Oral 2 agrégation interne. Exercices supplémentaires ou modifiés

Jean-Étienne ROMBALDI

21 novembre 2024

Table des matières

Première partie

Leçons d'algèbre et de géométrie

Chapitre 1

Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini

Exercice 1.1. *Groupes d'ordre 6 non commutatifs*

On se propose de montrer que le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ est, à isomorphisme près, le seul groupe d'ordre 6 non commutatif. Soit G un groupe non commutatif d'ordre 6.

1. *Montrer qu'il existe dans G un élément g d'ordre 2 et un élément h d'ordre 3.*
2. *Montrer que les $g^i h^j$, pour $i = 0, 1$ et $j = 0, 1, 2$, sont deux à deux distincts.*
3. *Montrer que $G = \left\{g^i h^j \mid i = 0, 1 \text{ et } j = 0, 1, 2\right\}$, puis que l'application φ de G dans $\mathcal{S}_3$ définie par :*

$$\forall (i, j) \in \{0, 1\} \times (0, 1, 2), \ \varphi\left(g^i h^j\right) = \tau_1^i \gamma_1^j$$

où $\tau_1 = (1, 2)$ et $\gamma_1 = (1, 2, 3)$, réalise un isomorphisme de groupes de G sur $\mathcal{S}_3$.

Solution.

1. Comme G est non commutatif, il n'y a pas d'élément d'ordre 6 (sinon G est cyclique). Si tous les éléments de $G \setminus \{1_G\}$ sont d'ordre 2, le groupe est alors commutatif. Il existe donc un élément d'ordre 3. Si tous les éléments de $G \setminus \{1_G\}$ sont d'ordre 3, on a alors $g \neq g^{-1}$ pour tout $g \neq 1_G$ et $G \setminus \{1_G\} = \bigcup\limits_{g \neq e} \{g, g^{-1}\}$ serait de cardinal pair, ce qui est absurde. Il existe donc dans $G \setminus \{1_G\}$ au moins un élément d'ordre 2. On peut aussi utiliser le théorème de Cauchy qui nous dit qu'on peut trouver dans G, un élément g d'ordre 2 et un élément h d'ordre 3.
2. Si $g^i h^j = g^{i'} h^{j'}$, on a alors $g^{i-i'} = h^{j'-j} \in \langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{1\}$ ($\langle g \rangle \cap \langle h \rangle$ étant contenu dans $\langle g \rangle$ d'ordre 2 et dans $\langle h \rangle$ d'ordre 3 a un ordre qui divise 2 et 3, cet ordre est donc 1). On a donc $g^{i-i'} = h^{j'-j} = 1$, donc 2 divise $i - i' \in \{-1, 0, 1\}$ et 3 divise $j - j' \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, ce qui entraîne $i = i'$ et $j = j'$.

3. Il en résulte que $G = \left\{ g^i h^j \mid i = 0, 1 \text{ et } j = 0, 1, 2 \right\}$ (inclusion et même cardinal). L'application φ de G dans $\mathcal{S}_3$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \{0, 1\} \times (0, 1, 2), \ \varphi \left(g^i h^j \right) = \tau_1^i \gamma_1^j$$

est bijective puisque les applications $(i, j) \mapsto g^i h^j$ et $(i, j) \mapsto \tau_1^i \gamma_1^j$ sont bijectives de $\{0, 1\} \times (0, 1, 2)$ sur G et $\mathcal{S}_3$ respectivement. Le fait que c'est un morphisme de groupes provient des égalités $hg = gh^2$ et $h^2 g = gh$ dans G et $\mathcal{S}_3$ (avec $(g, h) = (\tau_1, \gamma_1)$ dans ce cas). En effet, on a $hg \notin \left\{ 1_G, g, h, h^2, gh \right\}$ (comme g est d'ordre 2 et h d'ordre 3, $hg = 1_G$ donne $h = g$, $hg = g$ donne $h = 1_G$, $hg = h$ donne $g = 1_G$, $hg = h^2$ donne $g = 1_G$ et $hg = gh$ n'est pas possible car G est non commutatif), donc $hg = gh^2$ et $h^2 g = hgh^2 = gh^4 = gh$. Tenant compte de $\varphi \left(g^i h^j \right) = \tau_1^i \gamma_1^j$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, il en résulte que pour $g^i h^j$, $g^{i'} h^{j'}$ dans G, on a :

$$g^i h^j \cdot g^{i'} h^{j'} = \begin{cases} g^i h^{j+j'} \text{ si } i' = 0 \\ g^{i+1} h^{j'} \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 0 \\ g^{i+1} h^{j'+2} \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 1 \\ g^{i+1} h^{j'+1} \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 2 \end{cases}$$

et :

$$\varphi \left(g^i h^j \cdot g^{i'} h^{j'} \right) = \begin{cases} \tau_1^i \gamma_1^{j+j'} = \tau_1^i \gamma_1^j \cdot \gamma_1^{j'} \text{ si } i' = 0 \\ \tau_1^{i+1} \gamma_1^{j'} = \tau_1^i \cdot \tau_1 \gamma_1^{j'} \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 0 \\ \tau_1^{i+1} \gamma_1^{j'+2} = \tau_1^i \tau_1 \gamma_1^2 \gamma_1^{j'} = \tau_1^i \gamma_1 \cdot \tau_1 \gamma_1^{j'} \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 1 \\ \tau_1^{i+1} \gamma_1^{j'+1} = \tau_1^i \tau_1 \gamma_1 \gamma_1^{j'} = \tau_1^i \gamma_1^2 \cdot \tau_1 \gamma_1^{j'} \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varphi \left(g^i h^j \right) \varphi \left(h^{j'} \right) \text{ si } i' = 0 \\ \varphi \left(g^i \right) \varphi \left(g h^{j'} \right) \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 0 \\ \varphi \left(g^i h \right) \varphi \left(g h^{j'} \right) \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 1 \\ \varphi \left(g^i h^2 \right) \varphi \left(g h^{j'} \right) \text{ si } i' = 1 \text{ et } j = 2 \end{cases} = \varphi \left(g^i h^j \right) \varphi \left(g^{i'} h^{j'} \right)$$

Exercice 1.2. *Isométries conservant une partie*

$\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension $n \geq 2$, $\mathcal{P}$ est une partie de $\mathcal{E}$ ayant au moins 2 éléments et on note $Is(\mathcal{P})$ [resp. $Is^+(\mathcal{P})$, $Is^-(\mathcal{P})$] l'ensemble des isométries [resp. des déplacements, des anti-déplacements] φ de $\mathcal{E}$ qui conservent $\mathcal{P}$, c'est-à-dire telles [resp. tels] que $\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

1. *Montrer que $Is(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$ et que $Is^+(\mathcal{P})$ est un sous-groupe distingué de $Is(\mathcal{P})$.*
2. *Montrer que l'application Φ qui associe à $\varphi \in Is(\mathcal{P})$ sa restriction à $\mathcal{P}$ est un morphisme de groupes de $Is(\mathcal{P})$ dans le groupe $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ des permutations de $\mathcal{P}$ et que dans le cas où $\mathcal{P}$ contient un repère affine de $\mathcal{E}$, ce morphisme Φ est injectif.*

3. *On suppose que $Is^{-}(\mathcal{P})$ est non vide. Montrer que pour toute isométrie $\sigma \in Is^{-}(\mathcal{P})$, l'application $\rho \mapsto \sigma \circ \rho$ réalise une bijection de $Is^{+}(\mathcal{P})$ sur $Is^{-}(\mathcal{P})$. Pour $\mathcal{P}$ fini, en déduire que* $\operatorname{card}(Is(\mathcal{P})) = 2\operatorname{card}(Is^{+}(\mathcal{P}))$.
4. *On suppose que $\mathcal{P}$ est fini. Montrer que toute isométrie $\varphi \in Is(\mathcal{P})$ laisse fixe l'isobarycentre de $\mathcal{P}$. Ce résultat permet de ramener l'étude de $Is(\mathcal{P})$ à une étude analogue dans l'espace vectoriel euclidien $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$.*
5. *On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension 3 et on s'intéresse au groupe $Is(\mathcal{T})$ des isométries de $\mathcal{E}$ qui laissent globalement invariant les sommets d'un tétraèdre régulier $\mathcal{T} = A_1A_2A_3A_4$.*
   (a) *Montrer que $Is(\mathcal{T})$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.*
   (b) *Montrer que $Is(\mathcal{T})$ est isomorphe à $\mathcal{S}_4$ et que le groupe $Is^{+}(\mathcal{T})$ des déplacements qui laissent globalement invariant les sommets de $\mathcal{T}$ est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_4$.*

Solution. Si $\varphi \in Is(\mathcal{P})$, sa restriction à $\mathcal{P}$ est alors une permutation de $\mathcal{P}$.

1. On a $Id \in Is(\mathcal{P})$ et pour φ, ψ dans $Is(\mathcal{P})$, la composée $\varphi \circ \psi^{-1}$ est aussi dans $Is(\mathcal{P})$, donc $Is(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$ et $Is^{+}(\mathcal{P}) = Is(\mathcal{P}) \cap Is^{+}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $Is^{+}(\mathcal{E})$. Le groupe $Is^{+}(\mathcal{P})$ est distingué dans $Is(\mathcal{P})$ comme noyau du morphisme de groupes $\det : \varphi \in Is(\mathcal{P}) \to \det(\overrightarrow{\varphi}) \in \{-1, 1\}$ (on peut aussi dire que pour $\rho \in Is^{+}(\mathcal{P})$ et $\varphi \in Is(\mathcal{P})$, $\varphi^{-1} \circ \rho \circ \varphi \in Is^{+}(\mathcal{P})$).
2. Une isométrie $\varphi \in Is(\mathcal{P})$ reste injective sur $\mathcal{P}$ et elle est surjective de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$ puisque $\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, c'est donc une permutation de $\mathcal{P}$. Il est clair que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \varphi_{|\mathcal{P}}$ est un morphisme de groupes. Si $\mathcal{P}$ contient un repère affine $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $\mathcal{E}$, l'application Φ est alors injective du fait que l'égalité $\varphi_{|\mathcal{P}} = \psi_{|\mathcal{P}}$ entraîne $\varphi(A_i) = \psi(A_i)$ pour tout i compris entre 0 et n, ce qui implique que $\varphi = \psi$ puisque ces applications affines coïncident sur un repère affine.
3. Pour $\sigma \in Is^{-}(\mathcal{P})$, l'application $\Psi : \rho \mapsto \sigma \circ \rho$ est injective de $Is^{+}(\mathcal{P})$ sur $Is^{-}(\mathcal{P})$ et pour $\sigma' \in Is^{-}(\mathcal{P})$, $\rho = \sigma^{-1} \circ \sigma' \in Is^{+}(\mathcal{P})$ est un antécédent de σ'. L'application Ψ est donc bijective. De la partition $Is(\mathcal{P}) = Is^{+}(\mathcal{P}) \cup Is^{-}(\mathcal{P})$, on déduit dans le cas où $\mathcal{P}$ est fini que $\operatorname{card}(Is(\mathcal{P})) = 2\operatorname{card}(Is^{+}(\mathcal{P}))$.
4. Si $\mathcal{P} = \{A_1, \cdots, A_m\}$, toute application $\varphi \in Is(\mathcal{P})$ qui est affine va alors transformer l'isobarycentre O de $\mathcal{P}$ en l'isobarycentre de $\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et nécessairement, on a $\varphi(O) = O$.
5.
   (a) À toute isométrie $\varphi \in Is(\mathcal{T})$, on associe la permutation :
$$\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \varphi(A_1) & \varphi(A_2) & \varphi(A_3) & \varphi(A_4) \end{pmatrix}$$
   de $E = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ et l'application $\Phi : \varphi \mapsto \sigma$ est un morphisme de groupes. Ce morphisme est injectif du fait que (A_1, A_2, A_3, A_4) est un repère affine de $\mathcal{E}$ et qu'une application affine est uniquement déterminée

par ses valeurs sur un repère affine. Donc $Is(\mathcal{T})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ et son ordre divise 24.

(b) Comme $\mathcal{S}(E)$ est engendré par les transpositions (A_1, A_k) avec $k = 2, 3, 4$, il suffit de montrer que $\Phi(Is(\mathcal{T}))$ contient ces transpositions. La transposition (A_1, A_k) est l'image de la réflexion par rapport au plan médiateur du segment $[A_1, A_k]$ (ce plan médiateur contient les deux autres sommet de $\mathcal{T}$ puisque ses faces sont des triangles équilatéraux). On a donc $\Phi(Is(\mathcal{T})) = \mathcal{S}(E)$. Comme $Is^+(\mathcal{T})$ est d'indice 2 dans $Is(\mathcal{T})$, $\Phi(Is^+(\mathcal{T}))$ est d'indice 2 dans $\Phi(Is(\mathcal{T}))$ et donc égal à $\mathcal{A}(E)$.

Exercice 1.3. *Matrices de permutation*

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, $n \geq 2$ un entier et $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $I_n = \{1, \cdots, n\}$ (groupe symétrique d'indice n). À toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe la matrice de passage P_σ de la base canonique $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}_\sigma = \left(e_{\sigma(k)}\right)_{1 \leq k \leq n}$. On dit que P_σ est la matrice de permutation associée à σ.

1. *Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$, on a $P_\sigma x = \left(x_{\sigma^{-1}(k)}\right)_{1 \leq k \leq n}$.*
2. *Montrer que la trace d'une matrice de permutation P_σ est égale au nombre de points fixes de la permutation σ.*
3. *Montrer que le nombre de matrices de permutation de trace nulle est égal à $\delta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, puis que, pour k compris entre 1 et n, le nombre de matrices de permutation de trace égale à k est égal à $\binom{n}{k} \delta_{n-k}$, en convenant que $\delta_0 = 1$.*
4. *Montrer que l'ensemble des matrices de permutation est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$.*
5. *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^tP_\sigma$ et que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.*
6. *On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos. Monter qu'une matrice de permutation est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
7. *Pour cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout entier r compris entre 2 et n, $\gamma_r \in \mathcal{S}_n$ est le cycle $(1, 2, \cdots, r)$.*
   (a) *Déterminer le polynôme minimal, le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants d'une matrice de permutation associée à un cycle d'ordre n (justifier le fait qu'il suffit de s'intéresser à γ_n).*
   (b) *Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'une matrice de permutation associée à un cycle d'ordre r compris entre 2 et $n - 1$.*
   (c) *Donner une expression du polynôme caractéristique d'une matrice de permutation.*

Solution. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la matrice P_σ est définie par $P_\sigma e_k = e_{\sigma(k)}$ pour $1 \leq k \leq n$, ce qui revient à dire que $P_\sigma = \left(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right) = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker.

