|$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D(0, R_1)$. D'autre part, sur le disque fermé $D(0, R_1)$, la fonction continue $|P|$ est minorée et atteint sa borne inférieure, ce qui signifie qu'il existe $z_1 \in D(0, R_1)$ tel que $|P(z_1)| = \displaystyle\inf_{z\in D(0,R_1)} |P(z)|$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, soit $z \in D(0, R_1)$ et $|P(z)| \geq |P(z_1)|$, soit $z \notin D(0, R_1)$ et $|P(z)| > |P(0)| \geq |P(z_1)|$. Dans tous les cas, on a $|P(z)| \geq |P(z_1)|$, donc $|P(z_1)| = \displaystyle\inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$. Mais le résultat de la question **1c** appliqué à z_1 nous conduit à l'existence de $t_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(t_1)| < |P(z_1)|$, ce qui est impossible. Le polynôme P admet donc une racine complexe et par récurrence sur le degré de P, on en déduit qu'il en admet n.

2.

(a) La fonction $(r, t) \mapsto P\left(re^{it}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt}$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, son inverse φ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r, t) = -e^{it}\frac{P'\left(re^{it}\right)}{P^2\left(re^{it}\right)} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial t}(r, t) = -ire^{it}\frac{P'\left(re^{it}\right)}{P^2\left(re^{it}\right)} = ir\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r, t)$$

(b) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r, t)\, dt = -\frac{i}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(r, t)\, dt = -\frac{i}{r}\left[\varphi(r, t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

pour $r \neq 0$ par 2π-périodicité de la fonction $t \mapsto \varphi(r,t)$, donc f est constante égale à $f(0) = \dfrac{2\pi}{P(0)} \neq 0$. Mais avec :

$$|f(r)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|P(re^{it})|} \leq \int_0^{2\pi} \frac{2dt}{r^n} = \frac{4\pi}{r^n}$$

pour $r > R$ (question **1d**) on déduit que $\dfrac{2\pi}{P(0)} = \lim\limits_{r\to+\infty} f(r) = 0$, ce qui est une contradiction. Le polynôme P admet donc une racine complexe.

3.

(a) La fonction φ_r est 2π-périodique et indéfiniment dérivable, donc sa série de Fourier est normalement convergente vers φ_r sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Pour tout $r \in [0,R[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{f(re^{it})}dt,\ c'_n(r) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}f'(re^{it})}{f^2(re^{it})}e^{-int}dt$$

(la fonction $(t,r) \longmapsto \dfrac{e^{-int}}{f(re^{it})}$ est indéfiniment dérivable sur $[0,2\pi]\times[0,R[$ et on intègre sur un intervalle fermé borné), donc :

$$b'_n(r) = \frac{rc'_n(r) - nc_n(r)}{r^{n+1}} = -\frac{1}{2\pi r^{n+1}}\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}f'(re^{it}) + nf(re^{it})}{f^2(re^{it})}e^{-int}dt$$

pour $r \in\ ]0,R[$ avec $\dfrac{re^{it}f'(re^{it}) + nf(re^{it})}{f^2(re^{it})}e^{-int} = i\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{e^{-int}}{f(re^{it})}\right)$, ce qui nous donne en tenant compte de la 2π-périodicité de $t \mapsto \dfrac{e^{-int}}{f(re^{it})}$:

$$b'_n(r) = -\frac{i}{2\pi r^{n+1}}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-int}}{f(re^{it})}\right)dt = 0$$

La fonction b_n est donc constante sur $]0,R[$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En notant b_n cette constante on a $c_n(r) = b_n r^n$ pour tout $r \in\ ]0,R[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

(c) De la continuité de chaque fonction $r \longmapsto c_n(r)$ sur $[0,R[$, on déduit que $b_n = 0$ pour tout $n < 0$. Et toujours par continuité, on a $c_n(r) = b_n r^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in [0,R[$. On a donc pour tout $r \in [0,R[$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{f(re^{it})} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n r^n e^{int}$, ce qui s'écrit aussi $\dfrac{1}{f(z)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. La fonction $\dfrac{1}{f}$ est donc développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence $R' \geq R$. En appliquant le raisonnement précédent à la fonction $\dfrac{1}{f}$, on déduit que $f = \left(\dfrac{1}{f}\right)^{-1}$ a un rayon de convergence $R \geq R'$. En définitive f et $\dfrac{1}{f}$ ont même rayon de convergence.

4.

(a) Pour tout nombre complexe z, on a $f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$, la convergence étant uniforme sur tout compact, donc :

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{i(n+1)t} dt = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0$$

(b) En posant $z = e^{it}$, on a pour tout réel $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} |P(2\cos(t))|^2 &= P\left(z + \frac{1}{z}\right) \overline{P}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \left(z + \frac{1}{z}\right)^k\right) \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \left(z + \frac{1}{z}\right)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \overline{a_{k-j}}\right) \left(z + \frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{2n} b_k \left(z + \frac{1}{z}\right)^k = \frac{Q(z)}{z^{2n}} \end{aligned}$$

où $Q(X) = P\left(X + \frac{1}{X}\right) \overline{P}\left(X + \frac{1}{X}\right) X^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} b_k \left(X^2 + 1\right)^k X^{2n-k}$ est un polynôme qui ne s'annule jamais ($Q(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$ car P ne s'annule pas et $Q(0) = b_{2n} = 1$), donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|P(2\cos(t))|^2} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2int} dt}{Q\left(e^{it}\right)} = \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{it} dt = 0$$

en posant $f(z) = \frac{z^{2n-1}}{Q(z)}$ (cette fonction est entière car Q est entière et ne s'annule pas). Mais la fonction $t \mapsto \frac{1}{|P(2\cos(t))|^2}$ étant continue sur $[0, 2\pi]$ et à valeurs strictement positives, on a aussi $\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta > 0$, ce qui est contradictoire..Le polynôme P admet donc une racine complexe.

5.

(a) Si f est une fonction entière bornée, on a alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour tout réel $r > 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a par convergence uniforme de la série entière sur tout compact :

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \leq \frac{M}{r^n} \underset{r\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $f = \alpha_0$.

(b) Comme $\frac{1}{P}$ est une fonction entière bornée, le théorème de d'Alembert-Gauss s'en déduit.

Problème 11.1. Nombres algébriques. Constructions à la règle et au compas

Notations et définitions

Pour tout anneau commutatif unitaire $\mathbb{A}$, on note $\mathbb{A}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$.

Le pgcd de deux entiers relatifs a et b est noté $a \wedge b$.

Pour tout nombre premier $p \geq 2$, on note $\mathbb{F}_p$ le corps $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{n}$ la classe de n modulo p dans $\mathbb{F}_p$. À tout polynôme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{Z}[X]$, on associe le polynôme $\overline{P}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Si $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont deux corps commutatifs tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, on dit alors que $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$. Une extension $\mathbb{L}$ du corps commutatif $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, sa dimension est appelée degré de l'extension et est notée $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Une extension de degré 2 est dite quadratique. Pour tout α dans $\mathbb{L}$ (une extension d'un corps commutatif $\mathbb{K}$), on note $\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ et on désigne par $\mathbb{K}(\alpha)$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{L}$ qui contient $\mathbb{K}$ et α.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\mathbb{U}_n = \left\{\omega_1^k \mid 0 \leq k \leq n-1\right\}$ le groupe multiplicatif des racines n-ièmes de l'unité et $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. On appelle racine primitive n-ième de l'unité tout générateur de $\mathbb{U}_n$, on note R_n l'ensemble de toutes les racines primitives n-ièmes de l'unité et $\Phi_n(X) = \prod\limits_{z \in R_n} (X - z)$ est le n-ième polynôme cyclotomique.

– I – Résultats préliminaires

1. Montrer $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ est infini.
2. Soit g un élément d'ordre $n \in \mathbb{N}$ dans un groupe multiplicatif G. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, g^k est d'ordre $\dfrac{n}{n \wedge k}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R_n = \left\{\omega_1^k \mid 1 \leq k \leq n-1 \text{ et } k \wedge n = 1\right\}$.
4. Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p\left(X^{p^{r-1}}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{r-1}}$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles R_d où d parcourt $\mathcal{D}_n$ forment une partition de $\mathbb{U}_n$, puis que $X^n - 1 = \prod\limits_{d \in \mathcal{D}_n} \Phi_d(X)$. En déduire que Φ_n est unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$.
6. Calculer Φ_n pour $n = 1, 2, \cdots, 6$.

7. Soient $p \geq 2$ un nombre premier et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ unitaire non constant dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que si p divise $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et p^2 ne divise pas a_0, le polynôme P est alors irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (critère d'irréductibilité d'Eisenstein).

8. Le contenu d'un polynôme non constant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est l'entier $c(P) = \operatorname{pgcd}(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. Dans le cas où $c(P) = 1$, on dit que P est primitif.
   (a) Montrer que le produit de deux polynômes primitifs dans $\mathbb{Z}[X]$ est primitif (lemme de Gauss).
   (b) Soient P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ non constants. Montrer que $c(PQ) = c(P)\,c(Q)$.
   (c) Montrer qu'un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

9. Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Montrer (sans utiliser **II.15d**) que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le polynôme cyclotomique Φ_{p^r} est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (on pourra utiliser le polynôme $\Phi_{p^r}(X+1)$).

10. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. À tout polynôme unitaire $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$, on associe sa matrice compagnon $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $C_P = (a_0)$ pour $n = 1$ ou $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 2$.
    (a) Montrer que le polynôme P est le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de sa matrice compagnon C_P.
    (b) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de valeurs propres $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ comptées avec leur multiplicité (ce qui suppose que le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{K}$) et $P \in \mathbb{K}[X]$. En notant χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\chi_{P(M)}(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - P(\alpha_k))$.
    (c) Soient $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire non constant de racines complexes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ comptées avec leur multiplicité. Montrer que $\prod_{k=1}^{n} (X - P(\alpha_k))$ appartient à $\mathbb{Q}[X]$.

11. Soit p un nombre premier.
    (a) Soient $(A_k)_{1 \leq k \leq r}$ une suite de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ et $A = \sum_{k=1}^{r} A_k$. Montrer que dans $\mathbb{F}_p[X]$, on a l'égalité $\overline{A^p} = \sum_{k=1}^{r} \overline{A_k^p}$.

(b) Soit $A \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que dans $\mathbb{F}_p[X]$, on a l'égalité $\overline{A^p}(X) = \overline{A}(X^p)$.

12. Soient P, Q deux polynômes unitaires dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que le produit PQ soit dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que P et Q sont nécessairement dans $\mathbb{Z}[X]$.

– II – Nombres algébriques

Pour cette partie, $\mathbb{L}$ désigne une extension d'un corps commutatif $\mathbb{K}$.

On dit qu'un élément α de $\mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme non nul P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Un élément α de $\mathbb{L}$ qui n'est pas algébrique sur $\mathbb{K}$ est dit transcendant.

1. Montrer que l'ensemble des nombres réels algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable et en déduire qu'il existe une infinité de nombres réels transcendants.
2. Soit α un élément de $\mathbb{L}$ qui est algébrique sur $\mathbb{K}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_α dans $\mathbb{K}[X]$ tel que :
   $$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\} = \mathbb{K}[X] \cdot P_a$$
   On dit que P_α est le polynôme minimal de α et son degré est le degré de α sur $\mathbb{K}$. Il est noté $d(\alpha, \mathbb{K})$.
   (b) Montrer que le polynôme minimal de α est l'unique polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$ qui annule α.
   (c) On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Montrer que les racines de P_α dans $\mathbb{L}$ sont toutes simples.
3. Soient $p \geq 2$ un nombre premier, $r \in \mathbb{N}^*$ et α une racine primitive p^r-ième de l'unité. Montrer que α est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et déterminer son polynôme minimal.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{L}$. Montrer que :
   $$(\alpha \in \mathbb{K}) \Leftrightarrow (\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}) \Leftrightarrow (\alpha \text{ est algébrique sur } \mathbb{K} \text{ et } d(\alpha, \mathbb{K}) = 1)$$
5.
   (a) Soit α un nombre complexe algébrique sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ distinct de α avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on ait $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_\alpha}{q^{d(\alpha,\mathbb{Q})}}$.
   (b) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers compris entre 0 et 9 telle que a_n soit non nul à partir d'un certain rang. Montrer que le réel $\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^{n!}}$,est transcendant. Un tel réel est un nombre de Liouville.
6. Soit α un élément de $\mathbb{L}$. Montrer que :
   $$(\alpha \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}) \Leftrightarrow (\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)) \Leftrightarrow (\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] \text{ est fini})$$
   ($\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha]$ est la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[\alpha]$).

7. Montrer que si $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ est fini, alors tout élément de $\mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$.
8. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrique sur $\mathbb{Q}$ et P_α son polynôme minimal.

   (a) Montrer que si σ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$, $\sigma(\alpha)$ est alors une racine de P_α. En déduire qu'il y a exactement $d(\alpha, \mathbb{Q})$ tels morphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres.
   On note $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq d(\alpha,\mathbb{Q})}$ la suite de ces morphismes.

   (b) Soit $\theta \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Montrer que θ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, que le polynôme $Q_\theta(X) = \prod_{k=1}^{d(\alpha,\mathbb{Q})} (X - \sigma_k(\theta))$ est dans $\mathbb{Q}[X]$, que P_θ divise Q_θ et que Q_θ est une puissance de P_θ.

9. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi algébrique sur $\mathbb{K}$ et $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}[\alpha]$.
10. Soit $\mathbb{M}$ un corps commutatif tel que $\mathbb{K} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{L}$. Dans le cas où les degrés sont finis, montrer que l'on a $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{M}][\mathbb{M} : \mathbb{K}]$.
11. Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des éléments de $\mathbb{L}$ qui sont algébriques sur $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$.
12. Soient $2 \leq p < q$ deux nombres premiers. Montrer que les réels $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ et $\beta = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ en précisant leur polynôme minimal.
13. Soient $\mathbb{K}$ un sous corps de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{L}$ une extension quadratique de $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ tel que $\lambda^2 \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\lambda]$.
14. On dit qu'un nombre complexe est un entier algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$.

   (a) Montrer qu'un nombre algébrique α est un entier algébrique si, et seulement si, son polynôme minimal P_α est dans $\mathbb{Z}[X]$.

   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que α est un entier algébrique si, et seulement si, le groupe additif $\mathbb{Z}[\alpha]$ est de type fini.

   (c) Montrer qu'un nombre rationnel est un entier algébrique si, et seulement si, c'est un entier relatif.

   (d) Montrer que l'ensemble des entiers algébriques de $\mathbb{C}$ est un sous-anneau du corps $\mathbb{A}$ des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$.

15. Soient $n \geq 2$ un entier, α une racine primitive n-ième de l'unité et p un nombre premier ne divisant pas n. On note $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1} = \left(\omega_1^k\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est la suite des racines n-ième de l'unité.

   (a) Montrer que $\dfrac{P_\alpha(\alpha^p)}{p}$ est un entier algébrique.

   (b) Exprimer $\prod_{0 \leq j < k \leq n-1} (a_k - \alpha_j)^2$ en fonction de l'entier n.

   (c) Montrer que $P_\alpha(\alpha^p) = 0$, puis que $P_\alpha = P_{\alpha^p}$.

   (d) Déduire de ce qui précède que Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et préciser son degré.

– III – Nombres constructibles

Pour cette partie le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure affine euclidienne usuelle.

Si A, B sont deux points distincts de $\mathbb{R}^2$ et R un réel strictement positif, on note AB la distance entre ces deux points, (AB) la droite passant par ces points et $\mathcal{C}(A, R)$ le cercle de centre A et de rayon R.

