Errata : Exercices et problèmes corrigés pour l'Agrégation de Mathématiques
De Boeck Supérieur. Mai 2018

1. **Pages 227 à 229. Exercice 7.1.** :
Exercice 7.1. On s'intéresse ici à diverses équations fonctionnelles portant sur une fonction f continue. En introduisant une primitive judicieusement choisie, on vérifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis par dérivation par rapport à une variable de l'équation fonctionnelle on se ramène à une équation différentielle.
Utiliser le procédé suggéré en introduction pour résoudre les équations fonctionnelles qui suivent où f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^{+,*}$ et à valeurs réelles :
1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$;
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) f(y)$;
4. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2,\ f(xy) = f(x) f(y)$;
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y)$.
Solution. On désigne par $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ [resp. $G : x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$] la primitive de f nulle en 0 [resp. en 1].
1. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\int_y^{x+y} f(z)\,dz = \int_0^x f(t+y)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + xf(y)$$

soit $F(x+y) - F(y) = F(x) + xf(y)$, ce qui nous donne pour $x = 1$:

$$F(y+1) - F(y) = F(1) + f(y)$$

Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 0$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$f'(x+y) = f'(y) \text{ et } f'(x) = f'(0) = \alpha$$

donc $f(x) = \alpha x + \beta$ avec $\beta = f(0) = 0$ (déduit de $f(0) = 2f(0)$).
2. Pour $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé, on a par intégration, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\int_y^{xy} f(z)\,dz = y\int_1^x f(ty)\,dt = y\left(\int_1^x f(t)\,dt + (x-1) f(y)\right)$$

soit $G(xy) - G(y) = y(G(x) + (x-1) f(y))$, ce qui nous donne pour $x = 2$:

$$G(2y) - G(y) = y(G(2) + f(y))$$

Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 1$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$xf'(xy) = f'(y) \text{ et } xf'(x) = f'(1) = \alpha$$

donc $f(x) = \alpha \ln(x) + \beta$ avec $\beta = f(1) = 0$ (déduit de $f(1) = 2f(1)$).
3. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\int_y^{x+y} f(z)\,dz = \int_0^x f(t+y)\,dt = f(y)\int_0^x f(t)\,dt$$

soit $F(x+y) - F(y) = f(y) F(x)$. Si $F = 0$, on a alors $f = F' = 0$.
Si $F \neq 0$, il existe alors x_0 tel que $F(x_0) \neq 0$ et de $f(y) = \dfrac{F(x_0+y) - F(y)}{F(x_0)}$, on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 0$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$f'(x+y) = f(x) f'(y) \text{ et } f'(x) = f'(0) f(x) = \alpha f(x)$$

donc $f(x) = e^{\alpha x}$.
4. Pour $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\int_y^{xy} f(z)\, dz = y \int_1^x f(ty)\, dt = y f(y) \int_1^x f(t)\, dt$$

soit $G(xy) - G(y) = y f(y) G(x)$. Si $G = 0$, on a alors $f = G' = 0$. Si $G \neq 0$, il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $G(x_0) \neq 0$ et de $f(y) = \dfrac{G(x_0 y) - G(y)}{y G(x_0)}$, on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 1$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$x f'(xy) = f(x) f'(y) \text{ et } x f'(x) = f'(1) f(x) = \alpha f(x)$$

donc $f(x) = \beta x^\alpha$ avec $\beta = f(1) = 1$ (déduit de $f(1) = (f(1))^2$ avec $f(1) \neq 0$ pour f non nulle).
5. On cherche une solution non nulle f. L'équation fonctionnelle appliquée au couple $(x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$ donne $f(x) = f(x) f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $f(0) = 1$ puisque f n'est pas identiquement nulle. Cette équation appliquée au couple $(0, y)$ pour $y \in \mathbb{R}$ donne $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, soit $f(-y) = f(y)$, la fonction f est donc paire. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \int_y^{x+y} f(z)\, dz + \int_{-y}^{x-y} f(z)\, dz &= \int_0^x f(t+y)\, dt + \int_0^x f(t-y)\, dt \\ &= 2f(y) \int_0^x f(t)\, dt \end{aligned}$$

soit $F(x+y) - F(y) + F(x-y) - F(-y) = 2f(y) F(x)$. Si $F = 0$, on a alors $f = F' = 0$. Si $F \neq 0$, il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F(x_0) \neq 0$ et on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Puis avec :

$$\begin{aligned} 2f'(y) F(x_0) &= F'(x_0+y) - F'(y) - F'(x_0-y) + F'(-y) \\ &= f(x_0+y) - f(y) - f(x_0-y) + f(-y) = f(x_0+y) - f(x_0-y) \end{aligned}$$