1. Pour tout $x = (x_k)_{1\leq k\leq n} = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in \mathbb{K}^n$, on a $P_\sigma x = \sum_{k=1}^{n} x_k P_\sigma e_k = \sum_{k=1}^{n} x_k e_{\sigma(k)}$ et le changement d'indice $j = \sigma(k)$ (σ est bijective de I_n sur I_n) nous donne $P_\sigma x = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(j)} e_j$.
2. La trace de P_σ est $\mathrm{Tr}(P_\sigma) = \mathrm{Tr}\left(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right) = \mathrm{card}\left\{k \in I_n \mid \sigma(k) = k\right\}$, soit nombre de points fixes de la permutation σ.
3. De la question précédente, on déduit qu'il y a autant de matrices de permutation de trace nulle que de permutations de I_n sans point fixe (ou de dérangements) et il est connu que ce nombre de dérangement est égal à $\delta_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ (exercice **??**). En choisissant, pour k fixé entre 1 et n, un ensemble de k points fixes dans I_n, il y a δ_{n-k} dérangements possibles pour les $n-k$ points restants et comme il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces points fixes, on a $\binom{n}{k}\delta_{n-k}$ permutations de I_n ayant k points fixes et en conséquence autant de matrices de permutation de trace égale à k.
4. Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la matrice P_σ est inversible puisqu'elle transforme une base de $\mathbb{K}^n$ en base. Pour σ, σ' dans $\mathcal{S}_n$ et $1 \leq k \leq n$, on a $P_\sigma(P_{\sigma'} e_k) = P_\sigma e_{\sigma'(k)} = e_{\sigma(\sigma'(k))} = e_{\sigma\sigma'(k)} = P_{\sigma\sigma'} e_k$, donc $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$ et P est un morphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{K})$. Si $\sigma \in \ker(P)$, on a alors $P_\sigma = I_n$ et $e_k = e_{\sigma(k)}$ pour tout k compris entre 1 et n, ce qui revient à dire que $\sigma(k) = k$ pour tout k et donc que $\sigma = Id$. Le morphisme P est donc injectif. En conclusion, l'ensemble des matrices de permutation est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ isomorphe à $\mathcal{S}_n$, donc de cardinal égal à $n!$
5.
   (a) De l'égalité $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\sigma^{-1}} = P_{Id} = I_n$, on déduit que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

   (b) On a $P_\sigma = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $a_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ (où δ_{ik} est le symbole de Kronecker), ${}^tP_\sigma = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $b_{ij} = a_{ji} = \delta_{j,\sigma(i)}$ et $P_\sigma\ {}^tP_\sigma = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec :
   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)} = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq j \\ 1 \text{ pour } i = j \end{cases}$$
   ce qui signifie que $P_\sigma\ {}^tP_\sigma = I_n$ et ${}^tP_\sigma = P_\sigma^{-1}$. On peut aussi prendre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et remarquer que la matrice de permutation P_σ est orthogonale comme matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}$ à la base orthonormée $\mathcal{B}_\sigma$. Elle est donc inversible d'inverse ${}^tP_\sigma$.

   (c) Si τ est une transposition, la matrice P_τ est déduite de I_n en permutant deux colonnes, donc $\det(P_\tau) = -\det(I_n) = -1$. En écrivant $\sigma \in \mathcal{S}_n$ comme produit de p transpositions et en utilisant le fait que P est un morphisme de groupes, on en déduit que $\det(P_\sigma) = (-1)^p = \varepsilon(\sigma)$.

6. L'ensemble des matrices de permutation étant un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{K})$ de cardinal $n!$ le théorème de Lagrange nous dit que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $P_\sigma^{n!} = Id$, ce qui signifie que P_σ est annulée par le polynôme $Q(X) = X^{n!} - 1 \in \mathbb{K}[X]$ qui est scindé (puisque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos) et à racines simples (puisque son polynôme dérivé $n!X^{n!-1}$ s'annule uniquement en 0 dans $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle), donc P_σ est diagonalisable.

7.

   (a) Les n-cycles étant tous conjugués dans $\mathcal{S}_n$, pour tout cycle γ d'ordre n, il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\gamma = \sigma \circ \gamma_n \circ \sigma^{-1}$, donc $P_\gamma = P_\sigma P_{\gamma_n} (P_\sigma)^{-1}$, de sorte que P_γ a les mêmes polynôme minimal et caractéristique que $P_{\gamma_n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le cycle γ_n étant d'ordre n, on a $P_{\gamma_n}^n = P_{\gamma_n^n} = P_{Id} = I_n$, ce qui signifie que P_{γ_n} est annulée par $Q_n(X) = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ et le polynôme minimal π_{γ_n} de P_{γ_n} est un diviseur non constant de Q_n. En notant $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a $Q_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_n^k)$. Si $\deg(\pi_{\gamma_n}) < n$, il existe alors un entier k compris entre 0 et $n-1$ tel que P_{γ_n} soit annulée par :

$$R(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega_n^k} = \frac{X^n - (\omega_n^k)^n}{X - \omega_n^k}$$
$$= X^{n-1} + \omega_n^k X^{n-2} + \cdots + \omega_n^{(n-2)k} X + \omega_n^{(n-1)k}$$

et avec $P_{\gamma_n}^j e_1 = e_{\gamma_n^j(1)} = e_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq n-1$, on déduit que $R(P_{\gamma_n}) e_1 = e_n + \omega_n^k e_{n-1} + \cdots + \omega_n^{(nb-2)k} e_2 + \omega_n^{(n-1)k} e_1 = 0$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}^n$. On a donc $\pi_{\gamma_n} = Q_n$ et Q_n est aussi le polynôme caractéristique de P_{γ_n} à cause des degrés. En conclusion, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'une matrice de permutation γ associée à un cycle d'ordre n sont égaux au polynôme $Q_n(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_n^k)$. L'ensemble des valeurs propres de P_γ est donc $\Gamma_n = \{\omega_n^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ (racines n-ièmes de l'unité). Comme ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, les espaces propres associés sont tous de dimension 1. Pour $0 \leq k \leq n-1$, l'égalité $P_\gamma x = \omega_n^k x$ avec $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ équivaut à :

$$\begin{cases} x_n = \omega_n^k x_1 \\ x_j = \omega_n^k x_{j+1} \ (1 \leq j \leq n-1) \end{cases}$$

ce qui impose $x_n \neq 0$. Choisissant $x_n = 1$, on a $x_j = \omega_n^{-jk}$ pour $1 \leq j \leq n$.

(b) Les r-cycles étant tous conjugués dans $\mathcal{S}_n$, il nous suffit de considérer le cas du r-cycle $\gamma_r = (1, 2, \cdots, r)$. Dans ce cas, on a :

$$P_{\gamma_r} = (e_2, \cdots, e_r, e_1, e_{r+1} \cdots, e_n) = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 1 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

où $J_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et le polynôme caractéristique de P_{γ_r} est $\chi_n(X) = (X^r - 1)(X - 1)^{n-r}$. Les valeurs propres sont les racines r-ièmes de l'unité et le polynôme minimal est $\pi_n(X) = X^r - 1$ puisque ce polynôme a pour racines les valeurs propres de P_{γ_r} et divise $X^r - 1$ du fait que $P_{\gamma_r}^r = I_n$ (on peut aussi reprendre la démonstration faite pour $r = n$).

(c) Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{Id\}$ se décomposant en produit de cycles deux à deux disjoints, $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_p$, la matrice de permutation P_σ est semblable à $\begin{pmatrix} J_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_{r_p} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_m \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $(X - 1)^m \prod_{k=1}^{p} (X^{r_k} - 1)$.

Exercice 1.4. *Matrices circulantes*

Pour tout entier $n \geq 2$, on note Γ_n la matrice de permutation associée au cycle $\gamma_n = (1, 2, \cdots, n) \in \mathcal{S}_n$ et à toute suite $\alpha = (\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ de nombres complexe, on associe la matrice circulante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & a_3 & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \left(\left(a_{i-j \bmod n} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

1. *Préciser les matrices Γ_n^k pour k entier compris entre 1 et n.*
2. *Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $A = R(\Gamma_n)$.*
3. *Montrer que la matrice de permutation Γ_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses valeurs propres.*
4. *En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses valeurs propres.*

5. *Montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable et calculer son rayon spectral.*

6. *Montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & 3 & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & 4 & 3 \\ 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable et calculer son déterminant..*

Solution.

1. En notant $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, la matrice de permutation Γ_n est définie par $\Gamma_n e_k = e_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $\Gamma_n e_n = e_1$, ce qui revient à dire que $\Gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{1,n-1} & 1 \\ I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{pmatrix}$. L'application $\sigma \in \mathcal{S}_n \mapsto P_\sigma \in GL_n(\mathbb{C})$ qui associe à une permutation σ la matrice de permutation P_σ étant un morphisme de groupes, on a $\Gamma_n^n = P_{\gamma_n}^n = P_{\gamma_n^n} = P_{Id} = I_n$ et pour $1 \leq k \leq n-1$, $\Gamma_n^k = P_{\gamma_n}^k = P_{\gamma_n^k}$ avec :

$$\gamma_n^k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ k+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$\Gamma_n^k = \left(e_{\gamma_n^k(1)}, \cdots, e_{\gamma_n^k(n)}\right) = (e_{k+1}, \cdots, e_n, e_1, \cdots, e_k) = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & I_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix}$$

On peut aussi procéder comme suit. On vérifie facilement par récurrence finie sur k compris entre 0 et $n-1$ que $\Gamma_n^k e_1 = e_{k+1}$. Il en résulte que :

$$\Gamma_n^n e_1 = \Gamma_n \left(\Gamma_n^{n-1} e_1\right) = \Gamma_n e_n = e_1$$

et

$$\Gamma_n^n e_k = \Gamma_n^n \left(\Gamma_n^{k-1} e_1\right) = \Gamma_n^{k-1} \left(\Gamma_n^n e_1\right) = \Gamma_n^{k-1} e_1 = e_k \ \ (2 \leq k \leq n)$$

ce qui signifie que $\Gamma_n^n = I_n$. Soit k compris entre 1 et $n-1$. Pour $1 \leq j \leq n-k$, on a $\Gamma_n^k e_j = \Gamma_n^k \Gamma_n^{j-1} e_1 = \Gamma_n^{k+j-1} e_1 = e_{k+j}$ et pour $1 \leq i \leq k$, on a $\Gamma_n^k e_{n-k+i} = \Gamma_n^k \Gamma_n^{n-k+i-1} e_1 = \Gamma_n^{n+i-1} e_1 = \Gamma_n^{i-1} e_1 = e_i$. De façon plus lisible, cela s'écrit :

$$\Gamma_n^k e_1 = e_{k+1}, \cdots, \Gamma_n^k e_{n-k} = e_n, \Gamma_n^k e_{n-k+1} = e_1, \cdots, \Gamma_n^k e_n = e_k$$

ce qui revient à dire que $\Gamma_n^k = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & I_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} A &= a_0 I_n + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_{n-2} & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n-1} \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_0 I_n + a_1 \Gamma_n + a_2 \Gamma_n^2 + \cdots + a_{n-1} \Gamma_n^{n-1} = R(\Gamma_n) \end{aligned}$$

où $R(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

3. L'égalité $\Gamma_n^n = I_n$ nous dit que Γ_n est annulée par le polynôme $Q_n(X) = X^n - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, ce qui implique que Γ_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En notant $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a $Q_n(X) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(X - \omega_n^k\right)$. Le polynôme minimal π de Γ_n est un diviseur non constant de Q_n. Si $\deg(\pi) < n$, il existe alors un entier k compris entre 0 et $n-1$ tel que Γ_n soit annulée par :

$$\begin{aligned} Q(X) &= \frac{X^n - 1}{X - \omega_n^k} = \frac{X^n - \left(\omega_n^k\right)^n}{X - \omega_n^k} \\ &= X^{n-1} + \omega_n^k X^{n-2} + \cdots + \omega_n^{(n-2)k} X + \omega_n^{(n-1)k} \end{aligned}$$

et avec les égalités $\Gamma_n^j e_1 = e_{j+1}$ pour j compris entre 0 et $n-1$, on déduit que $Q(\Gamma_n) e_1 = e_n + \omega_n^k e_{n-1} + \cdots + \omega_n^{(n-2)k} e_2 + \omega_n^{(n-1)k} e_1 = 0$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}^n$. On a donc $\pi = Q_n$ et Q_n est aussi le polynôme caractéristique de Γ_n à cause des degrés. On peut aussi calculer directement le polynôme caractéristique $\chi(X)$ de Γ_n. En effectuant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + X L_2 + X^2 L_3 + \cdots + X^{n-1} L_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \begin{vmatrix} X & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 + X^n \\ -1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} (X^n - 1) (-1)^{n-1} = X^n - 1 \end{aligned}$$

Ce polynôme étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice Γ_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ses valeurs propres étant les racines n-ièmes de l'unité ω_n^k où k est compris entre 0 et $n-1$.

4. Comme la matrice Γ_n est diagonalisable, il en est de même de $A = R(\Gamma_n)$ et les valeurs propres de A sont les $R\left(\omega_n^k\right)$ où k est compris entre 0 et $n-1$.

5. On est dans la situation de la question 4 avec $R(X) = 2 - X - X^{n-1}$, donc A est diagonalisable de valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2 - \omega_n^k - \omega_n^{k(n-1)} = 2 - \omega_n^k - \omega^{-k} \\ &= 2\left(1 - \mathrm{Re}\left(\omega_n^k\right)\right) = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) n = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

où k est compris entre 0 et $n-1$, avec $\lambda_{n-k} = 4\sin^2\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = \lambda_k > 0$. Pour $n = 2p$, on a $\lambda_0 = 0$, $\lambda_p = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ qui sont simples et :

$$\lambda_k = \lambda_{2p-k} = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p}\right) \ (1 \leq k \leq p-1)$$

qui sont doubles. Le rayon spectral est alors $\rho(A) = 4$. Pour $n = 2p+1$, on a $\lambda_0 = 0$ qui est simple et :

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \ (1 \leq k \leq p)$$

qui sont doubles. Le rayon spectral est alors $\rho(A) = \lambda_p = 4\sin^2\left(\frac{p\pi}{2p+1}\right)$.

6. On est dans la situation de la question 4 avec :

$$\begin{aligned} R(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) X^k = \left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)' = \left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right)' \\ &= \frac{(n+1) X^n (X-1) + 1 - X^{n+1}}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1) X^n + 1}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

donc A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ et :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{n\omega_n^{k(n+1)} - (n+1)\,\omega_n^{kn} + 1}{(\omega_n^k - 1)^2} = \frac{n\omega_n^k - (n+1) + 1}{(\omega_n^k - 1)^2} \\ &= \frac{n\left(\omega_n^k - 1\right)}{(\omega_n^k - 1)^2} = \frac{n}{\omega_n^k - 1} \end{aligned}$$

où k est compris entre 1 et $n-1$. Le déterminant de A est :

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k = n^n \frac{n+1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_n^k - 1}$$

L'évaluation en 1 dans l'égalité $\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{X^n - 1}{X-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \omega_n^k\right)$ nous donne $\prod_{k=1}^{n-1} \left(\omega_n^k - 1\right) = n(-1)^{n-1}$. On a donc au final $\det(A) = (-1)^{n-1} n^{n-1} \frac{n+1}{2}$.

Chapitre 2

Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Exercice 2.1. *Équation diophantienne $a^2 - b^3 = 7$*

Montrer que l'équation diophantienne $a^2 - b^3 = 7$ n'a pas de solution.

Solution. Supposons qu'il existe une solution $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Si b est pair, on a alors $a^2 \equiv 3 \ (4)$, ce qui n'est pas possible car un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4. L'entier b est donc impair et l'entier a pair. Notre équation s'écrit aussi $b^3 + 8 = (b+2)\left(b^2 - 2b + 4\right) = a^2 + 1$, ou encore $(b+2)\left((b-1)^2 + 3\right) = a^2 + 1$ avec $b-1$ pair, ce qui nous donne $a^2 + 1 = (b+2)(4n+3)$. L'entier $4n+3$ ayant au moins un diviseur premier p congru à -1 modulo 4 (sinon, tous ses diviseurs premiers sont congrus à 1 modulo 4 et il en est de même de $4n+3$, ce qui n'est pas), on aboutit à $a^2 \equiv -1 \ (p)$, ce qui n'est pas possible pour $p \equiv -1 \ (4)$.

Exercice 2.2. *Tests de divisibilité*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n = n_p \cdots n_1 n_0 = \sum_{k=0}^{p} n_k 10^k$ son écriture décimale, où les n_k sont des entiers compris entre 0 et 9 avec $a_p \neq 0$. Montrer que :

- *n est divisible par 2 si, et seulement si, n_0 est pair ;*
- *n est divisible par 3 si, et seulement si, $\sum_{k=0}^{p} n_k \equiv 0 \pmod 3$;*
- *n est divisible par 4 si, et seulement si, $n_0 + 2n_1 \equiv 0 \equiv 0 \pmod 4$;*
- *n est divisible par 5 si, et seulement si, n_0 est égal à 0 ou 5 ;*
- *n est divisible par 6 si, et seulement si, $4\sum_{k=0}^{p} n_k \equiv 3n_0 \pmod 6$;*
- *n est divisible par 7 si, et seulement si, $\sum_{0 \leq 3q \leq p} (-1)^q n_{3q} + 3 \sum_{0 \leq 3q+1 \leq p} (-1)^q n_{3q+1} + 2 \sum_{0 \leq 3q+2 \leq p} (-1)^q n_{3q+2} \pmod 7$;*

— *n est divisible par* 8 *si, et seulement si,* $n_0 + 2n_1 + 4n_2 \equiv 0 \pmod 8$ *;*

— *n est divisible par* 9 *si, et seulement si,* $\sum_{k=0}^{p} n_k \equiv 0 \pmod 9$ *;*

— *n est divisible par* 11 *si, et seulement si,* $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k n_k \equiv 0 \pmod{11}$ *;*

Solution.