On note $O(0,0)$, $I(1,0)$ et on associe à toute partie Σ de $\mathbb{R}^2$ qui contient les points O et I, les ensembles suivants :

— l'ensemble $\mathcal{D}(\Sigma) = \left\{(AB) \mid (A,B) \in \Sigma^2,\ A \neq B\right\}$ de toutes les droites passant par deux points distincts de Σ ;

— l'ensemble $\delta(\Sigma) = \left\{AB \mid (A,B) \in \Sigma^2,\ A \neq B\right\}$ de toutes les distances possibles entre deux points distincts de Σ ;

— l'ensemble $\mathcal{C}(\Sigma) = \{\mathcal{C}(A,R) \mid A \in \Sigma,\ R \in \delta(\Sigma)\}$ de tous les cercles centrés en un point de Σ et de rayon la distance entre deux points distincts de Σ ;

— la réunion $\Delta(\Sigma)$ de Σ et de l'ensemble de tous les points obtenus par l'intersection de deux droites distinctes de $\mathcal{D}(\Sigma)$, ou d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ et d'un cercle de $\mathcal{C}(\Sigma)$ ou de deux cercles distincts de $\mathcal{C}(\Sigma)$.

On définit la suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^2$ par $\Gamma_0 = \{O, I\}$, $\Gamma_{n+1} = \Delta(\Gamma_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on définit l'ensemble Γ des points constructibles à la règle et au compas à partir de $\{O, I\}$ (on dira simplement constructibles) par $\Gamma = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$.

Une droite est dite constructible, si elle passe par deux points constructibles.

Un cercle est dit constructible, si son centre est constructible et s'il passe par un point constructible.

Un réel x est dit constructible (on dit aussi que x est un nombre constructible), si le point $(x, 0)$ est constructible.

Un angle $\overline{\theta} \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ est dit constructible, si le réel $\cos(\theta)$ est constructible.

1. Soit $\mathbb{K}$ un sous corps de $\mathbb{R}$ et $\Sigma = \mathbb{K}^2$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ ayant leurs coordonnées dans $\mathbb{K}$. Montrer que :
   (a) le point d'intersection de deux droites sécantes de $\mathcal{D}(\Sigma)$ est dans Σ ;
   (b) un point d'intersection d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ et d'un cercle de $\mathcal{C}(\Sigma)$ est soit dans Σ soit un point dont les deux coordonnées sont dans une extension quadratique de $\mathbb{K}$;
   (c) un point d'intersection de deux cercles non concentriques de $\mathcal{C}(\Sigma)$ est soit dans Σ soit un point dont les deux coordonnées sont dans une extension quadratique de $\mathbb{K}$.
2. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ est un nombre constructible, les points $(-x, 0)$ et $(0, x)$ sont alors constructibles.
3. Soit D une droite constructible et A un point constructible. Montrer que la perpendiculaire et la parallèle à D passant par A sont constructibles.

4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}$ des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Justifier le fait que $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$.
5. Montrer que le corps $\mathbb{K}$ des nombres constructibles est stable par racine carrée.
6. Montrer qu'un réel x est constructible si, et seulement si, il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$ de sous corps de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, pour tout i compris entre 1 et n, $\mathbb{K}_i$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{i-1}$ (on dira que $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$ est une chaîne d'extensions quadratiques) et $x \in \mathbb{K}_n$ (théorème de Wantzel).
7. Montrer qu'un nombre réel constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré une puissance de 2.
8. Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}$ des nombres réels constructibles est dénombrable et que c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ (contenant $\mathbb{Q}$) et stable par racine carrée.
9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n pour que $\sqrt[n]{p}$ soit constructible.
10. Soit θ un réel. Montrer que si $\cos(\theta)$ est constructible, alors pour tout entier relatif n, $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ sont constructibles.
11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n = \{M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}\}$ le polygone régulier à n cotés où $M_k \left(\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right), \sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)\right)$ pour k compris entre 0 et $n-1$. On dit que $\mathcal{P}_n$ est constructible (à la règle et au compas à partir de $\{0, I\}$) si l'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ est constructible (ce qui revient à dire que M_1 est constructible).
    (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, le polygone $\mathcal{P}_{2^m}$ est constructible.
    (b) Soient $n \geq 2$ un entier et $m \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de n. Montrer que si $\mathcal{P}_n$ est constructible, $\mathcal{P}_m$ est alors constructible.
    (c) Soient n, m deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que $\mathcal{P}_{nm}$ est constructible si, et seulement si, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ sont constructibles.
    (d) Soit $p \geq 3$ un nombre premier impair et $m \geq 2$ un entier. Montrer que $\mathcal{P}_{p^m}$ n'est pas constructible.
    (e) Soit $p \geq 3$ un nombre premier impair. Montrer que si $\mathcal{P}_p$ est constructible, p est alors un nombre premier de Fermat, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{2^k} + 1$.
    (f) Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que si $\mathcal{P}_n$ est constructible, on a alors $n = 2^m$ avec $m \geq 2$ ou $n = 2^m p_1 \cdots p_r$ avec $m \geq 0$, $r \geq 1$ et $p_1, \cdots, p_r$ nombres premiers de Fermat distincts.

Solution.

– I – Résultats préliminaires

1. Si $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ est fini égal à n, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est alors isomorphe à $\mathbb{Q}^n$, donc dénombrable, ce qui n'est pas vrai. En conséquence $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ est infini.
2. Soient $\delta = n \wedge k$ et n', k' premiers entre eux tels que $n = \delta n'$, $k = \delta k'$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\left(g^k\right)^r = g^{kr} = 1\right) &\Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{Z} \mid kr = qn) \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{Z} \mid k'r = qn') \\ &\Leftrightarrow (n' \text{ divise } r \text{ (théorème de Gauss)})\end{aligned}$$

donc l'ordre de g^k dans G est $n' = \dfrac{n}{n \wedge k}$ (l'ordre de $h \in G$ est le plus petit entier naturel non nul r tel que $h^r = 1$).

3. Pour $n = 1$, on a $\mathbb{U}_1 = R_1 = \{1\}$. Pour $n \geq 2$, $\mathbb{U}_n = \langle \omega_1 \rangle$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par ω_1 et ses générateurs sont les éléments d'ordre n. Si $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ est premier avec n, le théorème de Bézout nous dit alors qu'il existe deux entiers relatifs u, v tels que $uk + vn = 1$, ce qui entraîne $\omega_1 = \left(\omega_1^k\right)^u \in \left\langle \omega_1^k \right\rangle$ et $\mathbb{U}_n = \left\langle \omega_1^k \right\rangle$. Réciproquement si $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ est tel que $\mathbb{U}_n = \left\langle \omega_1^k \right\rangle$, il existe alors $u \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega_1 = \left(\omega_1^k\right)^u = \omega_1^{ku}$, ce qui s'écrit aussi $\omega_1^{1-ku} = 1$ et n divise $1 - ku$ (puisque n est l'ordre de ω_1), ce qui signifie qu'il existe un entier relatif v tel que $1 - ku = vn$, donc $uk + vn = 1$ et k est premier avec n. On en déduit que :
$$\deg(\Phi_n) = \operatorname{card}(R_n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = 1\} = \varphi(n)$$
où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

4. Si $p \geq 2$ est premier, tout entier $k \in \{1, \cdots, p-1\}$ est alors premier avec p, de sorte que $R_p = \left\{\omega_1^k \mid 1 \leq k \leq p-1\right\} = \mathbb{U}_p \setminus \{1\}$ et :
$$\Phi_p(X) = \prod_{z \in \mathbb{U}_p \setminus \{1\}} (X - z) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$$
Pour $r \geq 2$, un entier $k \in \{1, \cdots, p^r - 1\}$ est non premier avec p^r si, et seulement si, il est divisible par p, soit de la forme $k = up$ avec $u \in \left\{1, \cdots, p^{r-1} - 1\right\}$, donc :
$$\begin{aligned} X^{p^r} - 1 &= \prod_{z \in \mathbb{U}_{p^r}} (X - z) = \prod_{z \in R_{p^r}} (X - z) \prod_{z \in \mathbb{U}_{p^r} \setminus R_{p^r}} (X - z) \\ &= \Phi_{p^r}(X) \prod_{u=0}^{p^{r-1}-1} \left(X - e^{\frac{2iu\pi}{p^{r-1}}}\right) = \Phi_{p^r}(X)\left(X^{p^{r-1}} - 1\right) \end{aligned}$$
ce qui nous donne :
$$\Phi_{p^r}(X) = \frac{X^{p^r} - 1}{X^{p^{r-1}} - 1} = \frac{\left(X^{p^{r-1}}\right)^p - 1}{X^{p^{r-1}} - 1} = \Phi_p\left(X^{p^{r-1}}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{r-1}}$$

5.

(a) Un élément z de R_d est d'ordre égal à d dans $\mathbb{C}^*$ et pour $d \in \mathcal{D}_n$, on a $z^n = \left(z^d\right)^{\frac{n}{d}} = 1$, ce qui signifie que $z \in \mathbb{U}_n$. On a donc l'inclusion $\bigcup\limits_{d \in \mathcal{D}_n} R_d \subset \mathbb{U}_n$. Un élément z de $\mathbb{U}_n$ s'écrit $z = \omega_1^k$ avec $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ et il est d'ordre $d = \dfrac{n}{n \wedge k}$ (question **I.2**), il est donc dans R_d avec $d \in \mathcal{D}_n$. On a donc l'égalité $\bigcup\limits_{d \in \mathcal{D}_n} R_d = \mathbb{U}_n$ et il est clair que cette réunion est disjointe (R_d est l'ensemble des éléments d'ordre d dans $\mathbb{C}^*$).

(b) Pour $n = 1$, on a $\mathbb{U}_1 = R_1 = \mathcal{D}_1 = \{1\}$ et $\Phi_1(X) = X - 1$. Pour $n \geq 2$, les R_d où d décrit $\mathcal{D}_n$, forment une partition de $\mathbb{U}_n$ et on a :

$$X^n - 1 = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z) = \prod_{d \in \mathcal{D}_n} \prod_{z \in R_d} (X - z) = \prod_{d \in \mathcal{D}_n} \Phi_d(X)$$

Pour $n = p^r$ avec $p \geq 2$ premier et $r \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{D}_n = \{1, p, \cdots, p^r\}$ et :

$$X^{p^r} - 1 = \prod_{k=0}^{r} \Phi_{p^k}(X) = \Phi_{p^r}(X) \prod_{k=0}^{r-1} \Phi_{p^k}(X) = \Phi_{p^r}(X) \left(X^{p^{r-1}} - 1\right)$$

et on retrouve l'égalité $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p\left(X^{p^{r-1}}\right)$.

(c) Pour vérifier que Φ_n est unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$, on procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on a $\Phi_1(X) = X - 1$. Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1 \geq 1$, l'égalité $X^n - 1 = \Phi_n(X) \prod\limits_{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{n\}} \Phi_d(X)$ nous dit que Φ_n est le quotient dans la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$ de $A(X) = X^n - 1$ par $B(X) = \prod\limits_{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{n\}} \Phi_d(X)$. Les polynômes A et B étant unitaires dans $\mathbb{Z}[X]$ (hypothèse de récurrence pour B), le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ nous aussi dit qu'il existe un unique couple Q, R dans $\mathbb{Z}[X]$, le polynôme Q étant unitaire, tel que $A = BQ + R$ et nécessairement on a $\Phi_n = Q$ par unicité du quotient et du reste dans $\mathbb{C}[X]$.

6. On a $\mathbb{U}_1 = R_1 = \{1\}$ et $\Phi_1(X) = X - 1$. Pour les nombres premiers $2, 3, 5$, on a $\Phi_2(X) = X + 1$, $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$, $\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Pour $n = 4$, on a $\Phi_4(X) = \Phi_2\left(X^2\right) = X^2 + 1$. Enfin, de :

$$X^6 - 1 = \Phi_6(X)\Phi_3(X)\Phi_1(X)\Phi_2(X) = \Phi_6(X)\left(X^3 - 1\right)(X + 1)$$

on déduit que $\Phi_6(X) = \dfrac{X^6 - 1}{(X^3 - 1)(X + 1)} = X^2 - X + 1$.

7. Dans le cas où P est unitaire et les a_k, pour k compris entre 0 et $n - 1$, sont divisibles par p, on a $\overline{P}(X) = X^n$ dans $\mathbb{F}_p[X]$. Si P est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$, il existe alors deux polynômes unitaires $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{q} b_k X^k$ et $R(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} c_k X^k$ dans $\mathbb{Z}[X]$ de degrés respectifs q et r compris entre 1 et $n - 1$ tels que $P = QR$ et dans $\mathbb{F}_p[X]$ on a l'égalité $\overline{P}(X) = \overline{Q}(X)\overline{R}(X) = X^n$, donc $\overline{b_q}\overline{c_r} = \overline{1}$, ce qui implique que $\overline{b_q}$ et $\overline{c_r}$ sont non nuls dans $\mathbb{F}_p$, c'est-à-dire que $\overline{Q}$ est de degré q et $\overline{R}$ de degré r dans $\mathbb{F}_p[X]$. L'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$ et l'égalité $\overline{P} = X^n$ entraînent que $\overline{Q}(X) = \overline{b_q}X^q$ et $\overline{R} = \overline{c_r}X^r$, c'est-à-dire que tous les b_k pour k compris entre 0 et $q - 1$ et tous les c_j pour j compris entre 0 et $r - 1$ sont divisibles par p. En particulier p divise b_0 et c_0, ce qui implique que p^2 divise $a_0 = b_0 c_0$ en contradiction avec l'une des hypothèses de départ. En définitive P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

8.

(a) Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes primitifs dans $\mathbb{Z}[X]$ et $R(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ leur produit. Si R n'est pas primitif, son contenu admet alors un diviseur premier p qui divise tous les c_k pour k compris entre 0 et $n+m$. Dans $\mathbb{F}_p[X]$, on a :

$$\overline{P}(X) \cdot \overline{Q}(X) = \overline{R}(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \overline{c_k} X^k = \overline{0}$$

donc $\overline{P} = \overline{0}$ ou $\overline{Q} = \overline{0}$ puisque l'anneau $\mathbb{F}_p[X]$ est intègre, ce qui signifie que p divise tous les coefficients de P ou tous les coefficients de Q, en contradiction avec P et Q primitifs. En définitive, le produit de deux polynômes primitifs dans $\mathbb{Z}[X]$ est primitif.

(b) On a $P \cdot Q = c(P)\, c(Q) \left(\frac{1}{c(P)} P\right) \left(\frac{1}{c(Q)} P\right)$, les polynômes $\frac{1}{c(P)} P$ et $\frac{1}{c(Q)} P$ étant primitifs (on a $\operatorname{pgcd}(\lambda a_i)_{1 \leq i \leq n} = \lambda \operatorname{pgcd}(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^*$), ce qui nous donne $P \cdot Q = c(P)\, c(Q)\, R$ avec R primitif dans $\mathbb{Z}[X]$ comme produit de deux polynômes primitifs, donc $c(PQ) = c(P)\, c(Q)$ par homogénéité du pgcd.