on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Dérivant deux fois l'équation fonctionnelle par rapport à x, pour y fixé, on a $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x) f(y)$ et pour $x = 0$, en tenant compte de la parité de f, on a $f''(y) = f''(0) f(y)$ avec $f(0) = 1$. D'autre part, en dérivant par rapport à y et en faisant $y = 0$, on obtient $2f(x) f'(0) = 0$ pour tout réel x, ce qui entraîne $f'(0) = 0$ puisque f n'est pas la fonction nulle. En définitive, f est solution de $f'' = f''(0) f$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, ce qui équivaut à $f(x) = \cos(\lambda x)$ pour $f''(0) = -\lambda^2 \leq 0$ ou $f(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$ pour $f''(0) = \lambda^2 \geq 0$.

2. **Page 311.** Solution de **2.** la fin :
Remplacer « $V_n(x) = \dfrac{\mathbb{V}(B_{n,x})}{n^2} = \dfrac{x(1-x)}{n^2}$ et $\|V_n\|_\infty = \dfrac{1}{4n^2}$, » par « $V_n(x) = \dfrac{\mathbb{V}(B_{n,x})}{n^2} = \dfrac{x(1-x)}{n}$ et $\|V_n\|_\infty = \dfrac{1}{4n}$, »

3. **Page 411.** Solution de **1.** Il manque le corrigé de **1.c.** :
1. (*c*) On a $\det(C) = (-1)^n P_u(0) = (-1)^{n+1} a_0$, donc C est inversible si, et seulement si, $a_0 = P(0) \neq 0$. Dans ce cas, de l'égalité $P(C) = 0$ (équivalente à $P(u) = 0$), on déduit que :
$$C^{-1} = \frac{1}{a_0}\left(C^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k C^{k-1}\right)$$
donc $u^{-1}(e_1) = \dfrac{1}{a_0}\left(e_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k\right)$ et $u^{-1}(e_k) = u^{-1}(u(e_{k-1})) = e_{k-1}$ pour k compris entre 2 et p, ce qui nous donne :
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & 1 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \frac{1}{a_0} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
Dans la base $(f_1, \cdots, f_n) = (e_n, e_{n-1}, \cdots, e_2, e_1)$, la matrice de u^{-1} est :
$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_0} \\ 1 & \ddots & \vdots & -\frac{a_{n-1}}{a_0} \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$$
soit la matrice compagnon du polynôme $Q(X) = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, où $\alpha_0 = \dfrac{1}{a_0}$ et $\alpha_k = -\dfrac{a_{n-k}}{a_0}$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On a donc :
$$\pi_{C^{-1}}(X) = P_{C^{-1}}(X) = -\frac{1}{a_0} X^n \left(\frac{1}{X^n} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{1}{X^j}\right) = -\frac{1}{a_0} X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

4. **Page 431.** Solution de **I.1.b.**
Remplacer « non nulle pour $GL_n(\mathbb{C})$ puisque » par « non nulle pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$ puisque ».

5. **Page 432.** Solution de **II.1.** incomplète.
Rajouter « Dans le cas général, on peut écrire que $A = \lim\limits_{k\to+\infty} A_k$ où $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles. Les matrices $A_k B$ et BA_k ont donc même polynôme caractéristique et compte tenu de la continuité du produit matriciel et du déterminant, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:
$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - AB) &= \lim_{k\to+\infty} \det(\lambda I_n - A_k B) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \det(\lambda I_n - BA_k) = \det(\lambda I_n - BA) \end{aligned}$$
ce qui signifie que AB et BA ont même polynôme caractéristique (sur $\mathbb{C}$, on peut identifier polynôme formel et fonction polynomiale). »

6. **Page 433.** La solution de **II.4.** n'est pas correcte. La remplacer par :
   II. 4. La matrice $C\overline{C}$ est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres simples. Les valeurs propres réelles (s'il y en a) sont positives et pour toute valeur propre λ complexe non réelle (s'il y en a), le conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre car $\chi_{C\overline{C}}$ est à coefficients réels, donc :

$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\left(C\overline{C}\right)\cap\mathbb{R}}^{n} (1+\lambda) \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\left(C\overline{C}\right)\cap(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})}^{n} |1+\lambda|^2 \in \mathbb{R}^{+,*}$$

7. **Page 434.** Solution de **II.4.**
   Remplacer « $PU + QV = 1$ » par « $PU + P'V = 1$ » et « $\mathrm{Discr}\,(P) = 0$. par « $\mathrm{Discr}\,(P) \neq 0$. »

8. **Page 437.** Solution de **V.3.d.**
   Remplacer « ce qui pose $\lambda = \mu = 0$ » par « ce qui impose $\lambda = \mu = 0$ »