1. Comme 10 est congru à 0 modulo 2 et modulo 5, on déduit que n est congru à n_0 modulo 2 et modulo 5 et donc n est divisible par 2 [resp. par 5] si, et seulement si, son chiffre des unités n_0 est pair [resp. multiple de 5].
2. Du fait que 10 est congru à 1 modulo 3 et modulo 9, on déduit que 10^k est congru à 1 modulo 3 et modulo 9 pour tout entier k et n est congru à $\sum_{k=0}^{p} n_k$ modulo 3 et modulo 9. Donc n est divisible par 3 [resp. par 9] si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3 [resp. par 9].
3. Du fait que 10 est congru à -1 modulo 11 on déduit que 10^k est congru à $(-1)^k$ modulo 11 pour tout entier k et n est congru à $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k n_k$ modulo 11. Donc n est divisible par 11 si, et seulement si, la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.
4. On a $10 \equiv 2 \pmod 4$ et $10^2 \equiv 0 \pmod 4$, donc $10^k \equiv 0 \pmod 4$ pour tout $k \geq 2$ et $n \equiv n_0 + 2n_1 \pmod 4$. Il en résulte que n est divisible par 4 si, et seulement si, $n_0 + 2n_1 \equiv 0 \pmod 4$.
5. On a $10^k \equiv 4 \pmod 6$ pour tout $k \geq 1$, donc $n \equiv n_0 + 4\sum_{k=1}^{p} n_k = 4\sum_{k=0}^{p} n_k - 3n_0 \pmod 6$. Il en résulte que n est divisible par 6 si, et seulement si, $4\sum_{k=0}^{p} n_k \equiv 3n_0 \pmod 6$.
6. On a $10 \equiv 3 \pmod 7$, $10^2 \equiv 2 \pmod 7$ et $10^3 \equiv -1 \pmod 7$, donc $10^{3q} \equiv (-1)^q \pmod 7$, $10^{3q+1} \equiv 3(-1)^q \pmod 7$ et $10^{3q+2} \equiv 2(-1)^q \pmod 7$ pour tout $q \geq 1$ et :

$$n \equiv \sum_{0 \leq 3q \leq p} (-1)^q n_{3q} + 3 \sum_{0 \leq 3q+1 \leq p} (-1)^q n_{3q+1} + 2 \sum_{0 \leq 3q+2 \leq p} (-1)^q n_{3q+2} \pmod 7$$

Il en résulte que n est divisible par 4 si, et seulement si, $\sum_{0 \leq 3q \leq p} (-1)^q n_{3q} + 3 \sum_{0 \leq 3q+1 \leq p} (-1)^q n_{3q+1} + 2 \sum_{0 \leq 3q+2 \leq p} (-1)^q n_{3q+2} \equiv 0 \pmod 7$, ce qui s'écrit aussi :

$$(n_0 + 3n_1 + 2n_2) - (n_3 + 3n_4 + 2n_5) + (n_6 + 3n_4 + 2n_5) - \cdots \equiv 0 \pmod 7$$

7. On a $10 \equiv 2 \pmod{8}$ et $10^2 \equiv 4 \pmod{8}$ et $10^3 \equiv 0 \pmod{8}$, donc $10^k \equiv 0 \pmod{8}$ pour tout $k \geq 3$ et $n \equiv n_0 + 2n_1 + 4n_2 \pmod{8}$. Il en résulte que n est divisible par 8 si, et seulement si, $n_0 + 2n_1 + 4n_2 \equiv 0 \pmod{8}$.

Exercice 2.3. *Nombres premiers de la forme $pn + 1$ pour p premier*

On se fixe un nombre premier $p \geq 2$ et on se propose de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $pn + 1$, où n est un entier naturel non nul.

1. *Montrer que les diviseurs premiers de l'entier $m = 2^p - 1$ sont de la forme $pn + 1$, où n est un entier naturel non nul (il existe donc de tels nombres premiers).*
2. *On suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini $p_1 < \cdots < p_r$ de nombres premiers de la forme $pn+1$ et on note $N = \prod_{k=1}^{r} p_k$, $m = (N+1)^p - N^p$.*
   En désignant par $q \geq 2$ un diviseur premier de m, montrer que $\overline{N} \neq \overline{0}$ dans le corps $\mathbb{F}_q = \dfrac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}$, que $\overline{(N+1)} \cdot \overline{N}^{-1}$ est d'ordre p et conclure.

Solution.

1. L'entier $m = 2^p - 1$ est impair et $m \geq 3$ puisque $p \geq 2$. Si $q \geq 3$ est un diviseur premier de m, on a alors $\overline{2}^p = \overline{1}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^*$ et $\overline{2}$ est d'ordre p, donc p divise $q - 1$ (théorème de Lagrange), ce qui signifie qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $q = pn + 1$.
2. Si $q \geq 2$ est un diviseur premier de m (on vérifie que $m \geq 2$), on a alors $\overline{(N+1)}^p = \overline{N}^p$ dans $\mathbb{F}_q$ et $\overline{N} \neq \overline{0}$. Donc $\overline{N}$ est inversible dans le corps $\mathbb{F}_q$ et $\left(\overline{(N+1)} \cdot \overline{N}^{-1}\right)^p = \overline{1}$ avec $\overline{(N+1)} \cdot \overline{N}^{-1} \neq \overline{1}$, donc $\overline{(N+1)} \cdot \overline{N}^{-1}$ est d'ordre p et cet ordre divise $q - 1$, ce qui signifie qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $q = pn + 1$. Mais alors q est l'un des p_k et il divise N. En conclusion, q est un nombre premier qui divise N et $m = (N+1)^p - N^p$, donc il divise aussi $N+1$, ce qui n'est pas possible. L'ensemble des nombres premiers de la forme $pn + 1$ est donc infini.

Exercice 2.4. *Théorème de Lamé*

On se propose de montrer que le nombre de divisions euclidiennes que nécessite l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd *de a et b, où $1 \leq b < a$, est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffres de b dans son écriture décimale.*

1. *On désigne par $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par :*

$$\begin{cases} F_0 = 0, \ F_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

et par $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *le nombre d'or. Montrer que* $F_n = \dfrac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Soient* $1 \leq b < a$ *deux entiers naturels. On rappelle que l'algorithme d'Euclide pour calculer le* pgcd *de* a *et* b *consiste à construire la suite d'entiers* $(r_n)_{-1 \leq n \leq p}$ *comme suit :*

   — $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $0 \leq r_1 < r_0$ *est le reste dans la division euclidienne de* $r_{-1} = a$ *par* $r_0 = b$ *;*

   — *si* $r_1 = 0$, *on a alors* $p = 1$ *et* $a \wedge b = b$, *sinon, pour* $1 \leq n \leq p-1$, $0 \leq r_n < r_{n-1}$ *est le reste dans la division euclidienne de* r_{n-2} *par* r_{n-1} *;*

   — $r_p = 0$.
   On a donc $r_p = 0 < r_{p-1} < \cdots < r_1 < r_0$ *et* $a \wedge b = r_0 \wedge r_1 = \cdots = r_{p-1} \wedge r_p = r_{p-1}$, *c'est à dire que* $a \wedge b$ *est le dernier reste non nul* r_{p-1} *dans cette suite de divisions euclidiennes. L'algorithme d'Euclide a donc nécessité* $p-1$ *divisions euclidiennes. La dernière division, qui donne un reste nul, n'est pas comptée.*

   (a) *Montrer qu'il existe deux suites d'entiers* $(u_n)_{0 \leq n \leq p}$ *et* $(v_n)_{0 \leq n \leq p}$ *telles que* $r_n = au_n + bv_n$ *pour tout* n *compris entre* 0 *et* $p-1$.

   (b) *Montrer que* $r_{p-k} \geq F_k$ *pour tout* k *compris entre* 0 *et* p.

   (c) *En désignant par* m *le nombre de chiffres dans l'écriture de* b *en base* 10, *montrer que* $p \leq \dfrac{m + \log_{10}(\sqrt{5})}{\log_{10}(\varphi)}$.

   (d) *Montrer que* $p - 1 \leq 5m$.

Solution.

1. Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence définissant la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $P(X) = X^2 - X - 1$ et ce polynôme a pour racines $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $1 - \varphi = -\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (somme et produit des racines). Il en résulte l'existence de deux constantes réelles α, β telles que $F_n = \alpha\varphi^n + \beta(1-\varphi)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales nous donnent $F_0 = \alpha + \beta = 0$ et $F_1 = \alpha\varphi + \beta(1-\varphi) = 1$, donc $\beta = -\alpha$ et $(2\varphi - 1)\alpha = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{2\varphi - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $F_n = \dfrac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.

(a) Pour $n = 0$, $n = 1$ on a $r_0 = b = a \cdot 0 + b \cdot 1$, $r_1 = a \cdot 1 + b(-q_1)$. En supposant le résultat acquis jusqu'à l'ordre $n - 1 < p - 1$, on a :

$$\begin{aligned} r_n &= -q_n r_{n-1} + r_{n-2} = -q_n (a u_{n-1} + b v_{n-1}) + a u_{n-2} + b v_{n-2} \\ &= a(u_{n-2} - q_n u_{n-1}) + b(v_{n-2} - q_n v_{n-1}) = a u_n + b v_n \end{aligned}$$

En particulier pour $n = p - 1$ on a $a \wedge b = r_{p-1} = a u_{p-1} + b v_{p-1} = au + bv$, soit l'identité de Bézout.

(b) Pour $k = 0$, on a $r_p = 0 = F_0$. Pour $k = 1$, on a $r_{p-1} \geq 1 = F_1$ (r_{p-1} est le dernier reste non nul). Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$ avec $2 \leq k \leq p$. Par construction, on a :

$$r_{p-k} = q_{p-(k-2)} r_{p-(k-1)} + r_{p-(k-2)} \quad \left(0 < r_{p-(k-2)} < r_{p-(k-1)}\right)$$

donc $q_{p-(k-2)} \geq 1$ puisque $0 < r_{p-(k-1)} < r_{p-k}$ et :

$$r_{p-k} \geq r_{p-(k-1)} + r_{p-(k-2)} \geq F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$$

En particulier, on a pour $k = p$, $r_0 = b \geq F_p$.

(c) L'écriture en base 10 de b est $b = \sum_{k=0}^{m-1} b_k 10^k$ et on a $10^{m-1} \leq b < 10^m$, donc $10^m \geq b + 1$ et $m \geq \dfrac{\ln(b+1)}{\ln(10)} = \log_{10}(b+1)$. D'autre part, on a $b \geq F_p = \dfrac{\varphi^p - (1-\varphi)^p}{\sqrt{5}}$ avec $|1 - \varphi| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$, donc $\dfrac{|1-\varphi|^p}{\sqrt{5}} < 1$ et $b + 1 \geq \dfrac{\varphi^p}{\sqrt{5}} + \left(1 - \dfrac{(1-\varphi)^p}{\sqrt{5}}\right) \geq \dfrac{\varphi^p}{\sqrt{5}}$, ce qui nous donne :

$$m \geq \log_{10}(b+1) \geq \log_{10}\left(\frac{\varphi^p}{\sqrt{5}}\right) = p \log_{10}(\varphi) - \log_{10}\left(\sqrt{5}\right)$$

et $p \leq \dfrac{m + \log_{10}\left(\sqrt{5}\right)}{\log_{10}(\varphi)}$.

(d) On a $p - 1 \leq \alpha m + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{1}{\log_{10}(\varphi)} \backsimeq 4.78$, $\beta = \dfrac{\log_{10}\left(\sqrt{5}\right)}{\log_{10}(\varphi)} - 1 \backsimeq 0.67$. Comme $p - 1$ est un entier, on a en fait $p - 1 \leq [\alpha m + \beta]$. Il nous suffit donc de montrer que $f(m) = [\alpha m + \beta] \leq 5m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $m = 1, 2, 3$, on a :

$$f(1) = [\alpha + \beta] = 5,\ f(2) = [2\alpha + \beta] = 10,\ f(3) = [3\alpha + \beta] = 15$$

et pour $m \geq 4$, $\alpha m + \beta \backsimeq 4.785 \cdot m + 0.672 = 5m + (0.672 - 0.215 \cdot m)$ avec $0.215 \cdot m - 0.672 \geq 0.215 \cdot 4 - 0.672 \backsimeq 0.188 > 0$, donc $\alpha m + \beta \leq 5m$ et $p - 1 \leq 5m$.

Exercice 2.5. *Théorème de Cauchy dans le cas commutatif*

Soit $(G, \cdot)$ *un groupe commutatif fini d'ordre* $n \geq 2$.

1. *Soient* p, q *deux entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe deux entiers* p' *et* q' *premiers entre eux tels que* p' *divise* p, q' *divise* q *et* $p \vee q = p'q'$ *(*$p \vee q$ *désigne le* ppcm *de* p *et* q*).*
2. *Montrer qu'il existe un élément de* G *dont l'ordre est égal au* ppcm m *des ordres de tous les éléments de* G.
3. *Montrer que* m *a les mêmes facteurs premiers que* n.
4. *En déduire que pour tout diviseur premier* p *de* n *il existe dans* G *un élément d'ordre* p *(théorème de Cauchy dans le cas commutatif).*

Solution.

1. Pour $p = 1$ ou $q = 1$, c'est clair avec $p' = p$ et $q' = q$. Pour $p \geq 2$ et $q \geq 2$, on a les décompositions en facteurs premiers, $p = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $q = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$ avec $2 \leq p_1 < \cdots < p_s$ premiers et les α_i, β_i entiers positifs ou nuls pour $1 \leq i \leq r$. On pose alors $p' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > \beta_i}}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $q' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \leq \beta_i}}^{r} p_i^{\beta_i}$ (p' ou q' est égal à 1 si la condition $\alpha_i > \beta_i$ ou $\alpha_i \leq \beta_i$ n'est jamais vérifiée) et on a p' qui divise p, q' qui divise q et $p \vee q = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} = p'q'$ avec $p' \wedge q' = 1$.
2. Soit μ le plus grand des ordres des éléments de G (l'exposant de G) et x un élément d'ordre μ dans G. Nous allons montrer que μ est multiple de l'ordre de tout élément de G, en conséquence c'est le ppcm de ces ordres. Soit donc y un élément de G et p sont ordre. En désignant par μ' et p' des entiers premiers entre eux tels que μ' divise μ, p' divise p et $\mu \vee p = \mu' p'$, on a $x' = x^{\frac{\mu}{\mu'}}$ d'ordre μ', $y' = y^{\frac{p}{p'}}$ d'ordre p' et le produit $x'y'$ est d'ordre $\mu' p' = \mu \vee p$ (le groupe G est commutatif et les ordres μ' et p' sont premiers entre eux). On a donc $\mu \vee p \leq \mu$ et donc $\mu = \mu \vee p$ est un multiple de p. En définitive μ est le ppcm m des ordres des éléments de G et il existe un élément x de G d'ordre m.
3. Soit $\{x_1, \cdots, x_p\}$ un système de générateurs de G (qui est fini) et $H = \prod_{i=1}^{p} \langle x_i \rangle$. Du fait que G est commutatif, l'application $\psi : H \to G$ définie par :

$$\forall y = (y_1, \cdots, y_p) \in H, \quad \psi(y) = \prod_{i=1}^{p} y_i$$

est un morphisme de groupes et ce morphisme est surjectif puisque $\{x_1, \cdots, x_p\}$ engendre G. Ce morphisme surjectif induit alors un isomorphisme du groupe quotient $\dfrac{H}{\ker(\psi)}$ sur G, ce qui entraîne $\operatorname{card}(H) = \operatorname{card}(\ker(\psi)) \operatorname{card}(G)$ et $n = \operatorname{card}(G)$ divise $\operatorname{card}(H) = \prod_{i=1}^{p} r_i$ où, pour i compris entre 1 et p, r_i est l'ordre de x_i. Le ppcm m des ordres des éléments de G étant multiple de chaque r_i, m^p est multiple de $\prod_{i=1}^{p} r_i$ donc de n, ce qui entraîne que m a les mêmes facteurs premiers que n.