(c) Soit $P = c(P)\, P_1$ irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ avec P_1 primitif dans $\mathbb{Z}[X]$. Si P est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il en est alors de même de P_1 qui va donc s'écrire $P_1 = Q_1 R_1$ avec Q_1 et R_1 non constants dans $\mathbb{Q}[X]$. Écrivant que $Q_1 = \frac{1}{q} Q_2$, $R_1 = \frac{1}{r} R_2$ avec q, r dans $\mathbb{N}^*$ et Q_2, R_2 non constants dans $\mathbb{Z}[X]$, on a $qrP_1 = Q_2 R_2$, $qr = c(qrP_1) = c(Q_2)\, c(R_2)$ et $P = c(P)\, P_1 = \frac{c(P)}{c(Q_2)\, c(R_2)} Q_2 R_2 = QR$, les polynômes $Q = \frac{c(P)}{c(Q_2)} Q_2$ et $R = \frac{1}{c(R_2)} R_2$ étant non constants dans $\mathbb{Z}[X]$, ce qui contredit l'irréductibilité de P. En conclusion, le polynôme P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

9.

(a) On a $\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ et $\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^{k-1}$ avec p premier qui divise les $\binom{p}{k}$ pour tout k compris entre 1 et $p-1$ (comme le nombre premier p divise $p! = k!\,(p-k)! \binom{p}{k}$ et est premier avec $k!\,(p-k)!$, on déduit du théorème de Gauss qu'il divise $\binom{p}{k}$), p qui ne divise pas le coefficient dominant $a_{p-1} = 1$ et p^2 qui ne divise pas le coefficient constant $a_0 = p$. On déduit alors du critère d'Eisenstein que le polynôme $\Phi_p(X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, donc dans $\mathbb{Q}[X]$ et il en est nécessairement de même de $\Phi_p(X)$.

(b) Pour tout entier $r \geq 2$, on a $\Phi_{p^r}(X+1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left((X+1)^{p^{r-1}} \right)^k$ avec $\overline{(X+1)^{p^{r-1}}} = X^{p^{r-1}} + \overline{1}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ (c'est vrai pour $r = 2$ car p premier divise $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$ et supposant le résultat acquis pour $r-1 \geq 2$, on a $\overline{(X+1)^{p^{r-1}}} = \left(\overline{(X+1)^{p^{r-2}}} \right)^p = \left(X^{p^{r-2}} + \overline{1} \right)^p = X^{p^{r-1}} + \overline{1}$), de sorte que :

$$\overline{\Phi_{p^r}}(X+1) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(X^{p^{r-1}} + \overline{1} \right)^k = \overline{\Phi_p} \left(X^{p^{r-1}} + 1 \right) = X^{(p-1)p^{r-1}}$$

dans $\mathbb{F}_p[X]$ (la question précédente nous dit que $\overline{\Phi_p}(Y+1) = Y^{p-1}$) et ce résultat se traduit en disant que tous les coefficients du polynôme $\Phi_{p^r}(X+1)$ sauf son coefficient dominant sont divisibles par p. Le coefficient constant $\Phi_{p^r}(1) = \Phi_p(1) = p$ n'étant pas divisible par p^2, le critère d'Eisenstein nous dit que $\Phi_{p^r}(X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, donc dans $\mathbb{Q}[X]$ et il en est de même de $\Phi_{p^r}(X)$.

10.

(a) On désigne par $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et par u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice C_P dans cette base. On a $u(e_k) = e_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, donc $e_{k+1} = u^k(e_1)$ et $u(e_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$, ce qui nous donne $u^n(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e_1)$ ou encore $P(u)(e_1) = 0$, ce qui signifie que P est annulateur de u (car $P(u)(e_{k+1}) = P(u)\left(u^k(e_1)\right) = u^k(P(u)(e_1)) = 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$), donc multiple de son polynôme minimal P_u. Comme la famille $\left(u^{k-1}(e_1)\right)_{1 \leq k \leq n} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre, ce polynôme minimal P_u est de degré n (sinon $P_u(X) = X^r - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k X^k$ avec $1 \leq r \leq n-1$ et de $P_u(u)(e_1) = 0$ on déduit que $e_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k e_{k+1} = 0$, ce qui n'est pas possible). Il en résulte que $P_u = P$ puisque ces polynômes sont unitaires de même degré. Comme P_u divise le polynôme caractéristique χ_u (théorème de Cayley-Hamilton) qui est aussi unitaire de degré n, on a $P_u = \chi_u$.

(b) La matrice M dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ est trigonalisable, donc il existe $R \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire de termes diagonaux $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ telles que $M = RTR^{-1}$. Il en résulte que $M^k = RT^kR^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $P(M) = RP(T)R^{-1}$ par linéarité, $P(T)$ étant triangulaire de termes diagonaux $P(\alpha_1), \cdots, P(\alpha_n)$, ce qui nous donne $\chi_{P(M)}(X) = \chi_{P(T)}(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - P(\alpha_k))$.

(c) Pour $M = C_Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, on a $Q(X) = \chi_M(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$, donc $\chi_{P(M)}(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - P(\alpha_k)) \in \mathbb{Q}[X]$ puisque $P(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

11.

(a) En raisonnant par récurrence, il nous suffit de considérer le cas où $r = 2$. Si p est premier, il divise alors tous les $\binom{p}{k}$ pour k compris entre 1 et $p-1$ et en conséquence, on a $\overline{(A_1 + A_2)^p} = \sum_{k=0}^{p} \overline{\binom{p}{k}} \overline{A_1^k} \overline{A_2^{p-k}} = \overline{A_1^p} + \overline{A_2^p}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

(b) Pour tout $A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, on a :

$$\overline{A^p}(X) = \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)^p} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k^p} X^{kp}$$

dans $\mathbb{F}_p[X]$ avec $\overline{a_k^p} = \overline{a_k}^p = \overline{a_k}$ dans $\mathbb{F}_p$ pour tout k compris entre 0 et n (théorème de Fermat), ce qui donne $\overline{A^p}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^{kp} = \overline{A}(X^p)$.

12. Après réduction au même dénominateur des coefficients de P et Q, on peut écrire que $P = \frac{1}{m}P_1$, $Q = \frac{1}{m}Q_1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et P_1, Q_1 dans $\mathbb{Z}[X]$ de coefficient dominant égal à m (P et Q sont unitaires). On a alors $m^2 PQ = P_1 Q_1$ dans $\mathbb{Z}[X]$ et on peut écrire que $c(m^2 PQ) = m^2 c(PQ) = c(P_1)c(Q_1)$ avec $c(PQ) = 1$ puisque PQ est unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$. On a donc $m^2 = c(P_1)c(Q_1)$ avec $c(P_1)$ et $c(Q_1)$ qui divisent m (m est le coefficient dominant de ces polynômes), ce qui implique que $c(P_1) = c(Q_1) = m$, c'est-à-dire que m divise tous les coefficients de P_1 et Q_1 et donc $P = \frac{1}{m}P_1$, $Q = \frac{1}{m}Q_1$ sont dans $\mathbb{Z}[X]$.

– II – Nombres algébriques

1. En écrivant que $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$, on en déduit que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable, ce qui signifie que $\mathbb{Q}[X] = \{P_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, les P_k étant des polynômes à coefficients rationnels. Donc l'ensemble $\mathbb{A} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k^{-1}\{0\}$ des nombres réels algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable et l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ des réels transcendants est infini non dénombrable.

2.

(a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{L}$, $\mathcal{I}_\alpha = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ (noyau du morphisme d'anneaux $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(\alpha) \in \mathbb{L}$).

Pour α algébrique sur $\mathbb{K}$, cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$ et il existe un unique polynôme unitaire non nul $P_\alpha \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{I}_\alpha = \mathbb{K}[X] \cdot P_a$. On rappelle que P_α est le polynôme unitaire de $\mathcal{I}_\alpha$ de degré minimum, ce qui implique qu'un polynôme non nul de degré strictement inférieur à celui de P_α ne peut annuler α.

(b) Par définition P_α est unitaire et annule α. Si $P_\alpha = QR$ avec Q, R dans $\mathbb{K}[X]$, on a alors $Q(\alpha) R(\alpha) = 0$ et $Q(\alpha) = 0$ ou $R(\alpha) = 0$, ce qui équivaut à dire que Q ou R est dans l'idéal $\mathcal{I}_\alpha$, ces polynômes étant de degré inférieur ou égal à celui de P_α, l'un des deux est nécessairement constant. On a donc ainsi prouvé que P_α est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Réciproquement si Q est un polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$ qui annule α, il est alors dans $\mathcal{I}_\alpha$, donc proportionnel à P_α et nécessairement égal à P_α puisque irréductible et unitaire. D'où l'unicité.

(c) Le polynôme P_α qui est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ est de degré $d(\alpha, \mathbb{K}) \geq 1$ et son polynôme dérivé P'_α est non nul puisque $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle et premier avec P_α (sinon il existe un diviseur $D \in \mathbb{K}[X]$ de P_α de degré $d \geq 1$, ce qui contredit l'irréductibilité de P_α). Le théorème de Bézout nous dit alors qu'il existe deux polynômes U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP_\alpha + VP'_\alpha = 1$, donc un élément de $\mathbb{L}$ ne peut annuler simultanément P_α et P'_α. Le polynôme P_α n'a donc que des racines simples dans $\mathbb{L}$ (ce polynôme a au moins une racine dans $\mathbb{L}$, à savoir α).

3. Une racine primitive p^r-ième de l'unité étant annulée par le polynôme cyclotomique Φ_{p^r} qui est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (question **I.9**), on en déduit qu'elle est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de polynôme minimal Φ_{p^r}.

4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{L}$, on a $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[\alpha]$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$, on a alors $P(\alpha) \in \mathbb{K}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ puisque $\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}$. Si $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}$ on a alors $\alpha \in \mathbb{K}$ et il est annulé par $X - \alpha$ qui est unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$, ce qui entraîne que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ de polynôme minimal $X - \alpha$ et $d(\alpha, \mathbb{K}) = 1$. Si α est algébrique sur $\mathbb{K}$ avec $d(\alpha, \mathbb{K}) = 1$, son polynôme minimal est alors de la forme $P_\alpha(X) = X + c$ dans $\mathbb{K}[X]$ et on a $\alpha = -c \in \mathbb{K}$.

5.

(a) On note $d = d(\alpha, \mathbb{Q})$. Pour $d = 1$, α est rationnel, soit $\alpha = \dfrac{a}{b}$ avec(a, b) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et pour $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ distinct de α on a $0 < \left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| = \dfrac{|aq - bp|}{qb}$, donc $|aq - bp| \geq 1$ (c'est un entier naturel non nul) et $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{1}{b}\dfrac{1}{q}$. Pour $d \geq 2$, le nombre α est nécessairement irrationnel. En notant P_α son polynôme minimal dans $\mathbb{Q}[X]$, il existe un entier naturel non nul n tel que $Q_\alpha = nP_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ et pour tout rationnel $r = \dfrac{p}{q}$, on a $q^d Q_\alpha(r) \in \mathbb{Z}$. De plus cet entier est non nul. En effet si $q^d Q_\alpha(r) = 0$, r est alors racine de Q_α et on a $Q_\alpha(X) = (X - r) R(X)$ avec $X - r$ et R dans $\mathbb{Q}[X]$ non constants (on a $d \geq 2$), en contradiction avec P_α irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On a donc $\left|q^d (Q_\alpha(\alpha) - Q_\alpha(r))\right| = \left|q^d Q_\alpha(r)\right| \geq 1$. D'autre part, le théorème des accroissements finis permet d'écrire que $Q_\alpha(\alpha) - Q_\alpha(r) = (\alpha - r) Q'_\alpha(s)$

avec s strictement compris entre α et r. On distingue alors deux cas : soit $|\alpha - r| \leq 1$ et dans ce cas on a $s \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ de sorte que :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left|q^d Q_\alpha(r)\right| = q^d |\alpha - r| \left|Q'_\alpha(s)\right| \\ &\leq \left(\sup_{s \in [\alpha-1,\alpha+1]} \left|Q'_\alpha(s)\right|\right) q^d |\alpha - r| = M q^d |\alpha - r| \end{aligned}$$

soit $|\alpha - r| \geq \dfrac{C_1}{q^d}$ où $C_1 = \dfrac{1}{M}$; soit $|\alpha - r| > 1$ et dans ce cas on a $|\alpha - r| > \dfrac{1}{q^d}$. En posant $C_\alpha = \min\left(1, \dfrac{1}{M}\right)$, on a $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{C_\alpha}{q^d}$.

(b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_k \neq 0$ pour tout $k \geq n_0$. En notant $p = 10^{n!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^{k!}}$ et $q = 10^{n!}$ pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} \leq \frac{9}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10^{(n+1)!}} \frac{10}{9} \leq \frac{1}{q^n}$$

Si α est algébrique de degré $d \geq 1$, il existe alors un réel $C_\alpha > 0$ tel que $\dfrac{C_\alpha}{q^d} \leq \left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{q^n}$ pour tout $n \geq n_0$ et faisant tendre n vers l'infini, on aboutit à une absurdité. En conclusion α est transcendant.

6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{L}$, $\mathbb{K}(\alpha)$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ qui contient α et $\mathbb{K}$, donc il contient $\mathbb{K}[\alpha]$. Supposons que α soit algébrique sur $\mathbb{K}$ de polynôme minimal P_α. Pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$, il nous suffit de montrer que l'anneau unitaire $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps (par définition de $\mathbb{K}(\alpha)$), ce qui revient à montrer que tout élément non nul de $\mathbb{K}[\alpha]$ est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$. Tout x de $\mathbb{K}[\alpha]$ s'écrit $x = P(\alpha)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. Par division euclidienne on peut écrire que $P = P_\alpha Q + R$ avec $R = 0$ ou $R \neq 0$ et $\deg(R) < \deg(P_\alpha)$ et on a $x = R(\alpha)$. Si x n'est pas nul, il en est alors de même de R qui est premier avec le polynôme irréductible P_α et le théorème de Bézout nous dit qu'il existe deux polynômes U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP_\alpha + VR = 1$, ce qui implique que $V(\alpha) R(a) = 1$ et signifie que $R(a)$ est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$ d'inverse $V(a)$. On peut aussi utiliser le morphisme d'anneaux :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\alpha : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{L} \\ & P & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$$

de noyau $\mathcal{I}_\alpha = \mathbb{K}[X] \cdot P_a$ et d'image $\mathbb{K}[\alpha]$. Par passage au quotient, on déduit un isomorphisme d'anneaux de $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{\mathcal{I}_\alpha}$ sur $\mathbb{K}[\alpha]$ et pour α algébrique le polynôme P_α est irréductible, donc $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{\mathcal{I}_\alpha}$ est un corps ainsi que $\mathbb{K}[\alpha]$. Supposons que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$, c'est-à-dire que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps. Si $\alpha = 0$, il est alors algébrique, sinon il est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\alpha P(\alpha) = 1$ et $XP(X) - 1 \in \mathbb{K}[X]$ annule α, ce qui signifie que α est algébrique sur $\mathbb{K}$. Par division euclidienne tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = P_\alpha Q + R$ et $P(\alpha) = R(\alpha)$ est combinaison linéaire de $1, \alpha, \cdots, \alpha^{d(\alpha,\mathbb{K})-1}$, une telle écriture étant unique. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[\alpha]$ est donc de dimension finie $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] = d(\alpha, \mathbb{K})$. Si $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha]$ est fini égale à d, la famille $\left(\alpha^k\right)_{0\leq k\leq d}$ est alors liée, ce qui se traduit en disant qu'il existe un polynôme non nul P de degré au plus égal à d dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$, donc α est algébrique sur $\mathbb{K}$.

7. Si $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ est fini, alors pour tout α dans $\mathbb{L}$ le sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[\alpha]$ de $\mathbb{L}$ est également de dimension finie, ce qui signifie que α est algébrique sur $\mathbb{K}$. Par exemple de $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ on déduit que tout nombre complexe est algébrique sur $\mathbb{R}$, ce qui peut aussi se voir directement en écrivant que pour tout $z = x + iy$ dans $\mathbb{C}$ on a $(z-x)^2 + y^2 = 0$.
8. Notons $d_\alpha = d(\alpha, \mathbb{Q})$ et $(\alpha_k)_{1\leq k\leq d_\alpha}$ les racines complexes distinctes de P_α avec $\alpha_1 = \alpha$.

   (a) Soit σ un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$. On a $\sigma(1) = 1$, $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$, $\sigma(ax+y) = a\sigma(x) + \sigma(y)$ pour tous x, y dans $\mathbb{K}[\alpha]$ et tout a dans $\mathbb{Q}$, donc $(\sigma(\alpha))^k = \sigma\left(\alpha^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $P(\sigma(\alpha)) = \sigma(P(\alpha))$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, ce qui donne en particulier $P_\alpha(\sigma(\alpha)) = \sigma(P_\alpha(\alpha)) = \sigma(0) = 0$. Il existe donc un entier k compris entre 1 et d_α tel que $\sigma(\alpha) = \alpha_k$. Les α_k étant deux à deux distincts, cela défini exactement d_α morphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ (tout $z \in \mathbb{Q}[\alpha]$ s'écrit de manière unique $z = \sum_{j=0}^{d_\alpha-1} a_j\alpha^j$, donc en posant $\sigma(\alpha) = \alpha_k$, on définit un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ par $\sigma(z) = \sum_{j=0}^{d_\alpha-1} a_j\alpha_k^j$). Comme tout morphisme de corps, σ_k est injectif (comme $\sigma_k(1) = 1$, le noyau de σ_k est un idéal strict du corps $\mathbb{Q}[\alpha]$, donc réduit à $\{0\}$ et σ_k est injectif) et c'est un isomorphisme de $\mathbb{Q}[\alpha]$ sur $\mathrm{Im}(\sigma_k) = \mathbb{Q}[\alpha_k]$.

   (b)

      i. Le corps $\mathbb{Q}[\alpha]$ étant une extension de degré fini de $\mathbb{Q}$, tous ses éléments sont algébriques.

      ii. On a $\theta = \sum_{j=0}^{d_\alpha-1} a_j\alpha^j = P(\alpha)$ avec $P(X) = \sum_{j=0}^{d_\alpha-1} a_jX^j \in \mathbb{Q}[X]$, donc pour tout k compris entre 1 et d_α, on a :

      $$\sigma_k(\theta) = \sum_{j=0}^{d_\alpha-1} a_j(\sigma_k(\alpha))^j = \sum_{j=0}^{d_\alpha-1} a_j\alpha_k^j = P(\alpha_k)$$

      ce qui nous donne $Q_\theta(X) = \prod_{k=1}^{d_\alpha}(X - P(\alpha_k)) \in \mathbb{Q}[X]$ d'après **I.10**.

iii. On note $d_\theta = d(\theta, \mathbb{Q})$ et $P_\theta(X) = \prod_{k=1}^{d_\theta}(X - \theta_k)$ où $(\theta_k)_{1\leq k\leq d_\theta}$ est la suite des racines complexes deux à deux distinctes de P_θ. La restriction de chaque σ_k à $\mathbb{Q}[\theta]$ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[\theta]$ dans $\mathbb{C}$, donc il existe j compris entre 1 et d_θ tel que $\sigma_k(\theta) = \theta_j$ et on a $Q_\theta(\theta_j) = Q_\theta(\sigma_k(\theta)) = \sigma_k(Q_\theta(\theta)) = 0$ avec $Q_\theta \in \mathbb{Q}[X]$. Il en résulte que $P_\theta = P_{\theta_j}$ divise Q_θ dans $\mathbb{Q}[X]$ (P_θ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ annulant θ_j, donc $P_\theta = P_{\theta_j}$). On a donc $Q_\theta = QP_\theta^r$ avec $r \geq 1$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire non divisible par P_θ. Si Q est non constant, il admet alors une racine complexe qui est aussi racine de Q_θ, cette racine est donc l'un des $\sigma_k(\theta) = P(\alpha_k)$ et on a $\sigma_k(Q(\theta)) = Q(\sigma_k(\theta)) = 0$, ce qui implique que $Q(\theta) = 0$ puisque σ_k est injectif et le polynôme minimal P_θ de θ devrait diviser Q, ce qui n'est pas. On a donc $Q = 1$ et $Q_\theta = P_\theta^r$.

9. Soit $\alpha \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ algébrique sur $\mathbb{K}$ de polynôme minimal $P_\alpha(X) = \sum_{k=0}^{d_\alpha} a_k X^k$. Le polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^{d_\alpha} a_{d_\alpha - k} X^k$ est non nul dans $\mathbb{K}[X]$ et on a :

$$Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{d_\alpha} a_{d_\alpha-k}\alpha^{-k} = \frac{1}{\alpha^{d_\alpha}}\sum_{k=0}^{d_\alpha} a_{d_\alpha-k}\alpha^{d_\alpha-k} = \frac{P_\alpha(\alpha)}{\alpha^{d_\alpha}} = 0$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{\alpha}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$. Sachant que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$ est un corps, $\frac{1}{\alpha}$ est dans $\mathbb{K}[\alpha]$.

10. Soient $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{M}$ et $(f_j)_{1\leq j\leq q}$ une base du $\mathbb{M}$-espace vectoriel $\mathbb{L}$. Tout élément x de $\mathbb{L}$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^{q} x_j f_j$, chaque x_j dans $\mathbb{M}$ s'écrivant $x_j = \sum_{i=1}^{p} x_{ij} e_i$, ce qui implique que $x = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} x_{ij} e_i f_j$ et montre que $(e_i f_j)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ est un système générateur du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{L}$. Si $\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} x_{ij} e_i f_j = 0$, les x_{ij} étant dans $\mathbb{K}$, on a alors $\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p} x_{ij} e_i\right) f_j = 0$ avec les $\sum_{i=1}^{p} x_{ij} e_i$ dans $\mathbb{M}$, ce qui implique que $\sum_{i=1}^{p} x_{ij} e_i = 0$ pour tout j compris entre 1 et q et entraîne la nullité de tous les x_{ij}. En définitive la famille $(e_i f_j)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ est libre et c'est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{L}$, donc $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = pq = [\mathbb{L} : \mathbb{M}][\mathbb{M} : \mathbb{K}]$.

11. Tout élément de $\mathbb{K}$ étant algébrique sur $\mathbb{K}$, on a $\mathbb{K} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{L}$. Pour vérifier que $\mathbb{A}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, il suffit de montrer que si α, β sont dans $\mathbb{A}$

avec $\beta \neq 0$, alors $-\alpha$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont aussi dans $\mathbb{A}$. Pour $\dfrac{1}{\beta}$ c'est déjà fait en **II.9**. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme non nul dans $\mathbb{K}[X]$ qui annule α, alors le polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k a_k X^k$ est non nul dans $\mathbb{K}[X]$ et $Q(-\alpha) = P(\alpha) = 0$, c'est-à-dire que $-\alpha$ est dans $\mathbb{A}$. Pour ce qui est de $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$, il s'agit de montrer que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}[\alpha + \beta]$ et $\mathbb{K}[\alpha\beta]$ sont de dimensions finies. Ces espaces étant contenus dans $\mathbb{K}[\alpha][\beta]$, il nous suffit de montrer que ce dernier est de dimension finie. Comme α est algébrique sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De plus si β est algébrique sur $\mathbb{K}$, il l'est également sur $\mathbb{K}[\alpha]$ et $\mathbb{K}[\alpha][\beta]$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}[\alpha]$. Avec la propriété de multiplicativité des degrés, on a alors :

$$[\mathbb{K}[\alpha][\beta] : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}[\alpha][\beta] : \mathbb{K}[\alpha]][\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] < +\infty$$

(voir aussi l'exercice **??**).

12.

(a) Pour $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$, on a $\left(\alpha^2 - p - q\right)^2 = 4pq$, donc α est annulé par le polynôme $P(X) = X^4 - 2(p+q)X^2 + (p-q)^2$ et il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré compris entre 2 et 4 (si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a alors $\sqrt{pq} = \dfrac{\alpha^2 - p - q}{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas pour $p < q$ premiers). En notant $\alpha' = \sqrt{q} - \sqrt{p}$, on a $\alpha + \alpha' = 2\sqrt{q}$ et $\alpha\alpha' = q - p$, c'est-à-dire que α et α' sont les solutions de l'équation $P(X) = X^2 - 2\sqrt{q}X + q - p = 0$. Ils sont donc algébriques sur le corps $\mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$ ($\sqrt{q}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré 2). Comme α n'est pas dans $\mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$ (si $\alpha \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$, on a alors $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$, soit $\sqrt{p} = r + s\sqrt{q}$ avec r, s rationnels et $p = r^2 + qs^2 + 2rs\sqrt{q}$ nous dit que $\sqrt{q}$ est rationnel), on en déduit qu'il est de degré 2 sur $\mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]$ et on a :

$$[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\sqrt{q}]][\mathbb{Q}[\sqrt{q}] : \mathbb{Q}] = 4$$

ce qui implique que P est le polynôme minimal de α.

(b) Posons $\beta' = \sqrt[3]{q} - \sqrt{p}$. On a $\beta + \beta' = 2\sqrt[3]{q}$ et $\beta\beta' = \sqrt[3]{q^2} - p$, c'est-à-dire que β et β' sont les solutions de l'équation $P(X) = X^2 - 2\sqrt[3]{q}X + \left(\sqrt[3]{q}\right)^2 - p = 0$. Ils sont donc algébriques sur le corps $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{q}\right]$ (il est facile de vérifier que $\sqrt[3]{q}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré 3). Comme β n'est pas dans $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{q}\right]$, on en déduit qu'il est de degré 2 sur $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{q}\right]$ et :

$$[\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{q}]][\mathbb{Q}[\sqrt[3]{q}] : \mathbb{Q}] = 6$$

Avec $\left(\beta - \sqrt{p}\right)^3 = q$, on déduit que $\beta^3 - 3\beta^2\sqrt{p} + 3p\beta - p\sqrt{p} = q$, ce qui entraîne $\left(\beta^3 + 3p\beta - q\right)^2 = p\left(3\beta^2 + p\right)^2$, c'est-à-dire que β est annulé par le polynôme :

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(X^3 + 3pX - q\right)^2 - p\left(3X^2 + p\right)^2 \\ &= X^6 - 3pX^4 - 2qX^3 + 3p^2X^2 - 6pqX + q^2 - p^3 \end{aligned}$$

et ce polynôme est le polynôme minimal de α.

13. Comme $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$, on a $\mathbb{K} \not\subset \mathbb{L}$ et pour tout $x \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$, $(1, x)$ est une base du $\mathbb{K}$ espace vectoriel de $\mathbb{L}$. Le système $\left(1, x, x^2\right)$ est alors lié et il existe a, b, c non tous nuls dans $\mathbb{K}$ tels que $ax^2+bx+c = 0$. Comme $(1, x)$ est libre, on a nécessairement $a \neq 0$ et l'équation précédente s'écrit $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = 0$. En posant $\lambda = x + \dfrac{b}{2a}$, on a $\lambda \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$, $\lambda^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} \in \mathbb{K}$ et $(1, \lambda)$ est une base du $\mathbb{K}$ espace vectoriel de $\mathbb{L}$, ce qui entraîne que $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\lambda]$. En particulier si α est un réel algébrique de degré 2 sur $\mathbb{K}$, l'extension $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha]$ est de degré 2 sur $\mathbb{K}$ et il existe un réel $\mu > 0$ dans $\mathbb{K}$ tel $\lambda = \sqrt{\mu} \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{K}\left[\sqrt{\mu}\right]$.

14.

(a) Si α est un entier algébrique, il existe alors $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(\alpha) = 0$, donc son polynôme minimal P_α divise P dans $\mathbb{Q}[X]$, soit $P(X) = P_\alpha(X)Q(X)$, les polynômes P_α et Q étant unitaires dans $\mathbb{Q}[X]$, ce qui implique $P_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ (question **I.12**). La réciproque est évidente.

(b) Pour $\alpha = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique de degré $d_\alpha = d(\alpha, \mathbb{Q})$, son polynôme minimal P_α est alors dans $\mathbb{Z}[X]$ et unitaire. Tout élément de $\mathbb{Z}[\alpha]$ étant de la forme $\theta = P(\alpha)$ avec $P \in \mathbb{Z}[X]$, on a la division euclidienne $P = QP_\alpha + R$ avec Q, R dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\deg(R) \leq d_\alpha - 1$, de sorte que $\theta = R(\alpha) = \displaystyle\sum_{j=0}^{d_\alpha-1} a_j\alpha^j$. On a donc $\mathbb{Z}[\alpha] = \displaystyle\sum_{j=0}^{d-1} \mathbb{Z}\alpha^j$, ce qui signifie que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est de type fini engendré par $1, \alpha, \cdots, \alpha^{d_\alpha-1}$. Réciproquement pour $\alpha \neq 0$, supposons que $\mathbb{Z}[\alpha] = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{Z}g_j$ où les g_j sont dans $\mathbb{Z}[\alpha]$. Pour tout j compris entre 1 et n, on a $\alpha g_j = \alpha P_j(\alpha) \in \mathbb{Z}[\alpha]$ (P_j est un polynôme), donc il existe des entiers relatifs a_{ij} tels que $\alpha g_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}g_i$, ce qui se traduit en notant $M = ((a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $v = (g_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par $Mv = \alpha v$, donc α est valeur propre de M et annule le polynôme caractéristique $P(X) = \det(XI_n - M)$ qui est unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$. En conclusion, α est un entier algébrique.

(c) Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est un entier algébrique, c'est en particulier un nombre algébrique de polynôme minimal $X - \alpha$ qui doit être dans $\mathbb{Z}[\alpha]$, donc $\alpha \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, il est clair qu'un entier relatif est rationnel et entier algébrique.

(d) Soient α, β deux entiers algébriques. Les groupes $\mathbb{Z}[\alpha]$ et $\mathbb{Z}[\beta]$ sont de type fini respectivement engendrés par $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(h_j)_{1\leq j\leq m}$, donc le groupe $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ engendré par $\left(\alpha^i\beta^j\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est aussi de type fini engendré par $(g_ih_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$. Comme les groupes $\mathbb{Z}[\alpha - \beta]$ et $\mathbb{Z}[\alpha\beta]$ sont contenus dans $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$, ils sont aussi de type fini, ce qui signifie que $\alpha - \beta$ et $\alpha\beta$ sont des entiers algébriques. En conclusion, l'ensemble des entiers algébriques de $\mathbb{C}$ est un sous-anneau de $\mathbb{A}$.

15.

(a) En utilisant **I.11b** on a $\overline{P_\alpha}(X^p) = \overline{P_\alpha^p}(X)$ dans $\mathbb{F}_p[X]$, ce qui équivaut à $P_\alpha(X^p) = P_\alpha^p(X) + pQ(X)$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$, donc $\dfrac{P_\alpha(\alpha^p)}{p} = Q(\alpha)$ est un entier algébrique puisque α l'est (racine de $X^n - 1$) et l'ensemble des entiers algébriques de $\mathbb{C}$ est un anneau.