4. Si p est un diviseur premier de n, c'est également un diviseur premier de m et $m = pr$. En désignant par x un élément de G d'ordre m et en posant $y = x^r$ on dispose d'un élément d'ordre p dans G.

Exercice 2.6. *Éléments inversibles de* $\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{n} = n + 2^\alpha\mathbb{Z}$ la classe résiduelle de n modulo 2^α. $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$ désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}$.

1. *Préciser $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$ pour $\alpha \in \{1, 2\}$.*
   Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\alpha \geq 3$.
2. *Quel est le cardinal de $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$?*
3. *Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers impairs tels que :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 5^{2^k} = 1 + \lambda_k 2^{k+2}$$

   En déduire que $\overline{5}$ est d'ordre $2^{\alpha-2}$ dans le groupe $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$, puis que $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times = \left\{\pm\overline{5}^k \mid 0 \leq k < 2^{\alpha-2}\right\}$.
4. *Le groupe $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$ est-il cyclique ?*

Solution.

1. On a $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^\times = \{\overline{1}\}$ et $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^2\mathbb{Z}}\right)^\times = \{\overline{1}, \overline{-1}\} \approx \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Le groupe $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$ est donc cycliques pour $\alpha \in \{1, 2\}$.
2. On a card $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times = \varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}$ (fonction indicatrice d'Euler).
3. Pour $k = 0$, on a $5 = 1 + 2^2$ et $\lambda_0 = 1$. Pour $k = 1$, on a $5^2 = 1 + 3 * 2^3$ et $\lambda_1 = 3$. Supposant le résultat acquis pour $k \geq 1$, on a :

$$5^{2^{k+1}} = \left(1 + \lambda_k 2^{k+2}\right)^2 = 1 + \lambda_{k+1} 2^{k+3}$$

   avec $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \lambda_k^2 2^{k+1} = \lambda_k \left(1 + \lambda_k 2^{k+1}\right)$ impair si λ_k l'est.

4. On a $\overline{5}^{2^{\alpha-2}} = \overline{1+\lambda_{\alpha-2}2^{\alpha}} = \overline{1}$ et $\overline{5}^{2^{\alpha-3}} = \overline{1+\lambda_{\alpha-3}2^{\alpha-1}} = \overline{1} + \overline{2^{\alpha-1}} \neq \overline{1}$ ($\lambda_{\alpha-3}$ est impair, donc $\overline{\lambda_{\alpha-3}} = \overline{1}$), ce qui signifie que $\overline{5}$ est d'ordre $2^{\alpha-2}$ dans $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^{\alpha}\mathbb{Z}}\right)^{\times}$ et $H = \langle \overline{5} \rangle$ est un sous-groupe cyclique d'ordre $2^{\alpha-2}$ de $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^{\alpha}\mathbb{Z}}\right)^{\times}$.
   Les ensembles $H = \left\{\overline{5}^k \mid 0 \leq k < 2^{\alpha-2}\right\}$ et $K = \left\{-\overline{5}^k \mid 0 \leq k < 2^{\alpha-2}\right\}$ sont de même cardinal égal à $2^{\alpha-2}$ et contenus dans $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^{\alpha}\mathbb{Z}}\right)^{\times}$. Si l'intersection $H \cap K$ est non vide, il existe alors deux entiers $j \leq k$ compris entre 0 et $2^{\alpha-2} - 1$ tels que $\overline{5}^k = -\overline{5}^j$, ce qui nous donne $\overline{5}^j \left(\overline{5}^{k-j} + \overline{1}\right) = \overline{0}$, soit $\overline{5}^{k-j} + \overline{1} = \overline{0}$ ($\overline{5}^j$ est inversible) avec $k - j \in \mathbb{N}$, ce qui n'est pas possible car 4 ne divise pas $5^{k-j}+1$ ($5^{k-j}+1$ est congru à 2 modulo 4). On a donc $H \cap K = \emptyset$ et l'inclusion $H \cup K \subset \left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^{\alpha}\mathbb{Z}}\right)^{\times}$, ces deux ensembles étant de même cardinal égal à $2^{\alpha-1}$, ce qui nous donne l'égalité $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^{\alpha}\mathbb{Z}}\right)^{\times} = \left\{\pm\overline{5}^k \mid 0 \leq k < 2^{\alpha-2}\right\}$.
5. Le groupe H étant d'ordre $2^{\alpha-2}$, tous ses éléments ainsi que ceux de K ont un ordre inférieur ou égal, donc il n'existe pas d'élément d'ordre $2^{\alpha-1}$ dans $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{2^{\alpha}\mathbb{Z}}\right)^{\times}$ et ce groupe n'est pas cyclique pour $\alpha \geq 3$.

Chapitre 3

Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers

Exercice 3.1. *Fonctions arithmétiques multiplicatives*

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On appelle fonction arithmétique toute fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. Une telle fonction est dite multiplicative si $f(1) \neq 0$ et $f(nm) = f(n) f(m)$ pour tout couple (n, m) d'entiers naturels non nuls premiers entre eux. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.

1. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative.*
   (a) *Montrer que $f(1) = 1$ et que si $(n_k)_{1 \leq k \leq r}$ est une suite de $r \geq 2$ entiers naturels non nuls deux à deux premiers entre eux, on a alors $f\left(\prod_{k=1}^{r} n_k\right) = \prod_{k=1}^{r} f(n_k)$.*
   (b) *Montrer que pour tout couple (n, m) d'entiers naturels non nuls, on a $f(n) f(m) = f(n \wedge m) f(n \vee m)$.*
2. *Montrer qu'une fonction arithmétique multiplicative est uniquement déterminée par les $f(p^\alpha)$, où $p \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.*
3. *Soient $n \geq 2$ et $m \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que l'application $(d, \delta) \mapsto d\delta$ réalise une bijection de $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ sur $\mathcal{D}_{nm}$. Préciser son inverse.*
4. *Montrer que la fonction arithmétique τ définie par $\tau(n) = \operatorname{card}(\mathcal{D}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est multiplicative ($\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n). Donner une expression de $\tau(n)$ en utilisant la décomposition en facteurs premiers de $n \geq 2$.*
5. *En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \left\{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ d_1 d_2 d_3 = n\right\}$ et $F_n = \left\{(d, \delta) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ d \in \mathcal{D}_n \text{ et } \delta \in \mathcal{D}_d\right\}$, montrer que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & E_n & \to & F_n \\ & (d_1, d_2, d_3) & \mapsto & (d_1 d_2, d_1) \end{array}$$

est bijective.

Le produit de convolution (ou de Dirichlet) de deux fonctions arithmétiques f, g est la fonction arithmétique notée $f * g$ et définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (f * g)(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$$

6. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ des fonctions arithmétiques muni des lois $+$ et $*$, est un anneau commutatif, unitaire, intègre et que ses éléments inversibles sont les fonctions arithmétiques f telles que $f(1) \neq 0$.*
7. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative.*
   (a) *Montrer que f est inversible dans l'anneau $\mathcal{A}$. On note $g = f^{-1}$ son inverse.*
   (b) *Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Montrer que, pour tout (α, m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que p ne divise pas m, on a $g(p^\alpha m) = g(p^\alpha)\, g(m)$.*
   (c) *En déduire que g est multiplicative.*
8. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des fonctions arithmétiques multiplicatives muni de la loi $*$ est un groupe commutatif.*

Solution.

1.

(a) De $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ avec $f(1) \neq 0$, on déduit que $f(1) = 1$. La deuxième propriété se vérifie par récurrence sur $r \geq 2$. Pour $r = 2$, c'est la définition d'une fonction arithmétique multiplicative. Supposons le résultat acquis au rang $r \geq 2$ et soit $(n_k)_{1 \leq k \leq r+1}$ une suite d'entiers naturels non nuls deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, n_1 est premier avec $m = \prod_{k=2}^{r+1} n_k$ (sinon il existe $p \in \mathcal{P}$ qui divise n_1 et m, donc p divise aussi l'un des n_k avec $k \neq 1$, ce qui contredit le fait que n_1 et n_k sont premiers entre eux) et on a $f\left(\prod_{k=1}^{r+1} n_k\right) = f(n_1 m) = f(n_1)\, f\left(\prod_{k=2}^{r+1} n_k\right) = \prod_{k=1}^{r+1} f(n_k)$ en exploitant le cas $r = 2$ et l'hypothèse de récurrence.

(b) Pour $n = 1$ ou $m = 1$, c'est clair. Pour $n \geq 2$ et $m \geq 2$, en utilisant les décompositions en facteurs premiers $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ et $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k}$, où les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k, β_k des entiers naturels (certains de ces entiers pouvant éventuellement être nuls), on a

$$n \wedge m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)},\ n \vee m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)} \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} f(n) f(m) &= \prod_{k=1}^{r} f\left(p_k^{\alpha_k}\right) \prod_{k=1}^{r} f\left(p_k^{\beta_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} f\left(p_k^{\alpha_k}\right) f\left(p_k^{\beta_k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{r} f\left(p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}\right) f\left(p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{r} f\left(p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}\right) \prod_{k=1}^{r} f\left(p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}\right) = f(n \wedge m) f(n \vee m) \end{aligned}$$

(pour $\alpha_k \leq \beta_k$, on a $f\left(p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}\right) f\left(p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}\right) = f\left(p_k^{\alpha_k}\right) f\left(p_k^{\beta_k}\right)$ et pour $\alpha_k > \beta_k$, on a $f\left(p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}\right) f\left(p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}\right) = f\left(p_k^{\beta_k}\right) f\left(p_k^{\alpha_k}\right)$).

2. Cela se déduit de $f(1) = 1$ et de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$. On a la décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, où les $p_1 < \cdots < p_r$ sont des nombres premiers et les α_k des entiers naturels non nuls, cette décomposition étant unique. Les entiers $p_k^{\alpha_k}$, pour $1 \leq k \leq r$, étant deux à deux premiers entre eux, on en déduit que $f(n) = \prod_{k=1}^{r} f\left(p_k^{\alpha_k}\right)$. La connaissance des $f(p^\alpha)$ pour tout $(p, \alpha) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^*$ détermine donc complètement la fonction multiplicative f.
3. Si d divise n et δ divise m, le produit $d\delta$ divise alors nm, donc la fonction $f : (d, \delta) \mapsto d\delta$ définit bien une application de $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ dans $\mathcal{D}_{nm}$. Si (d, δ) et (d', δ') dans $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ sont tels que $f(d, \delta) = f(d', \delta')$, on a alors $d\delta = d'\delta'$, donc d divise $d'\delta'$ en étant premier avec δ' (d divise n et δ' divise m, donc $d \wedge \delta'$ divise $n \wedge m = 1$ dans $\mathbb{N}^*$), ce qui implique que d divise d'. Avec les mêmes arguments, on voit que d' divise d, donc $d = d'$ et $\delta = \delta'$. L'application f est donc injective. Les entiers n et m étant premiers entre eux, leurs décompositions en facteurs premiers sont de la forme $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ et $m = \prod_{k=r+1}^{s} p_k^{\alpha_k}$, où $1 \leq r < s$, les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k des entiers naturels non nuls, de sorte que les diviseurs de nm sont de la forme $d' = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\beta_k}$ où les β_k sont des entiers compris entre 0 et α_k, ce qui s'écrit $d' = d\delta = f(d, \delta)$ avec $d = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k} = d' \wedge n \in \mathcal{D}_n$ et $\delta = \prod_{k=r+1}^{s} p_k^{\beta_k} \in \mathcal{D}_m$. L'application f est donc surjective. En conclusion, f est bijective de $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ sur $\mathcal{D}_{nm}$ d'inverse $f^{-1} : d' \mapsto (d' \wedge n, d' \wedge m)$.
4. On a $\tau(1) = 1$ et pour $n \geq 2$ et $m \geq 2$ premiers entre eux, on a en exploitant le fait que les ensembles $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}_{nm}$ sont équipotents :

$$\tau(nm) = \operatorname{card}(\mathcal{D}_{nm}) = \operatorname{card}(\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m) = \operatorname{card}(\mathcal{D}_n) \operatorname{card}(\mathcal{D}_m) = \tau(n)\tau(m)$$

ce qui nous dit que τ est multiplicative. Pour tout $(p,\alpha) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}^*$, on a $\tau(p^\alpha) = \alpha+1$ puisque, pour p premier, les diviseurs de p^α sont les p^β où $\beta \in \{0,1,\cdots,\alpha\}$. Il en résulte que pour $n = \prod\limits_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k} \geq 2$, où les $p_k \in \mathcal{P}$ sont deux à deux distincts et les $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, on a $\tau(n) = \prod\limits_{k=1}^{r} \tau\left(p_k^{\alpha_k}\right) = \prod\limits_{k=1}^{r} (\alpha_k+1)$.

5. Pour tout $(d_1,d_2,d_3) \in E_n$, on a $d = d_1d_2 \in \mathcal{D}_n$ et $\delta = d_1 \in \mathcal{D}_d$, donc φ_n est bien une application de E_n sur F_n. Si (d_1,d_2,d_3) et (d_1',d_2',d_3') dans E_n sont tels que $\varphi_n(d_1,d_2,d_3) = \varphi_n(d_1',d_2',d_3')$, on a alors $(d_1d_2,d_1) = (d_1'd_2',d_1')$ ce qui nous donne $d_1 = d_1'$, $d_1d_2 = d_1'd_2'$ dans $\mathbb{N}^*$, donc $d_2 = d_2'$, puis compte tenu de $d_1d_2d_3 = d_1',d_2'd_3' = n$ dans $\mathbb{N}^*$, on en déduit que $d_3 = d_3'$. La fonction φ_n est donc injective. Pour $(d,\delta) \in F_n$, on a $n = dq = \delta q' q$, donc $(\delta,q,q') \in E_n$ et $\varphi_n(\delta,q,q') = (\delta q,\delta) = (d,\delta)$, ce qui nous dit que φ_n est surjective. En conclusion, φ_n est bijective d'inverse $\varphi_n^{-1} : (d,\delta) \mapsto \left(\delta, \frac{n}{d}, \frac{d}{\delta}\right)$.

6.

(a) Il est connu que $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*},+\right)$ est un groupe commutatif (suites définies sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs complexes). Du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $d \mapsto \frac{n}{d}$ est une permutation de $\mathcal{D}_n$, on déduit pour toutes fonctions arithmétiques f et g, on a :

$$(f*g)(n) = \sum_{d\in\mathcal{D}_n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'\in\mathcal{D}_n} f\left(\frac{n}{d'}\right) g(d') = (g*f)(n)$$

La loi $*$ est donc commutative. La distributivité de $*$ par rapport à l'addition se déduit du fait que $\mathbb{C}$ est un corps. Pour f,g,h dans $\mathcal{A}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant les notations de la question précédente :

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(n) &= \sum_{d\in\mathcal{D}_n} f*g(d)\, h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d\in\mathcal{D}_n} h\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{\delta\in\mathcal{D}_d} f(\delta)\, g\left(\frac{d}{\delta}\right)\right) \\ &= \sum_{(d,\delta)\in F_n} h\left(\frac{n}{d}\right) f(\delta)\, g\left(\frac{d}{\delta}\right) = \sum_{(d_1,d_2,d_3)\in E_n} f(d_1)\, g(d_2)\, h(d_3)\end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $(d_1,d_2,d_3) = \varphi_n^{-1}(d,\delta) = \left(\delta, \frac{d}{\delta}, \frac{n}{d}\right)$.