(b) On a $P(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \alpha_k)$ et $P'(X) = nX^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n-1}(X - \alpha_j)$,

donc $P'(\alpha_k) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_j)$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} P'(\alpha_k) = n^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\alpha_k\right)^{n-1} &= \prod_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_j)\\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{0\leq j<k\leq n-1}(a_k - \alpha_j)^2\end{aligned}$$

avec $\prod_{k=0}^{n-1}\alpha_k = (-1)^{n+1}$, ce qui nous donne :

$$\prod_{0\leq j<k\leq n-1}(a_k - \alpha_j)^2 = n^n(-1)^{(n-1)(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}} = n^n(-1)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}$$

(c) Comme α est annulé par $X^n - 1$, son polynôme minimal P_α divise $X^n - 1$ et ses racines complexes, qui sont deux à deux distinctes, sont des α_j. Notons $(\alpha_j)_{j\in J}$ la suite des racines de P_α. Si $P_\alpha(\alpha^p) \neq 0$, il existe alors un entier k compris entre 0 et $n-1$ n'appartenant pas à J tel que $\alpha^p = \alpha_k$ (α^p est une racine n-ième de l'unité) et $P_\alpha(\alpha^p) = \prod_{j\in J}(\alpha_k - \alpha_j)$ se retrouve dans le produit $\prod_{0\leq j<k\leq n-1}(a_k - \alpha_j)^2$. On a donc $\prod_{0\leq j<k\leq n-1}(a_k - \alpha_j)^2 = \beta P_\alpha(\alpha^p)$, où β est un entier algébrique comme produit de $\alpha_q - \alpha_p$ (les α_p sont des entiers algébriques et l'ensemble des entiers algébriques est un anneau) et $n^n = \gamma P_\alpha(\alpha^p)$, où $\gamma = (-1)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}\beta$ est un entier algébrique, donc le nombre rationnel $\dfrac{n^n}{p} = \gamma\dfrac{P_\alpha(\alpha^p)}{p}$ est un entier algébrique, c'est-à-dire un entier relatif, ce qui contredit le fait que le nombre premier p ne divise pas n. En conclusion, on a $P_\alpha(\alpha^p) = 0$, donc P_{α^p} divise P_α dans $\mathbb{Q}[X]$ et ces deux polynômes sont égaux puisque unitaires et irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

(d) On vérifie que Φ_n est le polynôme minimal de ω_1, ce qui implique qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Pour ce faire, il nous suffit de vérifier que P_{ω_1} s'annule sur tout R_n (dans ce cas, on a $P_{\omega_1} = Q\Phi_n$ dans $\mathbb{C}[X]$ et aussi dans $\mathbb{Q}[X]$ par unicité du quotient dans une division euclidienne, ce qui implique que $P_{\omega_1} = \Phi_n$ puisque P_{ω_1} est unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$). Un élément de R_n est de la forme ω_1^k avec k compris entre 1 et $n-1$ premier avec n. Un tel entier k s'écrit $k = \prod_{i=1}^{r} p_i$ où les p_i sont premiers (non nécessairement distincts) ne divisant pas n. La question précédente appliquée à $\alpha = \omega_1$ et $p = p_1$, nous dit que $P_{\omega_1} = P_{\omega_1^{p_1}}$, puis appliquée à $\alpha = \omega_1^{p_1}$ et $p = p_2$, que $P_{\omega_1} = P_{\omega_1^{p_1}} = P_{\left(\omega_1^{p_1}\right)^{p_2}} = P_{\omega_1^{p_1 p_2}}$ et en continuant ainsi de suite, on aboutit à $P_{\omega_1} = P_{\omega_1^{p_1 \cdots p_r}} = P_{\omega_1^k}$, ce qui implique que $P_{\omega_1}\left(\omega_1^k\right) = 0$.

16. Pour $n = 1$, $\alpha = 1$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré 1. Pour $n = 2$, $\alpha = -1$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré 1. Pour $n \geq 3$, Le nombre complexe $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de polynôme minimal Φ_n, donc $\overline{\omega_1} = \dfrac{1}{\omega_1}$ et $\alpha = \dfrac{\omega_1 + \overline{\omega_1}}{2}$ sont aussi algébriques sur $\mathbb{Q}$. Avec $\omega_1 + \overline{\omega_1} = 2\alpha$ et $\omega_1\overline{\omega_1} = 1$, on déduit que ω_1 est racine de $X^2 - 2\alpha X + 1 = 0$, c'est-à-dire que ω_1 est algébrique sur $\mathbb{Q}[\alpha]$ de degré 2 (pour $n \geq 2$, ω_1 n'est pas réel et en conséquence n'est pas dans le corps $\mathbb{Q}[\alpha]$). Avec la propriété de multiplicativité des degrés on en déduit que :
$$\varphi(n) = [\mathbb{Q}[\omega_1] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\omega_1] : \mathbb{Q}[\alpha]]\,[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 2\,[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$$
soit $d(\alpha, \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = \dfrac{\varphi(n)}{2}$ (pour tout entier $n \geq 3$, $\varphi(n)$ est un entier pair). En utilisant la décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{m_j}$, on a :
$$d(\alpha, \mathbb{Q}) = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{r} p_j^{m_j - 1}(p_j - 1)$$

– III – Nombres constructibles

1. Une droite $\mathcal{D} = (AB)$ dans $\mathcal{D}(\Sigma)$ avec $A(a, b)$ et $B(c, d)$ distincts dans $\Sigma = \mathbb{K}^2$ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - a & c - a \\ y - b & d - b \end{vmatrix} = (d - b)\,x + (a - c)\,y - (ad - bc) = 0$ et une telle équation est à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, R)$ dans $\mathcal{C}(\Sigma)$ avec $A(a, b) \in \Sigma$ et $R^2 = BC^2 \in \mathbb{K}$ (B et C sont distincts dans Σ) a pour équation cartésienne $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ et une telle équation est à coefficients dans $\mathbb{K}$.

(a) Si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont deux droites sécantes et distinctes dans $\mathcal{D}(\Sigma)$, leur point d'intersection est solution d'un système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ du type :
$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

avec $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, il est donc donné par $(x,y) = \left(\frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\right)$ qui est dans $\mathbb{K}^2$.

(b) Les points d'intersection d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ et d'un cercle de $\mathcal{C}(\Sigma)$ (en supposant que la droite coupe le cercle) sont obtenus en résolvant un système d'équations à coefficients dans $\mathbb{K}$ du type :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y - \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y - \gamma' = 0 \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. En supposant $\beta \neq 0$, la première équation donne y comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ de 1 et x qui reporté dans la deuxième équation donne x comme solution d'une équation de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$ de discriminant $\Delta \geq 0$ dans $\mathbb{K}$ (l'équation a des solutions réelles puisque la droite coupe le cercle). Pour $\Delta = 0$, on $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ et pour $\Delta > 0$, on a $(x,y) \in \left(\mathbb{K}\left[\sqrt{\Delta}\right]\right)^2$ avec $\mathbb{K}\left[\sqrt{\Delta}\right] = \mathbb{K}$ si $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}\left[\sqrt{\Delta}\right]$ extension de degré 2 de $\mathbb{K}$ sinon.

(c) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques et sécants dans $\mathcal{C}(\Sigma)$. Les points d'intersection de ces cercles sont obtenus en résolvant un système d'équations à coefficients dans $\mathbb{K}$ du type :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y - \gamma' = 0 \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$ (les cercles ne sont pas concentriques). En faisant la différence de ces deux équations, on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y - \gamma' = 0 \\ 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + \gamma - \gamma' = 0 \end{cases}$$

la deuxième équation étant celle d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ (en supposant que $\alpha \neq \alpha'$, elle passe par les points $\left(\frac{\gamma' - \gamma}{2(\alpha - \alpha')}, 0\right)$ et $\left(\frac{\gamma' - \gamma - 2(\beta' - \beta)}{2(\alpha - \alpha')}, 1\right)$ qui sont dans Σ), ce qui nous ramène au cas précédent. Cette droite est l'axe radical des deux cercles, c'est la droite passant par les points d'intersection (figure 11.1).

2. Pour $x = 0$ c'est clair puisque $O \in \Gamma_0 \subset \Gamma$. Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $M(x,0)$. L'intersection de la droite (OM) et du cercle $\mathcal{C}(O, OM)$ est égale à $\{M, M'\}$ où $M'(-x, 0)$. Le point M' est donc constructible. Les cercles $\mathcal{C}(M, MM')$ et $\mathcal{C}(M', MM')$ se coupent en $N\left(0, \sqrt{3}\,|x|\right)$ et $N'\left(0, -\sqrt{3}\,|x|\right)$, ces deux points sont donc constructibles et le point $P(0,x)$ qui est à l'intersection de la droite (NN') et du cercle $\mathcal{C}(O, OM)$ est constructible (figure 11.2).

3. Soient A un point constructible et $\mathcal{D} = (BC)$ une droite constructible avec $(B, C) \in \Gamma^2$.

(a) Si $A \in \mathcal{D}$, la construction précédente nous montre alors que la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A est constructible. Sinon, on a :

$$\mathcal{C}(A, AB) \cap \mathcal{D} = \{B, D\}, \ \mathcal{C}(B, BD) \cap \mathcal{C}(D, BD) = \{E, F\}$$

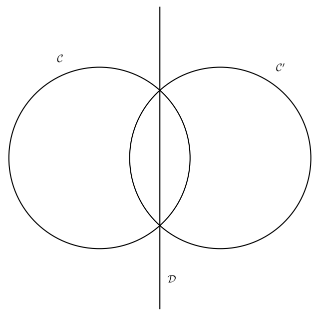

FIGURE 11.1 – Axe radical de deux cercles

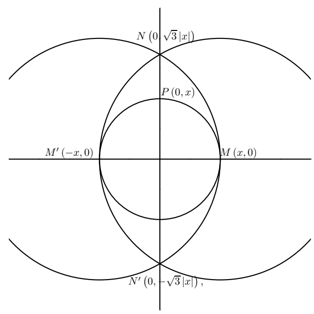

FIGURE 11.2 – Construction de $P\,(0, x)$

et la droite (AE) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passe par A (figure 11.3).

(b) On construit d'abord la perpendiculaire $\mathcal{D}'$ à D passant par A, puis la perpendiculaire à $\mathcal{D}'$ passant par A qui est parallèle à $\mathcal{D}$.

4. Il s'agit de montrer que si α et β sont deux réels constructibles avec $\beta \neq 0$, alors $-\alpha$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont aussi constructibles. Pour $-\alpha$ c'est fait en **III.2**. On suppose d'abord que $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$. En notant $A\,(\alpha, 0)$ et $B\,(\beta, 0)$, le cercle de centre B et de rayon α coupe la droite (OI) en $(\alpha+\beta, 0)$ et $(\beta-\alpha, 0)$ (l'équation de cercle est $(x-\beta)^2 + y^2 = \alpha^2$ et $y = 0$ donne $x = \beta \pm \alpha$). Il en résulte que $\alpha + \beta$ est constructible (figure 11.4). Pour $\alpha < 0$, il suffit de remarquer que $-\beta$ est constructible, donc aussi $-\alpha-\beta$ et $\alpha+\beta$. Pour le produit il nous suffit aussi de considérer le cas où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En posant $J\,(0, 1)$ et $B'\,(0, \beta)$ (ces deux points sont constructibles), la parallèle à (AJ) passant par B' (qui est constructible) coupe (OI) en C et le théorème de Thalès nous dit que $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB'}{OJ}$, ce qui donne $OC = \alpha\beta$ et prouve que $\alpha\beta$ est constructible (figure 11.5). En utilisant les point $I\,(1, 0)$, $A'\,(0, \alpha)$ et la parallèle à $(A'I)$ passant par B' qui coupe (OI) en D, le théorème de Thalès nous dit que $\dfrac{OD}{OI} = \dfrac{OB'}{OA'}$, ce

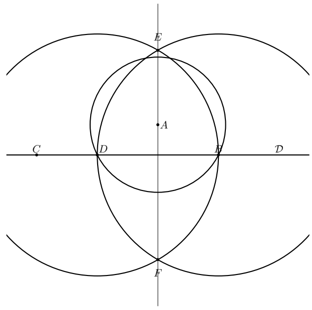

FIGURE 11.3 – Perpendiculaire à une droite passant par un point

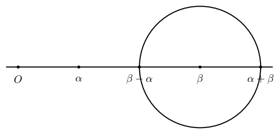

FIGURE 11.4 – Constructions de $\alpha + \beta$ et $\beta - \alpha$

qui donne $OD = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et prouve que $\dfrac{\beta}{\alpha}$ est constructible (figure 11.6). Comme $\mathbb{Q}$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$, il est contenu dans le corps $\mathbb{K}$ des nombres constructibles, ce qui signifie que tout nombre rationnel est constructible.

5. Soient $A(\alpha, 0)$ constructible avec $\alpha > 0$, $J(0,1)$, $A'(0, \alpha)$ et $J'(0,-1)$. Le milieu de $[A'J']$, $B\left(0, \dfrac{\alpha-1}{2}\right)$ est constructible ($\mathbb{K}$ est un corps) et le cercle $\mathcal{C}(B, BA')$ coupe (OI) en $C(\sqrt{\alpha}, 0)$ et $C'(-\sqrt{\alpha}, 0)$ (l'équation de ce cercle est $x^2 + \left(y - \dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^2$ et $y = 0$ donne $x = \pm\sqrt{\alpha}$). En conclusion, $\sqrt{\alpha}$ est constructible (figure 11.7).

6.

   (a) Soit x un réel constructible et $M(x, 0)$. Comme M est constructible, il existe une suite $(M_i)_{1 \leq i \leq p}$ de points constructibles telle que $M_p = M$, M_1 est construit à partir de O et I et pour tout k compris entre 2 et p, M_k est construit à partir de $O, I, M_1, \cdots, M_{k-1}$. Nous allons montrer par récurrence finie qu'il existe une suite $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous corps de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, pour tout i compris entre 1 et n, $\mathbb{K}_i$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{i-1}$ et $M_i \in \mathbb{K}_n^2$. Le point M_1 construit à partir de O et I qui sont dans

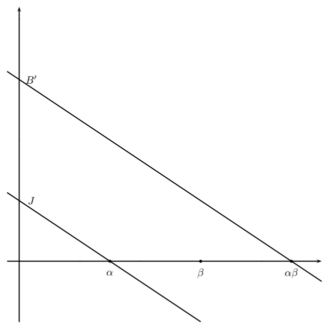

FIGURE 11.5 – Construction de $\alpha\beta$

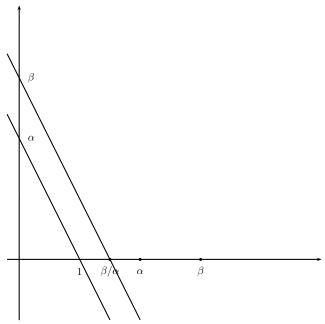

FIGURE 11.6 – Construction de β/α

$\mathbb{Q}^2$ est dans $\mathbb{Q}_1^2$ où $\mathbb{Q}_1$ est soit égal à $\mathbb{Q}$ soit à une extension quadratique de $\mathbb{Q}$ (question **III.1**). Dans le premier cas, $\{O, I, M_1\}$ est contenu dans $\mathbb{K}_0^2$ avec $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ et dans le second cas on a $\{O, I, M_1\} \subset \mathbb{K}_1^2$ où $\mathbb{K}_1$ est une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Supposons que $\{O, I, M_1, \cdots, M_{i-1}\} \subset \mathbb{K}_j^2$ avec $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q} \subset \cdots \subset \mathbb{K}_j$, où, pour tout k compris entre 1 et j, $\mathbb{K}_k$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{k-1}$. Le point M_i qui est construit à partir des points $O, I, M_1, \cdots, M_{i-1}$ a donc ses coordonnées dans $\mathbb{K}_j^2$ ou dans $\mathbb{K}_{j+1}^2$, le corps $\mathbb{K}_{j+1}$ étant une extension quadratique de $\mathbb{K}_j$. Pour $i = p$, on a construit la chaîne d'extensions quadratiques $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ et le point $M_p\,(x, 0)$ est donc dans $\mathbb{K}_n^2$ et $x \in \mathbb{K}_n$.