De manière analogue, on a :

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(n) &= \sum_{d\in\mathcal{D}_n} f\left(\frac{n}{d}\right) g*h(d) = \sum_{d\in\mathcal{D}_n} f\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{\delta\in\mathcal{D}_d} g(\delta)\, h\left(\frac{d}{\delta}\right)\right) \\ &= \sum_{(d,\delta)\in F_n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(\delta)\, h\left(\frac{d}{\delta}\right) = \sum_{(d_1,d_2,d_3)\in E_n} f(d_3)\, g(d_1)\, h(d_2) \\ &= \sum_{\left(d_1',d_2',d_3'\right)\in E_n} f(d_1')\, g(d_2')\, h(d_3')\end{aligned}$$

La loi $*$ est donc associative. Le neutre pour la loi $*$ est la fonction arithmétique e définie par $e(1) = 1$ et $e(n) = 0$ pour tout $n \geq 2$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(f * e)(n) = (e * f)(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} e(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$). Au final, $(\mathcal{A}, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

(b) Soient f, g dans $\mathcal{A} \setminus \{0\}$. En désignant par $n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $f(n) \neq 0$ et par $m \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $g(m) \neq 0$, on a :

$$(f * g)(nm) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{nm}} f(d) g\left(\frac{nm}{d}\right) = f(n) g(m) + \sum_{d \in \mathcal{D}_{nm} \setminus \{n\}} f(d) g\left(\frac{nm}{d}\right)$$

Si $d \in \mathcal{D}_{nm} \setminus \{n\}$ est strictement inférieur à n, on a alors $f(d) = 0$, sinon on a $\frac{nm}{d} < \frac{nm}{n} = m$ et m et $g\left(\frac{nm}{d}\right) = 0$, ce qui nous donne $(f * g)(nm) = f(n) g(m) \neq 0$ et $f * g$ est non nulle. L'anneau $(\mathcal{A}, +, *)$ est donc intègre.

(c) Si $f \in \mathcal{A}$ est inversible, il existe alors $g \in \mathcal{A}$ telle que $f * g = e$, donc $1 = e(1) = (f * g)(1) = f(1) g(1)$ et nécessairement $f(1)$ est non nul. Réciproquement si $f \in \mathcal{A}$ est telle que $f(1) \neq 0$, en définissant $g \in \mathcal{A}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} g(1) = \dfrac{1}{f(1)} \\ \forall n \geq 2,\ g(n) = \dfrac{-1}{f(1)} \displaystyle\sum_{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{n\}} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \end{cases}$$

on a $(f * g)(1) = f(1) g(1) = 1$ et :

$$(f * g)(n) = f(1) g(n) + \sum_{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{n\}} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = 0$$

pour $n \geq 2$, c'est-à-dire que $f * g = e$ et g est l'inverse de f dans $\mathcal{A}$.

7.

(a) Une fonction multiplicative vérifiant $f(1) = 1$ est inversible dans $\mathcal{A}$.

(b) On raisonne par récurrence sur l'entier $s = \alpha + m \geq 1$. Pour $s = 1$, la seule possibilité est $\alpha = 0$, $m = 1$ et on a $g(p^\alpha m) = g(m) = g(p^\alpha) g(m)$ puisque $g(1) = 1$. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $s \geq 1$, soit que pour tout couple d'entiers $(\beta, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que p ne divise pas d et $\beta + d \leq s$, on a $g\left(p^\beta d\right) = g\left(p^\beta\right) g(d)$. Pour $(\alpha, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que p ne divise pas m et $\alpha + m = s + 1$, sachant que l'application $(d, \delta) \mapsto d\delta$ réalise une bijection de $\mathcal{D}_{p^\alpha} \times \mathcal{D}_m = \left\{p^\beta,\ 0 \leq \beta \leq \alpha\right\} \times \mathcal{D}_m$ sur $\mathcal{D}_{nm}$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} g\left(p^{\alpha}m\right) &= -\sum_{d'\in\mathcal{D}_{p^{\alpha}m}\setminus\{p^{\alpha}m\}} f\left(\frac{p^{\alpha}m}{d'}\right) g\left(d'\right) \\ &= -\sum_{\substack{0\leq\beta\leq\alpha \\ d\in\mathcal{D}_m,\ p^{\beta}d\neq p^{\alpha}m}} f\left(p^{\alpha-\beta}\frac{m}{d}\right) g\left(p^{\beta}d\right) \\ &= -\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\sum_{d\in\mathcal{D}_m} f\left(p^{\alpha-\beta}\frac{m}{d}\right) g\left(p^{\beta}d\right) - \sum_{d\in\mathcal{D}_m\setminus\{m\}} f\left(\frac{m}{d}\right) g\left(p^{\alpha}d\right) \end{aligned}$$

avec $f\left(p^{\alpha-\beta}\frac{m}{d}\right) = f\left(p^{\alpha-\beta}\right) f\left(\frac{m}{d}\right)$ car f est multiplicative et $p^{\alpha-\beta}$ est premier avec $\frac{m}{d}$ pour $1 \leq \alpha-\beta \leq \alpha$ (p ne divisant pas m, ne divise pas $\frac{m}{d}$), $g\left(p^{\beta}d\right) = g\left(p^{\beta}\right) g\left(d\right)$ et $g\left(p^{\alpha}d\right) = g\left(p^{\alpha}\right) g\left(d\right)$ par hypothèse de récurrence (on a $\beta+d \leq \alpha-1+m \leq s$ et $\alpha+d < \alpha+m \leq s$), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} g\left(p^{\alpha}m\right) = &-\sum_{\beta=0}^{\alpha-1} f\left(p^{\alpha-\beta}\right) g\left(p^{\beta}\right)\left(\sum_{d\in\mathcal{D}_m} f\left(\frac{m}{d}\right) g\left(d\right)\right) \\ &- g\left(p^{\alpha}\right)\sum_{d\in\mathcal{D}_m\setminus\{m\}} f\left(\frac{m}{d}\right) g\left(d\right) \end{aligned}$$

avec $\sum_{d\in\mathcal{D}_m\setminus\{m\}} f\left(\frac{m}{d}\right) g\left(d\right) = -g\left(m\right)$ et :

$$\sum_{d\in\mathcal{D}_m} f\left(\frac{m}{d}\right) g\left(d\right) = g\left(m\right) + \sum_{d\in\mathcal{D}_m\setminus\{m\}} f\left(\frac{m}{d}\right) g\left(d\right) = 0$$

pour tout β par définition de $g = f^{-1}$. On a donc $g\left(p^{\alpha}m\right) = g\left(p^{\alpha}\right) g\left(m\right)$.

(c) On a $g\left(1\right) = 1$ et pour $n = 1$ ou $m = 1$, il est clair que $g\left(nm\right) = g\left(n\right) g\left(m\right)$. Pour $n \geq 2$ et $m \geq 2$ premiers entre eux, on a la décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ où les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts ne divisant pas m et les α_k des entiers naturels non nuls. Pour $r = 1$, la question précédente nous dit que $g\left(nm\right) = g\left(p_1^{\alpha_1}\right) g\left(m\right) = g\left(n\right) g\left(m\right)$. Et supposant acquis que $g\left(nm\right) = g\left(n\right) g\left(m\right)$ pour tous les couples d'entiers $\left(n, m\right)$ où $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, les p_k ne divisent pas m, on a pour $n = \prod_{k=1}^{r+1} p_k^{\alpha_k}$ premier avec m (avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned} g\left(nm\right) &= g\left(p_1^{\alpha_1}\right) g\left(m\prod_{k=2}^{r+1} p_k^{\alpha_k}\right) = g\left(p_1^{\alpha_1}\right) g\left(\prod_{k=2}^{r+1} p_k^{\alpha_k}\right) g\left(m\right) \\ &= g\left(p_1^{\alpha_1}\prod_{k=2}^{r+1} p_k^{\alpha_k}\right) g\left(m\right) = g\left(n\right) g\left(m\right) \end{aligned}$$

8. L'élément neutre e pour la loi $*$ est une fonction multiplicative (si $n = m = 1$, on a alors $e(nm) = 1 = e(n)e(m)$, sinon, on a $n \geq 2$ ou $m \geq 2$ et $e(nm) = 1 = e(n)e(m)$). Si f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives, on a alors, en notant $h = f * g$ leur produit de convolution, $h(1) = f(1)g(1) = 1$ et pour tous n, m dans $\mathbb{N}^*$, tenant compte du fait que l'application $(d, \delta) \mapsto d\delta$ réalise une bijection de $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ sur $\mathcal{D}_{nm}$, on a :
$$h(nm) = \sum_{d' \in \mathcal{D}_{nm}} f(d')\, g\left(\frac{nm}{d'}\right) = \sum_{(d,\delta) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m} f(d\delta)\, g\left(\frac{nm}{d\delta}\right)$$
Dans le cas où n et m sont premiers entre eux, pour tout $(d, \delta) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$, les entiers d et δ sont premiers entre eux ainsi que $\frac{n}{d}$ et $\frac{m}{\delta}$, donc :
$$\begin{aligned} h(nm) &= \sum_{(d,\delta) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m} f(d)\, f(\delta)\, g\left(\frac{n}{d}\right) g\left(\frac{m}{\delta}\right) \\ &= \sum_{d \in \mathcal{D}_n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) \left(\sum_{\delta \in \mathcal{D}_m} f(\delta)\, g\left(\frac{m}{\delta}\right) \right) \\ &= h(m) \sum_{d \in \mathcal{D}_n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = h(m)\, h(n) \end{aligned}$$
L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc stable par $*$. La question précédente nous dit que les éléments de $\mathcal{M}$ sont inversibles d'inverse dans $\mathcal{M}$. Enfin comme la loi $*$ est commutative et associative sur $\mathcal{A}$, elle l'est aussi sur $\mathcal{M}$. En conclusion $(\mathcal{M}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3.2. *Somme et produit des diviseurs d'un entier*

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$, $\tau(n) = \operatorname{card}(\mathcal{D}_n)$ le nombre de ces diviseurs, $\sigma(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} d$ la somme de ces diviseurs et $P(n) = \prod_{d \in \mathcal{D}_n} d$ le produit de ces diviseurs. Pour $n = 1$, on a $\tau(1) = \sigma(1) = P(1) = 1$.

1. *En utilisant la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$, donner une expression de $\tau(n)$.*
2. *Montrer qu'un entier $n \geq 2$ est un carré parfait si, et seulement si, $\tau(n)$ est pair.*
3. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $n+1 \leq \sigma(n) \leq n(1 + \ln(n))$, l'égalité $\sigma(n) = 1 + n$ étant réalisée si, et seulement si, n est premier.*
4. *Montrer que $P(n) = \sqrt{n}^{\tau(n)}$.*
5. *Soient p un nombre premier et α un entier naturel non nul. Calculer $\sigma(p^\alpha)$.*
6. *Soient $n \geq 2$ et $m \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.*

7. *En utilisant la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$, donner une expression de $\sigma(n)$.*
8. *Donner une condition pour que $\sigma(n)$ soit impair.*
9. *On dit qu'un entier $n \geq 2$ est parfait, s'il est la somme de ses diviseurs stricts, ce qui revient à dire que $\sigma(n) = 2n$.*
   (a) *Soient $a \geq 2$ et $p \geq 2$ deux entiers et $m = a^p - 1$. Montrer que si m est premier, on a alors $a = 2$ et p est premier. La réciproque est-elle vraie ?*
   (b) *On appelle nombre de Mersenne tout entier de la forme $2^p - 1$, où p est premier et nombre d'Euclide tout entier de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où p est un nombre premier tel que $2^p - 1$ soit premier. Montrer qu'un entier est un nombre d'Euclide si, et seulement si, il est pair et parfait (théorème d'Euler).*

Solution.

1. On a la décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, où les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k des entiers naturels non nuls. Les diviseurs positifs de l'entier n sont de la forme $d = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k}$ où les β_k sont des entiers compris entre 0 et α_k, ce qui nous dit qu'il y a $\prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1)$ tels diviseurs. En effet, en notant $I_k = \{0, \cdots, \alpha_k\}$ pour $1 \leq k \leq r$, l'application $(\beta_k)_{1 \leq k \leq r} \mapsto \prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k}$ réalise une bijection de $\prod_{k=1}^{r} I_k$ sur $\mathcal{D}_n$, ce qui implique que $\operatorname{card}(\mathcal{D}_n) = \operatorname{card}\left(\prod_{k=1}^{r} I_k\right) = \prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1)$.
2. On a les équivalences :
$$(\tau(n) \text{ est pair}) \Leftrightarrow (\text{tous les } \alpha_k \text{ sont pairs}) \Leftrightarrow (n \text{ est un carré parfait})$$
3. Comme 1 et n sont dans $\mathcal{D}_n$, on a $\sigma(n) \geq 1 + n$ et l'égalité est réalisée si, et seulement si, 1 et n sont les seuls diviseurs de n, ce qui revient à dire que n est premier. Un entier strictement positif d divise n si, et seulement si, il existe un entier q compris entre 1 et n tel que $n = qd$, ce qui nous donne :
$$\begin{aligned} \frac{\sigma(n)}{n} &= \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \frac{d}{n} = \sum_{q \in \mathcal{D}_n} \frac{1}{q} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n) \end{aligned}$$
4. Dans le cas où n n'est pas un carré parfait un entier $d \in \mathbb{N}^*$ est un diviseur de n si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = dq$ et dans ce cas, on a $d < \sqrt{n}$

si, et seulement si, $q = \dfrac{n}{d} > n$ (l'égalité $d = \sqrt{n}$ n'est pas possible), ce qui nous permet d'écrire que :

$$P(n) = \prod_{\substack{d \in \mathcal{D}_n \\ d < \sqrt{n}}} d \prod_{\substack{d \in \mathcal{D}_n \\ d < \sqrt{n}}} \frac{n}{d} = \prod_{\substack{d \in \mathcal{D}_n \\ d < \sqrt{n}}} d\frac{n}{d} = \prod_{\substack{d \in \mathcal{D}_n \\ d < \sqrt{n}}} n = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

Pour $n = m^2$ carré parfait, on a :

$$P(n) = m \prod_{\substack{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{m\} \\ d < \sqrt{n}}} d \prod_{\substack{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{m\} \\ d < \sqrt{n}}} \frac{n}{d} = n^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{d \in \mathcal{D}_n \setminus \{m\} \\ d < \sqrt{n}}} n = n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{\tau(n)-1}{2}} = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

5. Pour p premier, les diviseurs de p^α sont les entiers p^k où k est un entier compris entre 0 et α, donc $\sigma(p^\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} p^k = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$.
6. Si n et m sont premiers entre eux, leurs décompositions en facteurs premiers sont de la forme $n = \prod\limits_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ et $m = \prod\limits_{k=r+1}^{s} p_k^{\alpha_k}$, où $1 \leq r < s$, les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k des entiers naturels non nuls. Les diviseurs de nm sont donc de la forme $d = \prod\limits_{k=1}^{s} p_k^{\beta_k}$ où les β_k sont des entiers compris entre 0 et α_k. Ces diviseurs s'écrivent de manière unique $d = d'd''$, où $d' \in \mathcal{D}_n$ et $d'' \in \mathcal{D}_{nm}$, l'unicité provenant de l'unicité dans la décomposition en facteurs premiers de d, ce qui nous donne :

$$\sigma(nm) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{nm}} d = \sum_{d' \in \mathcal{D}_n} d' \left(\sum_{d'' \in \mathcal{D}_m} d'' \right) = \sigma(m) \sum_{d' \in \mathcal{D}_n} d' = \sigma(m)\, \sigma(n)$$

7. On en déduit que pour $n = \prod\limits_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$, on a $\sigma(n) = \prod\limits_{k=1}^{r} \sigma(p_k^{\alpha_k}) = \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.
8. L'entier $\sigma(n) = \prod\limits_{k=1}^{r} \sigma(p_k^{\alpha_k})$ est impair si, et seulement si, tous les $\sigma(p_k^{\alpha_k})$ sont impairs. Pour $p = 2$, $\sigma(p^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1$ est impair. Pour $p \geq 3$ premier impair, $\sigma(p^\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} p^k$ est impair si, et seulement si, le nombre de termes impairs qui forment cette somme est impair, ce qui revient à dire que $\alpha + 1$ est impair, soit que α est pair. Donc $\sigma(n)$ est impair si, et seulement si, n est de la forme $n = 2^\alpha m^{2\beta}$, où $\alpha \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$ est impair et $\alpha \in \mathbb{N}$.
9.

   (a) On a $m = a^p - 1 = (a-1) \sum\limits_{k=0}^{p-1} a^k = (a-1)\, q$. Pour $a \geq 3$, on a $a - 1 \geq 2$ et $q \geq 2$ puisque $p \geq 2$, donc m ne peut être premier. Donc $m = a^p - 1$

premier impose $a = 2$. Si p n'est pas premier, il s'écrit alors $p = qr$ avec $q \geq 2$, $r \geq 2$ et on a :

$$m = 2^{qr} - 1 = (2^q)^r - 1 = (2^q - 1) \sum_{k=0}^{r-1} (2^q)^k = (2^q - 1) s$$

avec $2^q - 1 \geq 2$ (puisque $2^q \geq 4$) et $s \geq 2$ (puisque $r \geq 2$), donc l'entier p est nécessairement premier. Pour $p = 2, 3, 5, 7$, on a $m = 3, 7, 31, 127$ qui sont premiers et pour $p = 11$, on a $m = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. La réciproque est donc fausse.

(b) Soit $n = 2^{p-1}m$ un nombre d'Euclide, où $m = 2^p - 1$ est un nombre de Mersenne premier. Cet entier est pair (car $p \geq 2$) décomposé en facteurs premiers (car m est premier impair) et ses diviseurs sont les 2^j et les $2^j m$ avec j, k compris entre 0 et $p - 1$, donc :

$$\sigma(n) = \sum_{j=0}^{p-1} 2^j + m \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = (1 + m)(2^p - 1) = 2^p m = 2n$$

Donc m est parfait. Réciproquement, soit $n = 2^\alpha m$ un nombre parfait pair ($\alpha \geq 1$ et $m \geq 1$ impair). Les diviseurs de n sont les $2^k d$, où k est compris entre 0 et α et d est un diviseur de m. Comme n est parfait, on a :

$$2n = 2^{\alpha+1}m = \sigma(n) = \sigma(2^\alpha m) = \sigma(2^\alpha)\sigma(m) = \left(2^{\alpha+1} - 1\right)\sigma(m)$$

Comme $2^{\alpha+1}$ est premier avec $2^{\alpha+1} - 1$, il divise nécessairement $\sigma(m)$, donc $\sigma(m) = 2^{\alpha+1}q$ et :

$$\left(2^{\alpha+1} - 1\right)\sigma(m) = \left(2^{\alpha+1} - 1\right)2^{\alpha+1}q = 2^{\alpha+1}m$$

soit $m = \left(2^{\alpha+1} - 1\right)q = 2^{\alpha+1}q - q = \sigma(m) - q$, donc $q = \sigma(m) - m$ est égal à la somme des diviseurs stricts de m. Mais de $m = \left(2^{\alpha+1} - 1\right)q$ avec m impair et $2^{\alpha+1} - 1 \geq 2$, on déduit que q est lui même un diviseur impair strict de m. La seule possibilité est donc $q = 1$ et $m = 2^{\alpha+1} - 1 = \sigma(m) - 1$ est premier, ce qui impose que $p = \alpha + 1$ est premier. En conclusion, $n = 2^\alpha m = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre d'Euclide.

Exercice 3.3. *Nombres de Carmichaël*

On appelle nombre de Carmichaël tout entier $n \geq 3$ non premier tel que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ pour tout entier a premier avec n.

1. *Soient a, b des entiers relatifs et $(n_k)_{1 \leq k \leq r}$ une suite finie de $r \geq 2$ entiers naturels non nuls.*

   (a) *Monter que si $a \equiv b \bmod (n_k)$ pour tout k compris entre 1 et r, on a alors $a \equiv b \bmod (n_1 \vee \cdots \vee n_r)$. Dans le cas où les n_k sont deux à deux premiers entre eux, on a $a \equiv b \bmod \left(\prod_{k=1}^{r} n_k\right)$.*

(b) *Montrer que* 561 *est un nombre de Carmichaël.*

2. *Montrer qu'un nombre de Carmichaël est sans facteur carré dans sa décomposition en nombres premiers.*
3. *Soit* $n \geq 3$ *un entier. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *il existe un entier* $r \geq 3$ *et des nombres premiers* $3 \leq p_1 < \cdots < p_r$ *tels que* $n = \prod_{j=1}^{r} p_j$ *et, pour tout indice* j *compris entre* 1 *et* r, $p_j - 1$ *divise* $n - 1$ *;*

   (b) n *est non premier et, pour tout* $x \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, *on a* $x^n = x$ *;*

   (c) n *est un nombre de Carmichaël.*
4. *Donner des exemples de nombres de Carmichaël.*

Solution.

1.

   (a) Si $a \equiv b \mod (n_k)$ pour tout k compris entre 1 et r, $b - a$ est alors un multiple commun aux n_k et en conséquence de $n_1 \vee \cdots \vee n_r$, ce qui signifie que $a \equiv b \mod (n_1 \vee \cdots \vee n_r)$. Dans le cas où les n_k sont deux à deux premiers entre eux, on a $n_1 \vee \cdots \vee n_r = \prod_{k=1}^{r} n_k$.

   (b) $n = 561$ est divisible par 3 (car $1+6+5 = 12$) et par 11 (car $1-6+5 = 0$). Précisément, on a la décomposition en facteurs premiers $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17 = \prod_{k=1}^{3} p_k$. Dire que a est premier avec 561 équivaut à dire qu'il est premier avec chaque p_k et le théorème de Fermat nous dit que $a^{p_k - 1} \equiv 1 \mod (p_k)$ et en remarquant que 560 est divisible par chaque $p_k - 1$ ($560 = 2 \cdot 280 = 10 \cdot 56 = 16 \cdot 35$), on en déduit que $a^{560} \equiv 1 \mod (p_k)$ pour $k = 1, 2, 3$ et la question précédente nous dit que $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

2. Soit n un nombre de Carmichaël. Supposons que n admette un facteur carré, c'est-à-dire qu'il existe un nombre premier $p \geq 3$ (n est impair) et un entier $q \geq 1$ tels que $n = p^2 q$. Avec $(1 + pq)(1 - pq) = 1 - p^2 q^2 = 1 - qn \equiv 1 \pmod{n}$, on déduit que $x = \overline{1 + pq} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est inversible d'inverse $\overline{1 - pq}$. Comme $pq \not\equiv 0 \pmod{n}$ ($n = p^2 q$ ne peut diviser pq), on a $x \neq \overline{1}$ et avec :

$$(1 + pq)^p = 1 + p^2 q + p^2 q \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} p^{k-2} q^{k-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

on déduit que x est d'ordre p dans $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{\times}$. Comme n est un nombre de Carmichaël, on a $x^{n-1} = \overline{1}$ et l'ordre p de x va diviser $n - 1 = p^2 q - 1$, ce qui est impossible. En conclusion, n est sans facteur carré.

3.

$(a) \Rightarrow (b)$ Soit $n = \prod_{j=1}^{r} p_j$, où $r \geq 3$, $3 \leq p_1 < \cdots < p_r$ sont premiers tels que chaque $p_j - 1$, pour j compris entre 1 et r, divise $n - 1$. Un tel entier, produit d'au moins trois nombres premiers est non premier. Soit $x = \overline{k} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ avec $k \in \{1, \cdots, n\}$. Pour tout j compris entre 1 et r, on a deux possibilités : soit p_j divise k et dans ce cas, il divise aussi k^n, donc $k^n \equiv k \equiv 0 \pmod{p_j}$; soit p_j ne divise pas k et dans ce cas, il est premier avec k, donc $k^{p_j - 1} \equiv 1 \pmod{p_j}$ (théorème de Fermat) et comme $n - 1$ est multiple de $p_j - 1$, on a aussi $k^{n-1} \equiv 1 \pmod{p_j}$ et $k^n \equiv k \pmod{p_j}$. On a donc, dans tous les cas, $k^n \equiv k \pmod{p_j}$ et en conséquence $k^n \equiv k \pmod{n}$ puisque

$$n = \prod_{j=1}^{r} p_j = \underset{1 \leq j \leq r}{\operatorname{ppcm}} (p_j) .$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Supposons que n soit non premier et que $x^n = x$ pour tout $x \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Pour $x \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{\times}$, on peut simplifier par x et on obtient $x^{n-1} = \overline{1}$. L'entier n est donc de Carmichaël.

$(c) \Rightarrow (a)$ Si n est un nombre de Carmichaël, il est alors sans facteur carré et comme il est non premier, il s'écrit $n = \prod_{j=1}^{r} p_j$, avec $r \geq 2$ et $3 \leq p_1 < \cdots < p_r$ premiers. Pour tout j compris entre 1 et r le groupe multiplicatif $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p_j\mathbb{Z}}\right)^{*}$ est cyclique d'ordre $p_j - 1$, donc il existe un élément x_j d'ordre $p_j - 1$ dans $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p_j\mathbb{Z}}\right)^{*}$ et comme n est de Carmichaël, on a aussi $x_j^{n-1} = \overline{1}$, donc l'ordre $p_j - 1$ de x_j divise $n - 1$. Il reste enfin à montrer que $r \geq 3$. Supposons que $n = p_1 p_2$ avec $3 \leq p_1 < p_2$ premiers tels que $p_i - 1$ divise $n - 1$ pour $i = 1, 2$. En écrivant que $n - 1 = (p_1 - 1) + p_1 (p_2 - 1)$, on déduit que $n - 1$ ne peut être divisible par $p_2 - 1$, en effet si $p_2 - 1$ divise $n - 1$ il divise $p_1 - 1$ avec $p_1 < p_2$, ce qui est impossible. En conséquence un nombre de Carmichaël a au moins trois facteurs premiers.

4. Par exemple $561 = 3 \times 11 \times 17$, $1105 = 5 \times 13 \times 17$ et $1729 = 7 \times 13 \times 19$ sont des nombres de Carmichaël puisque $560 = 2 \cdot 280 = 10 \cdot 56 = 16 \cdot 35$, $1104 = 4 \cdot 276 = 12 \cdot 92 = 16 \cdot 69$ et $1728 = 6 \cdot 288 = 12 \cdot 144 = 18 \cdot 96$. On a aussi les nombres $2465 = 5 \times 7 \times 29$, $2821 = 7 \times 13 \times 31$, $6601 = 7 \times 23 \times 41$ et $8911 = 7 \times 19 \times 67$.

Exercice 3.4. *Tests de primalité de Lehmer et de Lucas*

Soit $n \geq 3$ un entier.

1. *Montrer que n est premier si, et seulement si, $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est un corps.*
2. *On suppose que n est premier et on utilise la décomposition en nombres premiers $n-1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, où les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k des entiers naturels non nuls (on a $n-1 \geq 2$).*
   (a) *Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et r, il existe $\overline{a}$ dans $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ tel que $\overline{a}^{\frac{n-1}{p_k}} \neq \overline{1}$.*
   (b) *En notant $q_k = p_k^{\alpha_k}$ pour $1 \leq k \leq r$, montrer que $\overline{b} = \overline{a}^{\frac{n-1}{q_k}}$ est d'ordre q_k dans le groupe multiplicatif $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$.*
   (c) *Montrer que le groupe multiplicatif $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ est cyclique.*
3. *Montrer que n est premier si, et seulement si, il existe un entier relatif a tel que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et, pour tout diviseur strict d de $n-1$, on a $a^d \not\equiv 1 \pmod{n}$ (test de primalité de Lehmer).).*
4. *Montrer que n est premier si, et seulement si, pour tout diviseur premier p de $n-1$, il existe un entier a tel que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$, (test de primalité de Lucas-Lehmer).).*

Solution.

1. $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est un corps si, et seulement si, pour tout entier a compris entre 1 et $n-1$, $\overline{a}$ est inversible dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $\overline{b} \in \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ tel que $\overline{a}\overline{b} = \overline{1}$, ce qui est encore équivalent à dire qu'il existe b, q dans $\mathbb{Z}$ tels que $ab + qn = 1$ et revient à dire que a et n sont premiers entre eux (théorème de Bézout). On conclut en remarquant que n est premier si, et seulement si, tout entier a compris entre 1 et $n-1$ est premier avec n.
2.
   (a) Le polynôme $X^{\frac{n-1}{p_k}} - \overline{1}$ a au plus $\dfrac{n-1}{p_k}$ racines dans le corps $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et ces racines sont non nulles. Comme $\dfrac{n-1}{p_k} < n-1 = \mathrm{card}\left(\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*\right)$, il existe nécessairement un élément $\overline{a}$ de $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ tel que $\overline{a}^{\frac{n-1}{p_k}} \neq \overline{1}$.
   (b) On a $\overline{b}^{q_k} = \overline{a}^{n-1} = \overline{1}$ (petit théorème de Fermat), donc l'ordre de $\overline{b}$ divise $q_k = p_k^{\alpha_k}$. Si cet ordre est différent de q_k, on a alors $\overline{b}^{p_k^{\alpha_k - 1}} = \overline{1}$ (cet ordre est p_k^{β} avec $1 \leq \beta \leq \alpha_k - 1$, donc $\overline{b}^{p_k^{\alpha_k - 1}} = \left(\overline{b}^{p_k^{\beta}}\right)^{p_k^{\alpha_k - 1 - \beta}} = \overline{1}$), ce qui est

incompatible avec $\overline{b}^{p_k^{\alpha_k-1}} = \left(\overline{a}^{\frac{n-1}{p_k^{\alpha_k}}}\right)^{p_k^{\alpha_k-1}} = \overline{a}^{\frac{n-1}{p_k}} \neq \overline{1}$. Donc $\overline{b} = \overline{a}^{\frac{n-1}{q_k}}$ est d'ordre $p_k^{\alpha_k}$.

(c) Pour tout entier k compris entre 1 et r, on dispose d'un élément $\overline{b}_k$ d'ordre $q_k = p_k^{\alpha_k}$ dans le groupe commutatif $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$, donc $\overline{b} = \overline{b}_1 \cdots \overline{b}_r$ est d'ordre $\operatorname{ppcm}(q_1, \cdots, q_r) = q_1 \cdots q_r = n-1$, ce qui implique que $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ est cyclique.

3. Si l'entier n est premier, l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est alors un corps et le groupe multiplicatif $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ est cyclique d'ordre $n-1$. Il existe donc $\overline{a}$ dans $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ d'ordre $n-1$, ce qui signifie que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et $a^d \not\equiv 1 \pmod{n}$ pour tout diviseur strict d de $n-1$. Réciproquement, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et $a^d \not\equiv 1 \pmod{n}$ pour tout diviseur strict d de $n-1$. En notant $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^\times$ l'ensemble de tous les éléments inversibles de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$, on a déjà $\varphi(n) = \operatorname{card}\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^\times \leq \operatorname{card}\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^* = n-1$. Comme $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, on a $\overline{a} \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^\times$ et son ordre m divise $n-1$, donc $m = n-1$ (sinon m est un diviseur strict d de $n-1$ et on a $\overline{a}^m \neq \overline{1}$). On a donc $m = n-1$ qui divise $\varphi(n)$, ce qui entraîne $\varphi(n) = n-1$, donc $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est un corps et n est premier.