(b) Réciproquement supposons qu'il existe une chaîne d'extensions quadratiques $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{K}_n$. Nous allons montrer par récurrence que tous les éléments de $\mathbb{K}_n$ sont constructibles. Pour $n = 0$, on sait que tous les éléments de $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ sont constructibles. Supposons le résultat acquis jusqu'à l'ordre $n - 1 \geq 0$ et soit $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ une chaîne d'extensions quadratiques avec $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{K}_n$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{n-1}$, il s'écrit $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}\left[\sqrt{\mu}\right]$ avec $\sqrt{\mu} \in \mathbb{K}_n \setminus \mathbb{K}_{n-1}$ et

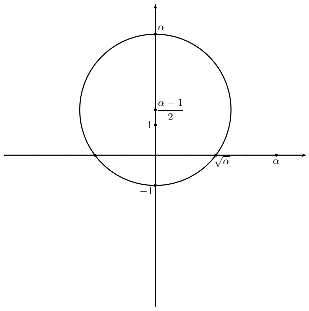

FIGURE 11.7 – Construction de $\sqrt{\alpha}$

$\mu \in \mathbb{K}_{n-1}$ (question **II.13**). L'hypothèse de récurrence nous dit que μ est constructible, donc aussi $\sqrt{\mu}$ et tout $x = P\left(\sqrt{\mu}\right)$ est dans $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}\left[\sqrt{\mu}\right]$ (l'ensemble des nombres constructibles est stable par racine carrée et c'est un corps). D'où le résultat.

7. Soient x un nombre constructible et $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$ une chaîne d'extensions quadratiques associée. Avec $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = [\mathbb{K}_n : \mathbb{K}_{n-1}]\,[\mathbb{K}_{n-1} : \mathbb{Q}]$ et un raisonnement par récurrence, on déduit que $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = 2^n$. Le réel x étant dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}_n$, on peut trouver un entier $m \geq 1$ tel que le système $(1, x, \cdots, x^m)$ soit lié sur $\mathbb{Q}$, ce qui signifie que x est algébrique. On a alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{K}_n$ avec $\mathbb{Q}[x]$ qui est un corps, ce qui entraîne que :
$$2^n = [\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = [\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}[x]]\,[\mathbb{Q}[x] : \mathbb{Q}]$$
et $d(x, \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}[x] : \mathbb{Q}]$ est une puissance de 2. À partir de la transcendance de π, on déduit que $\sqrt{\pi}$ n'est pas constructible, ce qui prouve qu'il n'est pas possible de construire à la règle et au compas le coté d'un carré dont l'aire est égale à celle du disque unité (quadrature du cercle).

8. On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, le corps $\mathbb{A}$ des nombres algébriques étant dénombrable (question **II.1**), ce qui implique que $\mathbb{K}$ est dénombrable. On sait déjà que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée (il contient automatiquement $\mathbb{Q}$). Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée. On veut montrer que $\mathbb{L}$ contient $\mathbb{K}$. On va raisonner par récurrence sur les entiers n tels que $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$ soit une chaîne d'extensions quadratiques associé à un élément x de $\mathbb{K}$. Pour $n = 0$, le résultat découle de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{L}$. Supposons le résultat acquis au rang $n-1$ et soit $(\mathbb{K}_i)_{0\leq i\leq n}$ une chaîne d'extensions quadratiques associé à $x \in \mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence tous les $\mathbb{K}_i$, pour i compris entre 0 et $n-1$ sont inclus dans $\mathbb{L}$. Comme $\mathbb{K}_n$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{n-1}$, il s'écrit $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}\left[\sqrt{\mu}\right]$ avec $\mu \in \mathbb{K}_{n-1} \subset \mathbb{L}$ (question **II.13**).. Le corps $\mathbb{L}$ étant stable par racine carrée, on a $\sqrt{\mu} \in \mathbb{L}$ et $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}\left[\sqrt{\mu}\right] \subset \mathbb{L}$.

9. Si $n = 2^m$, le réel $\sqrt[n]{p} = \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{p}}}$ est constructible puisque l'entier p l'est (qu'il soit premier ou non). Pour p premier, le polynôme $X^n - p$ annule $\sqrt[n]{p}$ et est

irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, c'est donc le polynôme minimal de $\sqrt[n]{p}$. Le degré de $\sqrt[n]{p}$ est donc égal à n et ce nombre n'est pas constructible si n n'est pas une puissance de 2 (question **II.7**). En définitive, pour p premier, $\sqrt[n]{p}$ est constructible si, et seulement si, n est une puissance de 2. Par exemple $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible, ce qui prouve qu'il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un cube de volume égal à deux fois le volume du cube unité (duplication du cube).

10. Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta)\cos^{n-2k}(\theta) \\ &= \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \left(1-\cos^2(\theta)\right)^k \cos^{n-2k}(\theta)\end{aligned}$$

ce qui permet de déduire que $\cos(n\theta)$ est constructible puisque l'ensemble $\mathbb{K}$ des nombres constructibles est un corps. Pour $n = 0$, le résultat est évident et pour $n < 0$ on utilise la parité de la fonction cos. Avec $\sin(n\theta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(n\theta)}$ et le fait que $\mathbb{K}$ est un corps stable par racine carrée, on déduit que $\sin(n\theta)$ est constructible.

11.

(a) Pour $m = 0$, $\mathcal{P}_1 = \{I\}$ est constructible et pour $m = 1$, $\mathcal{P}_2 = \{O, I\}$ est également constructible. Supposons le résultat acquis pour $m \geq 1$. Avec :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{2^m}\right) = \cos\left(2\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{2^m}\right) - 1$$

et $\cos\left(\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) > 0$, on déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{2^m}\right)\right)}$ est constructible.

(b) Supposons que $n = qm$. Avec $\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) = \cos\left(q\frac{2\pi}{n}\right)$ et le résultat de la question **III.10**, on déduit que $\mathcal{P}_m$ est constructible si $\mathcal{P}_n$ l'est.

(c) Si $\mathcal{P}_{nm}$ est constructible il en est alors de même de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ d'après la question précédente (que n et m soient premiers entre eux ou pas). Si $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ sont constructibles avec n et m premiers entre eux, en utilisant la relation de Bézout, $1 = un + vm$, on déduit que :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{nm}\right) &= \cos\left(u\frac{2\pi}{m} + v\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \cos\left(u\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(v\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(u\frac{2\pi}{m}\right)\sin\left(v\frac{2\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

et il en résulte que $\cos\left(\frac{2\pi}{nm}\right)$ est constructible, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{nm}$ est constructible.

(d) Si $\mathcal{P}_{p^m}$ est constructible il en est alors de même de $\mathcal{P}_{p^2}$ (on a $m \geq 2$) et le réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{p^2}\right)$ est constructible, donc algébrique de degré 2^r avec $r \geq 0$. Mais on a vu que $d(\alpha, \mathbb{Q}) = \frac{\varphi(p^2)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$, ce qui entraîne que $p(p-1) = 2^{r+1}$ avec p impair, ce qui est impossible.

(e) Si le polygone $\mathcal{P}_p$ est constructible, le réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ est alors constructible et on a $d(\alpha, \mathbb{Q}) = \frac{\varphi(p)}{2} = \frac{p-1}{2} = 2^r$, ce qui entraîne $p = 2^s + 1$ avec $s \geq 1$. Supposons que $s = ab$ avec $a \geq 3$ impair. On a alors $p = \left(2^b\right)^a + 1 = \left(2^b + 1\right)\sum_{k=0}^{a-1}(-1)^k\left(2^b\right)^k$, c'est-à-dire que p est divisible par $2^b + 1 \geq 2$. Mais p est premier, donc $p = 2^b + 1$, soit $2^{ab} = 2^b$ et $b = 0$, ce qui donne $p = 2$ incompatible avec $p \geq 3$. On a donc ainsi montré que 2 est le seul facteur premier de s, c'est-à-dire que $s = 2^k$ et $p = 2^{2^k} + 1$ est un nombre de Fermat.

(f) Si $n = 2^m$ avec $m \geq 2$, on a vu que $\mathcal{P}_n$ est constructible. Sinon la décomposition en facteurs premiers de n est de la forme $n = 2^m p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ avec $m \geq 0$, les $m_j \geq 1$ et les p_j premiers impairs distincts. Chaque $\mathcal{P}_{p_j^{m_j}}$ étant nécessairement constructibles, on a $m_j = 1$ pour tout j et chaque $\mathcal{P}_{p_j}$ étant constructible, le nombre premier p_j est un nombre de Fermat. La réciproque de ce résultat est vraie (théorème de Gauss) et peut être montrée en utilisant la théorie de Galois. Par exemple, $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est constructible de degré 4. Le polynôme minimal de $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est $\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. En posant $Y = X + \frac{1}{X}$, on a :

$$\Phi_5(X) = X^2\left(X^2 + X + 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}\right) = X^2\left(Y^2 + Y + 1\right)$$

et de $\Phi_5(\omega) = 0$, on déduit que α est racine du polynôme $X^2 + \frac{X}{2} - \frac{1}{4}$. Ce polynôme est donc le polynôme minimal de α et $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (c'est la racine positive).

Chapitre 12

Algèbre linéaire et bilinéaire

Exo Sup 12.1. Formule d'inversion de Pascal

1. *Soient $n < m$ deux entiers naturels. Montrer que :*

$$\sum_{k=n}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k}\binom{k}{n} = 0$$

2. *Exploitant la question précédente, montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques telles que $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (formule d'inversion de Pascal).*

3. *En exploitant la question précédente, donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de l'inverse de la matrice de Pascal :*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Solution.

1. Pour $n \leq k \leq m$, on a $\binom{m}{k}\binom{k}{n} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\frac{k!}{n!\,(k-n)!} = \frac{m!}{n!}\frac{1}{(m-k)!\,(k-n)!}$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\binom{k}{n} &= \frac{m!}{n!}\sum_{k=n}^{m}(-1)^{m-k}\frac{1}{(m-k)!\,(k-n)!} \\
&= \frac{m!}{n!}\sum_{j=0}^{m-n}(-1)^{m-n-j}\frac{1}{(m-n-j)!j!} \\
&= (-1)^{m-n}\frac{m!}{n!\,(m-n)!}\sum_{j=0}^{m-n}(-1)^{j}\frac{(m-n)!}{(m-n-j)!j!} \\
&= (-1)^{m-n}\binom{m}{n}\sum_{j=0}^{m-n}\binom{m-n}{j}(-1)^{j} \\
&= (-1)^{m-n}\binom{m}{n}(1-1)^{m-n} = 0
\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}g_j$$
$$= \sum_{0\leq j\leq k\leq n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}g_j = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}\right)g_j = g_n$$

3. On a $\det(P_{n+1}) = 1$, donc P_{n+1} est inversible. Calculer son inverse revient à résoudre le système linéaire $P_{n+1}G = F$, où $F = (f_k)_{0\leq k\leq n}$ est donné dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $G = (g_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ est l'inconnue. Ce système s'écrit $f_k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}g_j$ pour $0 \leq k \leq n$ et implique que $g_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f_j$ pour tout k compris entre 0 et n, ce qui se traduit par :

$$P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^n\binom{n}{0} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & (-1)\binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Exo Sup 12.2. Polynôme minimal

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif, $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u.
En notant E^* l'espace dual de E, le transposée de $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'endomorphisme ${}^t u$ de E^* défini par ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$ pour tout $\varphi \in E^*$.
u désigne un endomorphisme de u et $I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$.

1. *Montrer que l'ensemble I_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ (idéal annulateur de u). Dans le cas où I_u n'est pas réduit à $\{0\}$, le générateur unitaire de cet idéal est appelé polynôme minimal de u et on le note π_u (l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal). Ce polynôme minimal est de degré $p_u \geq 1$.*
2. *Montrer que u et ${}^t u$ ont même idéal annulateur (et en conséquence, même polynôme minimal quand $I_u \neq \{0\}$).*
3. *Montrer qu'en dimension finie, l'idéal I_u n'est pas réduit à $\{0\}$. Donner des exemples de situations où $I_u = \{0\}$.*
4. *On suppose que $I_u \neq \{0\}$.*
   (a) *Montrer que les valeurs propres de u sont des racines de π_u.*
   (b) *Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est un espace vectoriel de dimension p_u isomorphe à l'espace quotient $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi_u)}$, où (π_u) est l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par π_u.*
   (c) *Montrer que $u \in GL(E)$ si, et seulement si, $\pi_u(0) \neq 0$. Donner dans ce cas une expression de l'inverse u^{-1} et de son polynôme minimal.*
   (d) *Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ est premier avec π_u, alors $P(u)$ a même polynôme minimal que u.*
5. *On suppose que $u \in GL(E)$. Montrer que $I_u \neq \{0\}$ (i.e. u admet un polynôme minimal) si, et seulement si, $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.*

Solution.

1. I_u étant le noyau du morphisme d'anneaux $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$, c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
2. Pour tout entier naturel k, on a $({}^t u)^k = {}^t u^k$ et pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P({}^t u) = {}^t(P(u))$, donc $P({}^t u) = 0$ si, et seulement si, $P(u) = 0$ et en conséquence, $I_{{}^t u} = I_u$.
3.
   (a) Pour E de dimension $n \geq 1$, l'espace $\mathcal{L}(E)$ qui est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2, donc pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ la famille $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq n^2}$ est liée, ce qui revient à dire qu'il existe un polynôme non nul P tel $P(u) = 0$ et en conséquence $I_u \neq \{0\}$. On peut aussi dire que le polynôme caractéristique de u (qui est non nul) est dans I_u d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

(b) On vérifie que l'idéal annulateur I_D de l'endomorphisme D de dérivation qui associe à toute fonction $f \in E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sa dérivée f' est réduit à $\{0\}$. En effet, dans le cas contraire, en désignant par $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme annulateur non nul de D et, pour tout réel λ, par $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$, on a alors $0 = P(D)(f_\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k(f_\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right) f_\lambda = P(\lambda) f_\lambda$ et $P(\lambda) = 0$. Ce polynôme non nul P a donc une infinité de racines, ce qui n'est pas possible. On a donc $I_D = \{0\}$.
On peut aussi considérer l'isomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ défini par $u(X^n) = (n+1) X^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. S'il admet un polynôme annulateur P non nul, des égalités $0 = P(u)(X^n) = P(n+1) X^n$, on déduit que P a une infinité de racines, ce qui n'est pas possible.
De manière plus générale, pour E de dimension infinie dénombrable de base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'isomorphisme u de E défini par $u(e_n) = (n+1) e_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ a un idéal annulateur réduit à $\{0\}$.

4. Pour $I_u \neq \{0\}$, on désigne par π_u le polynôme minimal de u.

(a) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, de l'égalité $0 = \pi_u(u)(x) = \pi_u(\lambda) x$, on déduit que $\pi_u(\lambda) = 0$, c'est-à-dire que λ est racine de π_u. Réciproquement si $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine de π_u, on a alors $\pi_u(X) = (X - \lambda) Q(X)$ avec $Q(u) \neq 0$ (caractère minimal de π_u) et pour tout $x \in E$, on a $(u - \lambda Id)(Q(u)(x)) = \pi_u(u)(x) = 0$, ce qui nous dit que λ est une valeur propre de u en prenant x tel que $Q(u)(x) \neq 0$.
Ce résultat nous permet de construire des endomorphismes sans polynôme minimal en dimension infinie. Il suffit de prendre comme à la question précédente, u ayant une infinité de valeurs propres (endomorphisme de dérivation, u tel que $u(e_n) = \lambda_n e_n$, ...).