4. Comme pour la question précédente, pour n premier on dispose d'un élément $\overline{a}$ de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$ d'ordre $n-1$ et on a alors $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$ pour tout diviseur premier p de $n-1$. Réciproquement, supposons que pour tout diviseur premier p de $n-1$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$. Il s'agit alors de montrer que $\varphi(n) = n-1$. On a déjà $\varphi(n) \leq n-1$. Notons $n-1 = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de $n-1$ où les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k des entiers naturels non nuls (on a $n-1 \geq 2$). Par hypothèse, pour tout entier k compris entre 1 et r, il existe un entier a_k tel que $\overline{a}_k^{n-1} = \overline{1}$ et $\overline{a}_k^{\frac{n-1}{p_k}} \neq \overline{1}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Donc chaque $\overline{a_k}$ est dans $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^\times \setminus \{\overline{1}\}$ d'ordre $m_k \geq 2$ qui divise $n-1$, ce qui nous donne $m_k = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\beta_{k,j}}$, où $0 \leq \beta_{k,j} \leq \alpha_j$ pour tout j compris entre 1 et r. Si $\beta_{k,k} \leq \alpha_k - 1$, l'entier $\frac{n-1}{p_k} = p_k^{\alpha_k-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} p_j^{\alpha_j}$ est alors multiple de m_k et

$\overline{a}_k^{\frac{n-1}{p_k}} = \overline{1}$, ce qui n'est pas. On a donc $\beta_{k,k} = \alpha_k$, ce qui signifie que $p_k^{\alpha_k}$ divise m_k. Comme chaque m_k divise aussi $\varphi(n)$, on déduit que $\varphi(n)$ est multiple de tous les $p_k^{\alpha_k}$, donc de leur ppcm qui vaut $n-1$. En conclusion $\varphi(n) = n-1$ et n est premier.

Exercice 3.5. *Un théorème de Cauchy*

Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal $n \geq 2$, p un entier compris entre 1 et n et $E_p = \{(g_1, \cdots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$.

1. *Montrer que* $\operatorname{card}(E_p) = n^{p-1}$.
2. *En désignant par H le sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_p$ engendré par le p-cycle $\gamma = (1, 2, \cdots, p)$, montrer que l'application :*

$$(\sigma, (g_1, \cdots, g_p)) \in H \times E_p \mapsto \sigma \cdot (g_1, \cdots, g_p) = \left(g_{\sigma(1)}, \cdots, g_{\sigma(p)}\right)$$

   définit une action du groupe H sur l'ensemble E_p.
3. *Pour p premier, calculer le cardinal d'une orbite $H \cdot g$ pour cette action de groupe.*
4. *Dans le cas où p est un diviseur premier de n, montrer que l'ensemble $E_p^H = \{g \in E_p \mid \operatorname{card}(H \cdot g) = 1\}$ est de cardinal divisible par p.*
5. *Déduire de ce qui précède, que pour tout diviseur premier p de n, il existe dans G un élément d'ordre p (théorème de Cauchy).*
6. *On suppose que tout élément de $G \setminus \{1\}$ est d'ordre égal à 2. Montrer que G est commutatif et qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que* $\operatorname{card}(G) = 2^r$.
7. *On suppose que le groupe G est commutatif d'ordre $n = p_1 \cdots p_r$, où $2 \leq p_1 < \cdots < p_r$ sont premiers. Montrer que G est cyclique.*
8. *On suppose que G est commutatif et on désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que si n est premier avec $\varphi(n)$, alors G est cyclique. Réciproquement, on peut montrer que la réciproque est vrai, c'est-à-dire qu'un entier $n \geq 2$ est premier avec $\varphi(n)$, si, et seulement si, tout groupe commutatif d'ordre n est cyclique.*

Solution.

1. Pour $p = 1$, on a $E_1 = \{1\}$ qui est de cardinal $n^{p-1} = 1$ et pour p compris entre 2 et n, l'application $(g_1, \cdots, g_{p-1}) \mapsto \left(g_1, \cdots, g_{p-1}, (g_1 \cdots g_{p-1})^{-1}\right)$ est bijective de G^{p-1} sur E_p (de l'égalité $g_1 \cdots g_p = 1$, on déduit que la connaissance des g_k pour $1 \leq k \leq p-1$ détermine g_p de manière unique). On a donc $\operatorname{card}(E_p) = n^{p-1}$.
2. Le cycle γ étant d'ordre égal à p, on a $H = \langle \gamma \rangle = \left\{1, \gamma, \cdots, \gamma^{p-1}\right\}$. Pour tout $g = (g_k)_{1 \leq k \leq p} \in E_p$, on a $\left(\prod_{k=2}^{p} g_k\right) g_1 = g_1^{-1} g_1 = 1$, ce qui implique que $\gamma \cdot g = (g_2, \cdots, g_p, g_1) \in E_p$. Il en résulte que pour tout entier k compris entre

0 et $p-1$, on a $\left(g_{\gamma^k(1)},\cdots,g_{\gamma^k(p)}\right)\in E_p$ et l'application :

$$(\sigma,(g_1,\cdots,g_p))\mapsto\left(g_{\sigma(1)},\cdots,g_{\sigma(p)}\right)$$

est à valeurs dans E_p. Cette application définit bien une action de groupe de H sur E_p car $Id\cdot(g_1,\cdots,g_p)=(g_1,\cdots,g_p)$ et pour j,k entiers compris entre 1 et p, on a :

$$\begin{aligned}\gamma^j\cdot\left(\gamma^k\cdot(g_1,\cdots,g_p)\right)&=\gamma^j\cdot\left(g_{\gamma^k(1)},\cdots,g_{\gamma^k(p)}\right)=\left(g_{\gamma^{j+k}(1)},\cdots,g_{\gamma^{k+j}(p)}\right)\\&=\gamma^{j+k}\cdot(g_1,\cdots,g_p)=\left(\gamma^j\circ\gamma^k\right)\cdot(g_1,\cdots,g_p)\end{aligned}$$

3. En notant $H\cdot g$ l'orbite d'un élément g de E_p et H_g son stabilisateur, on a $\operatorname{card}(H\cdot g)=\dfrac{\operatorname{card}(H)}{\operatorname{card}(H_g)}$ avec $\operatorname{card}(H)=p$, donc $\operatorname{card}(H\cdot g)$ vaut 1 ou p dans le cas où p est premier.
4. L'ensemble E_p^H est non vide puisqu'il contient $(1,\cdots,1)$. En notant $\mathcal{O}_1,\cdots,\mathcal{O}_r$ les orbites deux à deux distinctes, l'équation des classes nous dit que :

$$\begin{aligned}n^{p-1}&=\operatorname{card}(E_p)=\sum_{j=1}^r\operatorname{card}(\mathcal{O}_j)\\&=\operatorname{card}\left(E_p^H\right)+\sum_{\substack{j=1\\\operatorname{card}(\mathcal{O}_j)\geq 2}}^r\operatorname{card}(\mathcal{O}_j)\equiv\operatorname{card}\left(E_p^H\right)\pmod p\end{aligned}$$

puisque $\operatorname{card}(\mathcal{O}_j)=p$ pour $\mathcal{O}_j$ non réduit à un élément. Pour p premier divisant n, on en déduit que $\operatorname{card}\left(E_p^H\right)\equiv 0\pmod p$.
5. De $\operatorname{card}\left(E_p^H\right)\geq 1$ divisible par p, on déduit que $\operatorname{card}\left(E^H\right)\geq p\geq 2$ et remarquant que $g=(g_k)_{1\leq k\leq p}\in E_p^H$ équivaut à dire que $g_1=\cdots=g_p$ avec $g_1\in G$ tel que $g_1^p=1$, on déduit qu'il existe $g_1\neq 1$ tel que $g_1^p=1$, ce qui signifie que g_1 est d'ordre p puisque p est premier. Le groupe $\langle g_1\rangle$ est alors un sous-groupe d'ordre p de G.
6. Dire que tous les éléments de G sont d'ordre au plus égal à 2, revient à dire que l'on a $g^2=1$, ou encore que $g=g^{-1}$, pour tout $g\in G$. Il en résulte que pour tous g_1,g_2 dans G, on a $g_1g_2=(g_1g_2)^{-1}=g_2^{-1}g_1^{-1}=g_2g_1$, donc G est commutatif (ici le fait que G soit fini n'intervient pas). Notons $\operatorname{card}(G)=2^rm$ avec $r\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}^*$ impair. Si $m=1$, c'est terminé, sinon, il admet un diviseur premier $p\geq 3$ et le théorème de Cauchy nous dit qu'il existe dans $G\setminus\{1\}$ un élément d'ordre p, ce qui contredit le fait que tous ses éléments sont d'ordre 2.
7. Le théorème de Cauchy nous dit que, pour tout k compris entre 1 et r, il existe dans G un élément g_k d'ordre p_k et pour G commutatif, $g_1\cdots g_r$ est d'ordre $n=p_1\cdots p_r$, ce qui implique que G est cyclique.
8. En utilisant la décomposition en facteurs premiers $n=\prod_{k=1}^r p_k^{\alpha_k}$, où les p_k sont premiers deux à deux distincts et $\alpha_k\in\mathbb{N}^*$ pour tout k compris entre 1 et n

et sachant que $\varphi(n) = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$, on déduit que si $\varphi(n)$ est premier avec n, alors tous les α_k valent 1 (sinon l'un des p_k divise $\varphi(n)$ et n) et G est cyclique d'après la question précédente.

Exercice 3.6. *Fonction ζ de Riemann et probabilités*

On se fixe un réel $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_s)$, où $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s}$ pour tout $n \in \Omega$, en désignant par ζ la fonction de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ ($\mathbb{P}_s$ est la loi dzéta de paramètre s). Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'ensemble de tous les multiples strictement positifs de n.

1. *Calculer $\mathbb{P}_s(A_n)$ pour tout entier $n \geq 1$.*
2. *En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, montrer que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est indépendante, c'est-à-dire que pour toute suite finie $(p_k)_{1\leq k\leq r}$ de nombres premiers distincts, les événement $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.*
3. *En déduire que $\mathbb{P}_s(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$, puis l'identité d'Euler :*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Solution.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}_s(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_s(\{k \cdot n\}) = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}$.
2. Pour $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ dans $\mathcal{P}$, comme les p_k sont premiers entre eux, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{p_k}\right) &= \mathbb{P}_s\{\text{multiples de } p_1, p_2, \cdots, p_r\} \\
&= \mathbb{P}_s\left\{\text{multiples de } \prod_{k=1}^{r} p_k\right\} = \mathbb{P}\left(A_{\prod\limits_{k=1}^{r} p_k}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{r} p_k\right)^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}_s(A_{p_k})
\end{aligned}$$

et les événement $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. Comme 1 n'est divisible par aucun nombre premier, on a $\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s(\{1\}) &= \mathbb{P}_s\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{P}_s(\Omega \setminus A_p) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - \mathbb{P}_s(A_p)) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$, il en résulte que $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

Chapitre 4

Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles

Exercice 4.1. *Irréductibilité de* $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)-1$ *et* $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)^2+1$ *dans* $\mathbb{Z}[X]$

Soient $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite de* n *entiers relatifs deux à deux distincts et* P, Q *les polynômes définis par :*

$$P(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)-1 \text{ et } Q(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)^2+1$$

1. *Montrer que* P *et* Q *sont irréductibles dans* $\mathbb{Z}[X]$.
2. *En admettant le résultat de la question* **??** *de l'exercice* **??**, *montrer que, pour tout entier* $n\geq 2$, *il existe des matrices non trigonalisables dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Solution.

1.

(a) Si P est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$, il existe alors deux polynômes unitaires R,S dans $\mathbb{Z}[X]$ de degrés compris entre 1 et $n-1$ tels que $P=RS$. Pour tout entier k compris entre 1 et n, on a $R(a_k)S(a_k)=P(a_k)=-1$ dans $\mathbb{Z}^*$, donc $R(a_k)=-S(a_k)=\pm1$ et en conséquence, $(R+S)(a_k)=0$. Le polynôme $R+S$ est donc nul dans $\mathbb{Q}[X]$ puisque de degré au plus égal à $n-1$ avec n racines distinctes, ce qui nous donne $P=-R^2$, ce qui n'est pas possible pour P unitaire.

(b) Si Q est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$, il existe alors deux polynômes unitaires R,S dans $\mathbb{Z}[X]$ de degrés compris entre 1 et $2n-1$ tels que $Q=RS$. L'un de ces polynômes étant de degré au plus égal à n, on peut supposer que $\deg(R)\leq n$ et $\deg(S)=2n-\deg(R)\geq n$. Pour tout entier k compris entre 1 et n, on a $R(a_k)S(a_k)=Q(a_k)=1$ dans $\mathbb{Z}^*$, donc $R(a_k)=S(a_k)=\varepsilon=\pm1$. Le polynôme $R-\varepsilon$ s'annule donc en n points distincts et étant de degré au plus égal à n, il est forcément de degré n ainsi que S. On a donc $R(X) - \varepsilon = S(X) - \varepsilon = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 1 = Q(X) - \left(\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)\right)^2 &= R(X)\,S(X) - \left(\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)\right)^2 \\ = \left(\varepsilon + \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)\right)^2 - \left(\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)\right)^2 &= \varepsilon\left(\varepsilon + 2\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)\right) \end{aligned}$$

ce qui n'est pas possible.

2. Sachant qu'un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, on déduit que P est irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et pour $n \geq 2$, sa matrice compagnon $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ n'est pas trigonalisable car son polynôme caractéristique qui est égal à P ne peut avoir de racines dans $\mathbb{Q}$.

Chapitre 5

Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang

Exercice 5.1. *Polynôme annulateur d'un endomorphisme de rang égal à r*

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang r. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de u de degré $r+1$ (ce qui implique que le polynôme minimal de u est de degré au plus égal à $r+1$).

Solution. Pour $r = 0$, on a $u = 0$ et le polynôme minimal de u est $\pi_u(X) = X$. Pour $r = n$, le polynôme caractéristique P_u de u qui est de degré n annule u (théorème de Cayley-Hamilton) et XP_u convient. Pour $1 \leq r \leq n-1$, en désignant par v la restriction de u à $\operatorname{Im}(u)$, on définit un endomorphisme de $\operatorname{Im}(u)$ et son polynôme caractéristique $P_v(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ qui est de degré r annule v (théorème de Cayley-Hamilton). Pour tout $x \in E$, on a alors :

$$0 = P_v(v)(u(x)) = P_v(u)(u(x)) = \sum_{k=0}^{r} a_k u^{k+1}(x)$$

ce qui signifie que le polynôme $XP_v(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^{k+1}$ qui est de degré $r+1$ annule u.

Exercice 5.2. *Application classique du théorème du rang*

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\left(\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)\right) \Leftrightarrow \left(\ker(u) = \ker\left(u^2\right)\right)$$

Que se passe–t–il en dimension infinie ?

Solution.

1. On a toujours $\operatorname{Im}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset \ker\left(u^2\right)$, donc :

$$\left(\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}\left(u^2\right)\right)$$

et :

$$\left(\ker(u) = \ker\left(u^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\dim(\ker(u)) = \dim\left(\ker\left(u^2\right)\right)\right)$$

D'autre part, le théorème du rang nous dit que :

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \operatorname{rg}(u) = \dim\left(\ker\left(u^2\right)\right) + \operatorname{rg}\left(u^2\right)$$

ce qui permet de déduire que :

$$\left(\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\ker(u) = \ker\left(u^2\right)\right)$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\left(\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)\right) \Leftrightarrow (E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u))$$

Si $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$, pour tout x dans E, il existe y dans E tel que $u(x) = u^2(y)$, donc $x - u(y) \in \ker(u)$ et $x = (x - u(y)) + u(y) \in \ker(u) + \operatorname{Im}(u)$. On a donc $E = \ker(u) + \operatorname{Im}(u)$ et avec le théorème du rang, on déduit que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$. Si $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$, tout $x \in \ker\left(u^2\right)$ s'écrit alors $x = x_1 + u(x_2)$ avec $u(x_1) = 0$ et $0 = u^2(x) = u^3(x_2)$ entraîne que $u^2(x_2) \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$, donc $u(x_2) \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$ et $x = x_1 \in \ker(u)$. On a donc $\ker\left(u^2\right) \subset \ker(u)$ et $\ker(u) = \ker\left(u^2\right)$, ce qui équivaut à $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$.