(b) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a la division euclidienne $P = \pi_u Q + R$ avec $R = \sum_{k=0}^{p_u - 1} \alpha_k X^k$ et compte tenu de l'égalité $\pi_u(u) = 0$, on a $P(u) = R(u) = \sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k u^k \in \mathbb{K}_{p_u-1}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}_{p_u-1}[X]\}$. On a donc l'égalité $\mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{p_u-1}[u]$ et la famille $\left(u^k\right)_{0\leq k\leq p_u-1}$ engendre $\mathbb{K}[u]$. Si $\sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k u^k = 0$, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{p_u-1} \alpha_k X^k$ est alors multiple de π_u et en conséquence nul puisque $\deg(\pi_u) = p_u$. La famille $\left(u^k\right)_{0\leq k\leq p_u-1}$ est donc libre et c'est une base de $\mathbb{K}[u]$. Il en résulte que $\dim(\mathbb{K}[u]) = p_u$. Le morphisme d'algèbres $\varphi : P \mapsto P(u)$ qui est surjectif de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}[u]$ de noyau (π_u) induit alors un isomorphisme d'algèbres de $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi_u)}$ sur $\mathbb{K}[u]$ (c'est l'application $\overline{\varphi} : \overline{P} \mapsto P(u)$).

(c) Si $u \in GL(E)$, on a alors $\ker(u) = \{0\}$ et 0 n'est pas valeur propre de u, ce qui équivaut à dire que $\pi_u(0) \neq 0$. Réciproquement si $\pi_u(0) \neq 0$, on a alors $\pi_u(u) = \sum_{k=0}^{p_u} a_k u^k = 0$ avec $p_u \geq 1$ et $a_0 \neq 0$, donc $u \circ \sum_{k=1}^{p_u} a_k u^{k-1} = -a_0 Id$ et u est inversible d'inverse $u^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{p_u} a_k u^{k-1} \in \mathbb{K}[u]$. De l'égalité $\pi_u(u) = u^p + \sum_{k=0}^{p_u-1} a_k u^k = 0$, on déduit, en multipliant par $(u^{-1})^{p_u}$ que l'on a $Id + \sum_{k=0}^{p_u-1} a_k (u^{-1})^{p-k} = 0$, donc le polynôme $Q(X) = 1 + \sum_{k=0}^{p_u-1} a_k X^{p-k}$ annule u^{-1}, ce polynôme étant de degré p_u puisque $a_0 \neq 0$. Le polynôme $\pi_{u^{-1}}$ divisant Q, il est de degré au plus p_u. Si $\pi_{u^{-1}}$ est de degré $1 \leq q < p_u$, on a alors une relation du type $(u^{-1})^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k (u^{-1})^k = 0$ et multipliant par u^q, cela donne $Id + \sum_{k=0}^{q-1} b_k u^{q-k} = 0$ qui contredit le fait que $\deg(\pi_u) = p_u$. Le polynôme $\pi_{u^{-1}}$ est donc de degré p_u. Comme il est unitaire divisant Q qui est de même degré, on a $\pi_{u^{-1}} = \frac{1}{a_0} Q$, soit $\pi_{u^{-1}}(X) = \frac{1}{\pi_u(0)} X^{p_u} \pi_u\left(\frac{1}{X}\right)$.

(d) En notant $v = P(u)$, on a $\pi_u(v) = (\pi_u P)(u) = \pi_u(u) \circ P(u) = 0$, donc π_v divise π_u (que P soit premier ou non avec π_u). De $0 = \pi_v(v) = (\pi_v P)(u)$, on déduit que π_u divise $\pi_v P$ et dans le cas où π_u est premier avec P, il en résulte que π_u divise π_v et $\pi_u = \pi_v$ puisque ces deux polynômes sont unitaires.

5. On a déjà vu que si $I_u \neq \{0\}$, alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$. Réciproquement, si $u^{-1} = P(u) \in \mathbb{K}[u]$, on a alors $Q(u) = u \circ P(u) - Id = 0$ avec $Q(X) = XP(X) - 1$ non nul, donc $I_u \neq \{0\}$.

Exo Sup 12.3. Diagonalisation des matrices complexes normales

On rappelle qu'une matrice complexe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $A^*A = AA^*$, où $A^* = {}^t\overline{A}$.

1. *Montrer qu'une matrice complexe normale se diagonalise dans une base orthonormée.*
2. *Montrer qu'une matrice hermitienne [resp. unitaire] se diagonalise dans une base orthonormée.*
3. *Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si et seulement si il existe un polynôme P à coefficients complexes tel que $A^* = P(A)$.*
4. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe deux matrices unitaires U, V et une matrice diagonale D à coefficients réels strictement positifs telles que $A = UDV^*$ (décomposition singulière de la matrice A).*

5. *Soient A et B deux matrices hermitiennes positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $0 \leq \operatorname{Tr}(AB) \leq \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$.*
6. *Montrer que le sous groupe $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ de $GL_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires est connexe par arcs.*

Solution. $\mathbb{C}^n$ est muni de sa structure hermitienne canonique.

1. On montre tout d'abord que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, le sous espace propre associé $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ est stable par A^* et que son orthogonal $E_\lambda^\perp$ est stable par A et par A^*, ce qui permet de raisonner par récurrence sur l'ordre n de la matrice A.
   Pour tout $x \in E_\lambda$ on a, puisque A est normale, $AA^*x = A^*Ax = \lambda A^*x$, donc $A^*x \in E_\lambda$. C'est-à-dire que E_λ est stable par A^*. Il en résulte que pour $x \in E_\lambda^\perp$ et $y \in E_\lambda$, on a $A^*y \in E_\lambda$ et $\langle Ax \mid y\rangle = \langle x \mid A^*y\rangle = 0$, c'est-à-dire que $Ax \in E_\lambda^\perp$ et $E_\lambda^\perp$ est stable par A. Puis en écrivant que :
   $$\langle A^*x \mid y\rangle = \langle x \mid Ay\rangle = \langle x \mid \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x \mid y\rangle = 0$$
   on déduit que $A^*x \in E_\lambda^\perp$ et $E_\lambda^\perp$ est stable par A^*.
   On raisonne ensuite par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel euclidien E. Pour $n = 1$ le résultat est évident. Supposons le acquis pour toute matrice normale d'ordre $p \in \{1, \cdots, n-1\}$. Soient λ une valeur propre de A et E_λ l'espace propre associé. Si $E_\lambda = E$ alors A est une homothétie et toute base orthonormée de E convient. Si $E_\lambda \neq E$, alors $E_\lambda^\perp$ est de dimension $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ et la restriction B de A à $E_\lambda^\perp$ est un endomorphisme normal de $E_\lambda^\perp$ (une matrice est identifiée à l'application linéaire qu'elle définie dans la base canonique de E). Il existe donc une base orthonormée de $E_\lambda^\perp$ formée de vecteurs propres de B, donc de A. En complétant cette base par une base orthonormée de E_λ on obtient une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de A.
2. Résulte du fait qu'une matrice hermitienne ou unitaire est normale.
3. Une matrice normale se diagonalisant dans une base orthonormée, il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telles que $D = U^*AU$. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A avec $1 \leq p \leq n$, on désigne par $P \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $P(\lambda_k) = \overline{\lambda_k}$ pour tout k compris entre 1 et p, on a $D^* = P(D) = U^*P(A)U$ et $P(A) = UD^*U^* = (UDU^*)^* = A^*$. La réciproque est évidente.
4. La matrice A^*A étant hermitienne définie positive (pour $x \in \mathbb{C}^n$ non nul on a $\langle A^*Ax \mid x\rangle = \|Ax\|_2^2 > 0$), il existe une matrice unitaire V telle que :
   $$V^*(A^*A)V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ (la matrice A est inversible). En notant $W = AV$, on a alors $W^*W = D^2$, où :

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

En notant $U = WD^{-1}$, on $U^*U = D^{-1}W^*WD^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I_n$, ce qui signifie que la matrice U est unitaire. On a donc en définitive, $U^*AV = D^{-1}W^*W = D^{-1}D^2 = D$, avec D diagonale à coefficients réels strictement positifs.

5. En désignant par $(e_1)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $a_{ij} = \langle Ae_j \mid e_i\rangle$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et dans le cas particulier où A est hermitienne positive on aboutit à $a_{ii} = \langle Ae_i \mid e_i\rangle \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

   Pour A diagonale hermitienne positive, on a :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ pour tout i. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne positive, on a $b_{ii} \geq 0$ pour tout i et :

$$0 \leq \mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$$

   Dans le cas général, on sait que, si A est hermitienne positive, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles positives et il existe une matrice unitaire U telle que :

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^* = UDU^*$$

   avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ pour tout i. En remarquant que $AB = U(DU^*BU)U^*$ est semblable à $D(U^*BU) = DC$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(DC)$. Mais D est diagonale hermitienne positive et C hermitienne positive unitairement semblable à B, donc $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(DC) \leq \mathrm{Tr}(D)\,\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.

6. Une matrice unitaire a toutes ses valeurs propres de module 1 et se diagonalise dans une base orthonormée. Pour tout $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ il existe donc une matrice

diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

et une matrice unitaire $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = UDU^*$. En posant, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = UD(t)U^*$, où :

$$D(t) = \begin{pmatrix} e^{it\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{it\theta_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{it\theta_n} \end{pmatrix}$$

on définit un chemin continu dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ qui relie I_n et A, ce qui prouve la connexité par arcs de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.

Exo Sup 12.4. Équations différentielles et valeurs propres

1. *On s'intéresse à l'équation différentielle $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$ sur $\mathbb{R}$. On désigne par φ l'endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par :*

$$\forall y \in E,\ \varphi(y) = y' + xy \tag{12.1}$$

   Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de φ et φ^2, puis en déduire les solutions de (12.1).
2. *Comment peut-on généraliser la question précédente ?*

Solution.

1. (a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $\varphi(y) = \lambda y$ équivaut à $y' + (x - \lambda)y = 0$, ce qui est encore équivalent à $y(x) = \alpha e^{-\frac{x^2}{2} + \lambda x}$. Donc tout complexe λ est valeur propre de φ avec pour espace propre associé la droite dirigée par la fonction $y_\lambda(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + \lambda x}$.

   (b) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, dire que $y \in E$ vérifie $\varphi^2(y) = \lambda y$ revient à dire que $y \in \ker(\varphi^2 - \lambda Id)$. Si $\lambda \neq 0$, il existe un nombre complexe non nul μ tel que $\lambda = \mu^2$ et le théorème des noyaux nous dit que :

$$\ker(\varphi^2 - \mu^2 Id) = \ker(\varphi - \mu Id) \oplus \ker(\varphi + \mu Id)$$

   Il en résulte que tout complexe non, nul λ est valeur propre de φ^2, l'espace propre associé étant, pour $\lambda = \mu^2$, le plan engendré par y_μ et $y_{-\mu}$.
   Pour $\lambda = 0$, $\varphi^2(y) = 0$ équivaut à $\varphi(\varphi(y)) = 0$, soit $\varphi(y) = y' + xy = \alpha y_0 = \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $y = \beta e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x \alpha e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dt = (\alpha x + \beta) e^{-\frac{x^2}{2}}$. Il en résulte que 0 est valeur propre de φ^2, l'espace propre associé étant le plan engendré par y_0 et xy_0.

(c) Avec $\varphi^2(y) = y'' + 2xy' + \left(x^2+1\right)y$, on déduit que :

$$y'' + 2xy' + \left(x^2-1\right)y = 0 \Leftrightarrow \varphi^2(y) = 2y$$

ce qui équivaut à $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\alpha e^{\sqrt{2}x} + \beta e^{-\sqrt{2}x}\right)$, où α et β sont deux constantes.

2. Dans un cadre plus général, soit a une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et φ l'endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ défini par $\varphi(y) = y' + ay$ pour tout $y \in E$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $\varphi(y) = \lambda y$ équivaut à $y' + (\lambda - a)y = 0$, qui est encore équivalent à $y(x) = \alpha e^{\lambda x - A(x)}$, où $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$. Donc tout complexe λ est valeur propre de φ avec pour espace propre associé la droite dirigée par la fonction $y_\lambda(x) = e^{\lambda x - A(x)}$. Pour $\lambda = \mu^2 \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\ker\left(\varphi^2 - \mu^2 Id\right) = \ker(\varphi - \mu Id) \oplus \ker(\varphi + \mu Id)$$

et $\varphi^2(y) = \lambda y$ équivaut à $y(x) = e^{-A(x)}\left(\alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}\right)$. Pour $\lambda = 0$, $\varphi^2(y) = 0$ équivaut à $\varphi(y) = y' + ay = \alpha y_0 = \alpha e^{-A(x)}$ et $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{-A(x)}$. Il en résulte que 0 est valeur propre de φ^2, l'espace propre associé étant le plan engendré par y_0 et xy_0. Ce qui veut dire, avec $\varphi^2(y) = y'' + 2ay' + \left(a^2 + a'\right)y$, que l'on a résolu l'équation différentielle $y'' + 2ay' + \left(a^2 + a' - \lambda\right)y = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, en se ramenant à des équations différentielles d'ordre 1.

Exo Sup 12.5. Polynômes orthogonaux vecteurs propres d'un opérateur différentiel

Soient $A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $B(X) = b_0 + b_1X$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $pa_2 + b_1 \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On leur associe l'opérateur différentiel u défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $u(P) = AP'' + BP'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et on suppose qu'il existe un intervalle ouvert $I =]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et une fonction $\pi : I \to \mathbb{R}^{+,*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\forall x \in I,\ A(x)y'(x) = (B(x) - A'(x))y(x)$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b \left|x^k\right| \pi(x)\,dx < +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} x^n A(x)\pi(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} x^n A(x)\pi(x) = 0$$

On munit alors l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \langle P \mid Q\rangle = \int_a^b P(x)Q(x)\pi(x)\,dx$$

1. *Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la restriction u_n de u à $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_k = k((k-1)a_2 + b_1)$ $(0 \leq k \leq n)$, chaque espace propre $\ker(u_n - \lambda_k Id)$, pour $0 \leq k \leq n$, étant de dimension 1 engendré par un polynôme unitaire P_k de degré k.*
2. *Montrer que l'opérateur u est symétrique pour le produit scalaire associé à la fonction π (i.e. $\langle u(P) \mid Q\rangle = \langle P \mid u(Q)\rangle$ pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[X]$) et que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}[X], \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$.*

3. *On désigne par* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie par* $\varphi_n = \pi A^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   (a) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* k *compris entre* 0 *et* $n-1$, *on a* $\varphi_n^{(k)} = \pi A^{n-k} Q_{n,k}$ *où* $Q_{n,k}$ *est un polynôme de degré* k.
   (b) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Q_{n,n} = \dfrac{1}{\pi}\varphi_n^{(n)}$ *est un polynôme de degré* n, *puis que la famille* $(Q_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base orthogonale de* $(\mathbb{R}[X], \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$.
4. *Déduire de ce qui précède qu'il existe une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels tous non nuls telle que :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \alpha_n \frac{1}{\pi}(\pi A^n)^{(n)}$$
5. *Traiter les cas* $(A(X), B(X)) = (X^2-1, 2X)$ *sur* $]-1,1[$, $(A(X), B(X)) = (X^2-1, X)$ *sur* $]-1,1[$, $(A(X), B(X)) = (X, -X+1)$ *sur* $]0,+\infty[$ *et* $(A(X), B(X)) = (1, -2X)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Solution.

1. En désignant par $(e_k)_{0\le k\le n} = (X^k)_{0\le k\le n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a pour tout entier k compris entre 0 et n :
$$\begin{cases} u_n(e_0) = 0 \in \mathbb{R}_0[X] \\ u_n(e_1) = b_0 + b_1 X \in \mathbb{R}_1[X] \\ u_n(e_k) = k(k-1)A(X)X^{k-2} + kB(X)X^{k-1} \in \mathbb{R}_k[X] \end{cases}$$
Il en résulte que la matrice de u_n dans cette base est triangulaire supérieure, chaque coefficient diagonal λ_k étant donné par le coefficient dominant de $u_n(e_k)$, soit :
$$\lambda_k = k((k-1)a_2 + b_1)\ \ (0 \le k \le n)$$
Pour $0 \le p, q \le n$, l'égalité $\lambda_p = \lambda_q$ est équivalente à :
$$(p^2 - p - q^2 + q)\,a_2 + (p-q)\,b_1 = 0$$
soit à $(p-q)((p+q-1)a_2 + b_1) = 0$. En supposant que $ka_2 + b_1 \neq 0$ pour tout entier k, cette égalité équivaut à $p = q$.
L'endomorphisme u_n a donc $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes et en conséquence est diagonalisable, chaque espace propre étant de dimension 1. Si, pour k compris entre 0 et n, P_k est un vecteur propre non nul de u_n associé à la valeur propre λ_k, c'est aussi un vecteur propre de u_k associé à λ_k (u_k est la restriction à $\mathbb{R}_k[X]$ de u_n et les espaces propres sont de dimension 1) ce qui implique que $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$. En tenant compte du fait que $(P_0, \cdots, P_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$, on déduit que P_k est nécessairement de degré k. Ce polynôme P_k pouvant être choisi unitaire.
2. Comme π est solution sur I de l'équation différentielle $Ay' = (B - A')\,y$, on en déduit que pour tout polynôme P, on a sur l'intervalle I :
$$\pi u(P) = \pi(AP'' + BP') = \pi AP'' + (A\pi' + A'\pi)P' = (\pi AP')'$$

et pour tout polynôme Q, une intégration par parties nous donne, en tenant compte des conditions $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} x^n A(x)\pi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} x^n A(x)\pi(x) = 0$:

$$\langle u(P) \mid Q\rangle = \int_a^b (\pi A P')'(x)\, Q(x)\, dx = -\int_a^b A(x)\, P'(x)\, Q'(x)\, \pi(x)\, dx$$

L'expression obtenue étant une fonction symétrique de (P, Q), on déduit que $\langle u(P) \mid Q\rangle = \langle P \mid u(Q)\rangle$.

Si n, m sont deux entiers naturels distincts, on a alors :

$$\lambda_n \langle P_n \mid P_m\rangle = \langle u(P_n) \mid P_m\rangle = \langle P_n \mid u(P_m)\rangle = \lambda_m \langle P_n \mid P_m\rangle$$

et nécessairement $\langle P_n \mid P_m\rangle = 0$.

3.

(a) Le résultat est vrai pour $k = 0$ avec $Q_{n,0} = 1$.
La fonction π étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, il en est de même de φ_n avec :

$$\varphi_n' = A^{n-1}(\pi' A + n\pi A') = A^{n-1}(\pi B - \pi A' + n\pi A') = \pi A^{n-1} Q_{n,1}$$

avec $Q_{n,1} = B + (n-1)A'$ de degré 1 (son coefficient dominant est égal à $b_1 + 2(n-1)a_2 \neq 0$), ce qui nous donne le résultat pour $k = 1$.
En supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k \leq n-1$, on a :

$$\varphi_n^{(k+1)} = \left(\pi A^{n-k} Q_{n,k}\right)' = \pi A^{n-k-1} Q_{n,k+1}$$

avec $Q_{n,k+1} = (B + (n-k-1)A')\, Q_{n,k} + A Q_{n,k}' \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$. En notant c_j le coefficient dominant de $Q_{n,j}$, celui de $Q_{n,k+1}$ est donné par :

$$c_{k+1} = (b_1 + (2n-k-2)\, a_2)\, c_k \neq 0$$

(pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $2n-k-2 \geq 0$), c'est-à-dire que $Q_{n,k+1}$ est de degré $k+1$.

(b) On sait déjà que $Q_{n,n}$ est un polynôme de degré n et $(Q_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (suite de polynômes échelonnés en degrés).
Pour montrer que la famille $(Q_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale, il nous suffit de montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle Q_{n,n} \mid P\rangle = 0$$

En utilisant la formule d'intégration par partie généralisée on a, pour tout intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans I, tout entier $n \geq 1$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\int_\alpha^\beta Q_{n,n}(x)\, P(x)\, \pi(x)\, dx = \int_\alpha^\beta \varphi_n^{(n)}(x)\, P(x)\, dx$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \varphi_n^{(n-k-1)} P^{(k)}\right]_\alpha^\beta + (-1)^n \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\, P^{(n)}(x)\, dx$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \pi A^{k+1} Q_{n,n-k-1} P^{(k)}\right]_\alpha^\beta + (-1)^n \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\, P^{(n)}(x)\, dx$$

et en faisant tendre α vers a et β vers b, on obtient compte tenu des conditions $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} x^n A(x)\pi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} x^n A(x)\pi(x) = 0$:

$$\langle Q_{n,n} \mid P\rangle = (-1)^n \int_a^b \varphi_n(x) P^{(n)}(x)\,dx$$

Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P^{(n)} = 0$ et $\langle Q_{n,n} \mid P\rangle = 0$.

4. Les familles de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ étant orthogonales avec $\deg(P_n) = \deg(Q_{n,n}) = n$, on peut écrire $Q_{n,n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ et $\lambda_k = \langle Q_{n,n} \mid P_k\rangle = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$, donc et $Q_{n,n} = \lambda_n P_n$ avec $\lambda_n \neq 0$.

5.

(a) Pour $A(X) = X^2 - 1$ et $B(X) = 2X$, l'opérateur différentiel associé est défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = \left(X^2-1\right)P'' + 2XP'$$

et ses valeurs propres sont données par $\lambda_n = n(n+1)$, où $n \in \mathbb{N}$ (ce qui résulte de $u(1) = 0$, $u(X) = 2X$ et $u(X^n) = n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}$ pour $n \geq 2$). La fonction poids correspondante est solution de $\left(x^2-1\right)y' = 0$. Sur l'intervalle $I =]-1,1[$, π est une fonction constante réelle C non nulle. Pour $C = 1$, on retrouve les polynômes de Legendre. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = \alpha_n \left(\left(1-x^2\right)^n\right)^{(n)}$ est la solution polynomiale unitaire de l'équation différentielle $\left(x^2-1\right)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$.

(b) Pour $A(X) = X^2 - 1$ et $B(x) = X$, l'opérateur différentiel associé est défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = \left(X^2-1\right)P'' + XP'$$

et ses valeurs propres sont données par $\lambda_n = n^2$, où $n \in \mathbb{N}$. La fonction poids correspondante est solution de $\left(x^2-1\right)y' = -xy$. Si on se place sur $I =]-1,1[$, on obtient $\pi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$, où C est une constante réelle non nulle. Pour $C = 1$, on retrouve les polynômes de Tchebychev de première espèce. Pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = \alpha_n\sqrt{1-x^2}\left(\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)^{(n)}$ est la solution polynomiale unitaire de l'équation différentielle $\left(x^2-1\right)y'' + xy' - n^2 y = 0$.

(c) Pour $A(x) = X$ et $B(x) = -X + 1$, l'opérateur différentiel associé est défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = XP'' + (1-X)P'$$

et ses valeurs propres sont données par $\lambda_n = -n$, où $n \in \mathbb{N}$. La fonction poids correspondante est solution de $xy' = -xy$. Si on se place sur $I =]0,+\infty[$, on obtient $\pi(x) = Ce^{-x}$, où C est une constante réelle non nulle. En prenant $C = 1$, on retrouve les polynômes de Laguerre. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = \alpha_n e^x \left(x^n e^{-x}\right)^{(n)}$ est la solution polynomiale unitaire de l'équation différentielle $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$.

(d) Pour $A(X) = 1$ et $B(X) = -2X$, l'opérateur différentiel associé est alors défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \mathcal{L}(P) = P'' - 2XP'$$

et ses valeurs propres sont données par $\lambda_n = -2n$, où $n \in \mathbb{N}$. La fonction poids correspondante est solution de $y' = -2xy$. Si on se place sur $I = \mathbb{R}$, on obtient $\pi(x) = Ce^{-x^2}$, où C est une constante réelle non nulle. En prenant $C = 1$, on retrouve les polynômes d'Hermite. Pour $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n = \alpha_n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$ est la solution polynomiale unitaire de l'équation différentielle $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

Exo Sup 12.6. Matrices diagonalisable sur un corps fini

Soient $p \geq 2$ un nombre premier et $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$. On se propose de montrer que deux matrices A et B qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$ commutent si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_p$, la matrice $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$.
Il est classique de vérifier, pour tout corps commutatif $\mathbb{K}$, que si A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et sont diagonalisables, alors $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. *Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$ est diagonalisable si, et seulement si, $A^p = A$.*
2. *Soient A, B deux matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$. Montrer que A et B commutent si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_2$, la matrice $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$.*
3. *On prend $p \geq 3$ et on se donne A, B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_3)$ telles que $A + \lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_3$.*
   (a) *Montrer que l'on peut se ramener au cas où B est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_3)$ avec au moins une valeur propre nulle.*
   (b) *On suppose que $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$ et on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_3)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_3$, on note P_λ le polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ et $\Delta(\lambda)$ le discriminant de P_λ.*
   (c) *Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_3$, $\Delta(\lambda)$ est un carré dans $\mathbb{F}_3$.*
   (d) *Montrer que l'application $\lambda \mapsto \Delta(\lambda)$ est une bijectiion de l'ensemble $E = \left\{\dfrac{a-d}{\beta} + \overline{k} \mid 0 \leq k \leq \dfrac{p-1}{2}\right\}$ sur l'ensemble C_3 des carrés de $\mathbb{F}_3$.*
   (e) *Montrer que A et B commutent.*

Solution.

1. Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$, il existe alors une matrice inversible P dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. En utilisant le théorème

de Fermat pour p premier, qui nous dit que $x^p = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p$, on déduit que $D^p = D$ et $A^p = PD^pP^{-1} = PDP^{-1} = A$. Réciproquement si on a $A^p = A$, la matrice A est alors annulée par le polynôme $X^p - X = \prod_{k=0}^{p-1} \left(X - \overline{k}\right)$ (encore le théorème de Fermat) qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{F}_p$ et il en résulte que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$.

2. Soient, A, B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ telles que $A+\lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_2$. La matrice $A + B$ étant diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$, on a $(A+B)^2 = A+B$, ce qui équivaut à $A^2 + AB + BA + B^2 = A + B$, ou encore, puisque $A^2 = A$ et $B^2 = B$, à $AB = -BA = BA$ $(-1 = 1$ dans $\mathbb{F}_2)$.

3.

(a) En notant α, β les valeurs propres dans $\mathbb{F}_p$ de la matrice diagonalisable B, la matrice $B' = B - \alpha I_2$ est diagonalisable de valeurs propres 0 et $\beta' = \beta - \alpha$. On a alors $AB' - B'A = AB - BA$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, la matrice $A + \lambda B' = A + \lambda B - \alpha\lambda I_2$ est diagonalisable si, et seulement si, $A + \lambda B$ l'est. En remplaçant B par B', on se ramène ainsi au cas où B a au moins une valeur propre nulle.
En désignant par P une matrice inversible telle que $P^{-1}B'P = D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$ et en notant $A' = P^{-1}AP$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_p$, la matrice $A' + \lambda D' = P^{-1}(A + \lambda B')P$ est diagonalisable comme $A + \lambda B'$ et avec :

$$A'D' - D'A' = P^{-1}(AB' - B'A)P = P^{-1}(AB - BA)P$$

on déduit que $(A'D' = D'A') \Leftrightarrow (AB = BA)$. On s'est ainsi ramené au cas où B est diagonale avec au moins une valeur propre nulle.

(b) Le polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ est :

$$\begin{aligned} P_\lambda(X) &= X^2 - \operatorname{Tr}(A+\lambda B)X + \det(A+\lambda B) \\ &= X^2 - (\operatorname{Tr}(A) + \lambda\beta)X + \det(A) + a\beta\lambda \\ &= \left(X - \frac{\operatorname{Tr}(A) + \lambda\beta}{2}\right)^2 - \frac{\Delta(\lambda)}{4} \end{aligned}$$

($\mathbb{F}_p$ est de caractéristique différente de 2, donc $4 = 2^2 \neq 0$) où :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \left((\operatorname{Tr}(A) + \lambda\beta)^2 - 4(\det(A) + a\beta\lambda)\right) \\ &= \beta^2\lambda^2 + 2(\operatorname{Tr}(A) - 2a)\beta\lambda + (\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A) \\ &= (\beta\lambda + \operatorname{Tr}(A) - 2a)^2 + (\operatorname{Tr}(A))^2 - 4\det(A) - (\operatorname{Tr}(A) - 2a)^2 \\ &= (\beta\lambda + d - a)^2 + 4bc \end{aligned}$$

est un polynôme de degré 2 en λ puisque $\beta \neq 0$. Comme $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_p$, le polynôme P_λ a deux racines dans $\mathbb{F}_p$ et $\Delta(\lambda)$ est un carré.

(c) On vient de voir que l'application $\lambda \mapsto \Delta(\lambda)$ est à valeurs dans l'ensemble C_p des carrés de $\mathbb{F}_p$. On vérifie que la restriction de Δ à l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{a-d}{\beta} + \overline{k} \mid 0 \leq k \leq \frac{p-1}{2} \right\}$$

est injective. En effet, l'égalité $\Delta\left(\frac{a-d}{\beta} + \overline{k_1}\right) = \Delta\left(\frac{a-d}{\beta} + \overline{k_2}\right)$ avec k_1, k_2 compris entre 0 et $\frac{p-1}{2}$ équivaut à $\overline{k_1}^2 = \overline{k_2}^2$ qui donne $\overline{k_1} = \overline{k_2}$ ou $\overline{k_1} = -\overline{k_2}$, mais cette dernière égalité signifie que p divise $k_1 + k_2$ qui est compris entre 0 et $p-1$, ce qui n'est possible que pour $k_1 + k_2 = 0$, soit pour $k_1 = k_2 = 0$. Avec $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(C_p) = \frac{p+1}{2}$, on déduit que Δ est bijective de E sur $\mathbb{F}_p$.

(d) Comme Δ est bijective de E sur $\mathbb{F}_p$, il existe $\lambda_0 \in E \subset \mathbb{F}_p$ tel que $\Delta(\lambda_0) = 0$. La matrice $A + \lambda_0 B$ a donc une valeur propre double et comme elle est diagonalisable, elle est nécessairement scalaire. On a donc $A + \lambda_0 B = \mu I_2$ et $A = \mu I_2 - \lambda_0 B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu - \lambda_0 \beta \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale qui commute à B.

Chapitre 13

Géométrie

Rien de neuf pour l'instant.