2. En général, $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$ n'entraîne pas $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. En considérant $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \longmapsto P'$, on a $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right) = \mathbb{R}[X]$ (u est surjective) et $\ker(u) = \mathbb{R} \subset \operatorname{Im}(u)$. $\ker(u) = \ker\left(u^2\right)$ n'entraîne pas $E = \ker(u) + \operatorname{Im}(u)$. En considérant $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \longmapsto XP$, on a $\ker(u) = \ker\left(u^2\right) = \{0\}$ (u est injective) et $\operatorname{Im}(u) \neq \mathbb{R}[X]$. Enfin les exemples qui précèdent montrent que $\ker(u) = \ker\left(u^2\right)$ et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$ ne sont pas équivalents.

Exercice 5.3. *Rang et passage au quotient*

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Justifier la définition de $\overline{u} \in \mathcal{L}\left(\dfrac{E}{F}\right)$ par $\overline{u}(\overline{x}) = \overline{u(x)}$ pour tout $x \in E$, puis montrer que $\operatorname{rg}(\overline{u}) \leq \operatorname{rg}(u)$.

Solution. Pour $F = \{0\}$, on a $\dfrac{E}{F} = E$ et $\overline{u} = u$, donc $\operatorname{rg}(\overline{u}) = \operatorname{rg}(u)$ et pour $F = E$, on a $\dfrac{E}{F} = \left\{\overline{0}\right\}$ et $\overline{u} = 0$, donc $\operatorname{rg}(\overline{u}) = 0 \leq \operatorname{rg}(u)$. On suppose donc que F est de dimension p comprise entre 1 et $n - 1$ avec $n \geq 2$.

1. Si x, y dans E, sont tels que $\overline{x} = \overline{y}$, on a alors $z = y - x \in F$ et $u(y) - u(x) = u(z) \in F$ car F est stable par u, donc $\overline{u(x)} = \overline{u(y)}$. L'application $\overline{u}$ est donc bien définie de $\dfrac{E}{F}$ dans $\dfrac{E}{F}$. Pour tous x, y dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\overline{u}\left(\overline{x} + \lambda\overline{y}\right) = \overline{u}\left(\overline{x + \lambda y}\right) = \overline{u(x + \lambda y)} = \overline{u(x) + \lambda u(y)} = \overline{u}\left(\overline{x}\right) + \lambda\overline{u}\left(\overline{y}\right)$$
ce qui signifie que $\overline{u} \in \mathcal{L}\left(\dfrac{E}{F}\right)$.
2. L'application $\pi : x \in E \mapsto \overline{x} \in \dfrac{E}{F}$ est linéaire, surjective, de noyau F, donc le théorème du rang nous dit que $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(\dfrac{E}{F}\right)$. Ce dernier résultat peut aussi se montrer directement comme sui. En complétant une base $(e_k)_{1\leq k\leq p}$ de F en une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq n}$ de E, on vérifie que $\overline{\mathcal{B}} = \left(\overline{e_k}\right)_{p+1\leq k\leq n}$ est une base de $\dfrac{E}{F}$. En effet, tout élément de $\dfrac{E}{F}$ s'écrit $\overline{x} = \overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k} = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} x_k \overline{e_k}$, donc $\overline{\mathcal{B}}$ engendre $\dfrac{E}{F}$ et l'égalité $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} x_k \overline{e_k} = \overline{0}$ équivaut à $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} x_k e_k \in F \cap G$, où $G = \operatorname{Vect}(e_k)_{p+1\leq k\leq n}$, ce qui nous donne $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} x_k e_k = 0$ puisque $F \cap G = \{0\}$ et donc $x_k = 0$ pour tout k compris entre $p+1$ et n, ce qui signifie que la famille $\overline{\mathcal{B}}$ est libre. En conclusion $\overline{\mathcal{B}}$ est une base de $\dfrac{E}{F}$ et $\dim\left(\dfrac{E}{F}\right) = n - p = \dim(E) - \dim(F)$.
3. En désignant par $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, on vérifie que celle de $\overline{u}$ dans la base $\overline{\mathcal{B}}$ est $\overline{A} = ((a_{ij}))_{p+1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. En effet, pour $p + 1 \leq j \leq n$, on a $\overline{u}\left(\overline{e_j}\right) = \overline{u(e_j)} = \overline{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i} = \displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} a_{ij}\overline{e_i}$. Il en résulte que $\operatorname{rg}(\overline{u}) = \operatorname{rg}\left(\overline{A}\right) \leq \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(u)$ puisque la matrice $\overline{A}$ est extraite de A.

Exercice 5.4. *Quelques applications d'une caractérisation des matrices de rang r*

1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et r un entier compris entre 1 et n. En notant I_r la matrice identité d'ordre r, montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$.*

2. *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq (\det(A))^2$$

3. *Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique.*
4. *Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*
5. *Montrer que pour tout entier r compris entre 1 et n, l'ensemble $\mathcal{A}_r$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r est connexe par arcs.*
6. *Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

Solution.

1. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de rang r, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, H un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $\mathbb{K}^n$, donc de dimension r, $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{1\leq i\leq r}$ une base de H et $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(u)$. La famille $u(\mathcal{B}_1) = (u(e_k))_{1\leq k\leq r}$ est alors libre dans $\mathbb{K}^n$ (si $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k u(e_k) = 0$, on a alors $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k e_k \in H \cap \ker(u) = \{0\}$ et tous les λ_k sont nuls du fait que $\mathcal{B}_1$ est libre) et il se complète en une base $\mathcal{B}' = (u(e_1), \cdots, u(e_r), f_{r+1}, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$. La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'$ a alors la forme indiquée. D'où le résultat. La réciproque est évidente.
2. Pour $H = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a en notant $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A et $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1,1} \end{pmatrix}$ la première colonne de A_1 :

$$\begin{aligned}\det(A \pm H) &= \det(C_1 \pm E_1, C_2, \cdots, C_n) = \det(C_1, C_2, \cdots, C_n) \pm \det(E_1, C_2, \cdots, C_n) \\ &= \det(A) \pm \det(A_{11})\end{aligned}$$

(linéarité du déterminant par rapport à la première colonne), où A_{11} est la matrice extraite de A en supprimant la première ligne et la première colonne, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\det(A+H)\det(A-H) &= (\det(A) + \det(A_{11}))(\det(A) - \det(A_{11})) \\ &= (\det(A))^2 - (\det(A_{11}))^2 \leq (\det(A))^2\end{aligned}$$

Pour H de rang 1, on a $H = PA_1Q$ avec P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ et :

$$\det(A \pm H) = \det\left(P\left(P^{-1}AQ^{-1} \pm A_1\right)Q\right) = \det(P)\det(Q)\det\left(P^{-1}AQ^{-1} \pm A_1\right)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\det(A+H)\det(A-H) &= \det{}^2(P)\det{}^2(Q)\det\left(P^{-1}AQ^{-1} + A_1\right)\det\left(P^{-1}AQ^{-1} - A_1\right) \\ &\leq \det{}^2(P)\det{}^2(Q)\det{}^2\left(P^{-1}AQ^{-1}\right) = (\det(A))^2\end{aligned}$$

3. Pour $A = 0$ ou $B = 0$, le résultat est évident. On suppose donc A et B non nulles. Pour $A = A_r$ avec r compris entre 1 et n, en écrivant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in M_r(\mathbb{K})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, on a $AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ B_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{aligned} P_{AB}(X) &= \det(XI_n - AB) = X^{n-r}\det(XI_r - B_1) \\ &= \det(XI_n - BA) = P_B(X) \end{aligned}$$

Pour A de rang r, on a $A = PA_rQ$ avec P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ et :

$$P_{AB} = P_{P(A_rQBP)P^{-1}} = P_{A_r(QBP)} = P_{(QBP)A_r} = P_{Q(BPA_rQ)Q^{-1}} = P_{BA}$$

4. Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T = ((m_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ telles que $A = PTP^{-1}$. On note, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $m_{jj} = \rho_j e^{i\theta_j}$ avec $\rho_j > 0$ et on définit un chemin continu $\gamma : [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall t \in [0,1], \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(t) & \gamma_{12}(t) & \cdots & \gamma_{1n}(t) \\ 0 & \gamma_{22}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1,n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

où :

$$\gamma_{ij}(t) = \begin{cases} t\,m_{ij} \text{ si } 1 \leq i < j \leq n \\ (1-t)\,e^{it\,\theta_j} + t\,m_{jj} \text{ si } i = j \end{cases}$$

On a alors $\gamma(0) = I_n$, $\gamma(1) = T$ et $\varphi : t \mapsto P\gamma(t)P^{-1}$ est un chemin continu qui relie la matrice identité à la matrice A dans $GL_n(\mathbb{C})$.

5. Pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_r$, il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PA_rQ$. Si γ_1 et γ_2 sont deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $\gamma_1(0) = I_n$, $\gamma_2(0) = I_n$, $\gamma_1(1) = P$, $\gamma_2(1) = Q$ (connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$), alors $\gamma : t \mapsto \gamma_1(t)A_r\gamma_2(t)$ est un chemin continu qui relie A_r et A dans $\mathcal{A}_r$. Ce qui prouve que $\mathcal{A}_r$ est connexe par arcs. On peut aussi dire que $\mathcal{A}_r$ est connexe comme image du connexe $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ par l'application continue $\varphi : (P,Q) \mapsto PA_rQ$.

6. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang r. Si $r = 0$, on a alors $A = 0 = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k}I_n$. Si $r > 0$, il existe alors deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PA_rQ$. On a alors $A = \lim\limits_{k\to+\infty} PM_kQ$, avec $M_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \frac{1}{k}I_{n-r} \end{pmatrix}$. Dans tous les cas on peut écrire A comme limite d'une suite de matrices inversibles. Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5.5. *Rang et dualité*

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'espace E étant de dimension finie.

1. *Montrer que $u \in \mathcal{L}(E,F) \setminus \{0\}$ est de rang r si, et seulement si, il existe des formes linéaires $(\varphi_k)_{1\leq k\leq r}$ linéairement indépendantes dans E^* et des vecteurs $(y_k)_{1\leq k\leq r}$ linéairement indépendants dans F tels que $u(x) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(x) y_k$ pour tout $x \in E$. Dans ce cas, vérifier que l'on a $\ker(u) = \bigcap_{k=1}^{r} \ker(\varphi_k)$ et $\operatorname{Im}(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbb{K} y_k$.*
2. *On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. Montrer que tout endomorphisme de E peut s'écrire comme somme de deux automorphismes.*

Solution.

1. Si $\operatorname{rg}(u) = r \geq 1$, son image $\operatorname{Im}(u)$ est alors de dimension r et en désignant par $(y_k)_{1\leq k\leq r}$ une base de $\operatorname{Im}(u)$, on peut trouver, pour tout $x \in E$, des scalaires $(\varphi_k(x))_{1\leq k\leq r}$ tels que $u(x) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(x) y_k$. L'unicité de l'écriture dans une base nous montre que les φ_k sont des formes linéaires. Si le système $(\varphi_k)_{1\leq k\leq r}$ est lié, l'une de ces formes, disons φ_r, est combinaison linéaire des autres, soit $\varphi_r = \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k \varphi_k$ et on a pour tout $x \in E$, $u(x) = \sum_{k=1}^{r-1} \varphi_k(x)(y_k + \lambda_k y_r)$ et le système de $r-1$ vecteurs $(y_k + \lambda_k y_r)_{1\leq k\leq r-1}$ engendre $\operatorname{Im}(u)$, ce qui n'est pas possible. Le système $(\varphi_k)_{1\leq i\leq r}$ est donc libre. Dire que $x \in \ker(u)$ équivaut à dire que $u(x) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(x) y_k = 0$, ce qui équivaut à la nullité de tous les scalaires $\varphi_k(x)$ puisque la famille $(y_k)_{1\leq k\leq r}$ est libre. Par construction, on a $\operatorname{Im}(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbb{K} y_k$. On peut remarquer que le fait que E soit de dimension finie n'intervient pas pour démontrer que la condition est nécessaire. Réciproquement supposons qu'il existe des formes linéaires $(\varphi_k)_{1\leq k\leq r}$ linéairement indépendantes dans E^* et des vecteurs $(y_k)_{1\leq k\leq r}$ linéairement indépendants dans F tels que $u(x) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(x) y_k$ pour tout $x \in E$, l'espace E étant de dimension finie égale à n. En désignant par $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E, on peut écrire chaque forme linéaire φ_i sous la forme $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$ et la matrice de u dans les base $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}' = (y_j)_{1\leq j\leq r}$ de $\operatorname{Vect}(y_1, \cdots, y_r) \subset F$ est $A = ((\alpha_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq n}}$ et

$\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,({}^tA) = \mathrm{rg}\,(\varphi_1, \cdots, \varphi_r) = r$ puisque les vecteurs colonnes $(\alpha_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$ sont les composantes des φ_i dans la base duale $\mathcal{B}^*$.

2. Si $u = 0$, il s'écrit alors $u = Id - Id$. Si u est un automorphisme, il s'écrit alors $u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u$ ($\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2). On suppose donc que u est de rang r compris entre 1 et $n-1$. Il existe alors des formes linéaires $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ linéairement indépendantes dans E^* et des vecteurs $(y_i)_{1 \leq i \leq r}$ linéairement indépendants dans E tels que $u(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\, y_i$ pour tout $x \in E$. On complète alors $(y_i)_{1 \leq i \leq r}$ en une base de E, $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ en une base de E^* et les applications linéaires v, w définies par :

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} v(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\, y_i + \sum_{i=r+1}^{n} \varphi_i(x)\, y_i \\ w(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\, y_i - \sum_{i=r+1}^{n} \varphi_i(x)\, y_i \end{cases}$$

sont des automorphismes de E (puisqu'ils sont de rang n d'après la question précédente) tels que $u = v + w$. Dans le cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est infini, ce résultat peut se montrer plus simplement. En effet, l'endomorphisme $u - \lambda Id$ est non inversible pour un nombre fini de valeurs de λ, il existe donc un scalaire non nul λ tel que $v = u - \lambda Id$ soit inversible et $u = v + w$ avec $w = \lambda Id$.

Exercice 5.6. *Théorème des extrema liés*

1. *On se donne un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$), une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{O}$ et une partie K de $\mathcal{O}$ définie par des équations implicites :*

$$K = \{x \in \mathcal{O},\ \varphi_j(x) = 0,\ 1 \leq j \leq p\}$$

où les $p \leq n$ fonctions $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si la restriction de f à K admet un extremum local en $a \in K$ tel que les différentielles $d\varphi_1(a), \cdots, d\varphi_p(a)$ soient linéairement indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^n$, les formes linéaires $df(a), d\varphi_1(a), \cdots, d\varphi_p(p)$ sont alors liées, c'est-à-dire qu'il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ uniquement déterminés tels que $df(a) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j d\varphi_j(a)$ (les coefficients $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les multiplicateurs de Lagrange).

2. *Déterminer les extrema de la restriction au cercle K d'équation $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

Solution.

1. Pour $1 \leq p \leq n$, on note $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $x = (y, z)$ avec $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ et $z \in \mathbb{R}^p$. Pour $p = n$, la famille $(d\varphi_k(a))_{1 \leq k \leq n}$ est

une base du dual de $\mathbb{R}^n$ et $df(a)$ est une combinaison linéaire des $d\varphi_k(a)$. La famille $(d\varphi_k(a))_{1\leq k\leq p}$ étant libre, la matrice jacobienne $J_\varphi(a) = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est de rang p et quitte à modifier la numérotation, on peut supposer que :

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\(n-p)+1\leq j\leq n}} = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq p} \neq 0$$

Le théorème des fonctions implicites nous dit alors, en notant $a=(b,c)$ dans $\mathbb{R}^{n-p}\times\mathbb{R}^p$, qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de b dans $\mathbb{R}^{n-p}$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de c dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $g:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ caractérisée par la condition :

$$\forall y\in\mathcal{U},\ \forall z\in\mathcal{V},\ (\varphi(y,z)=0 \Leftrightarrow z=g(y))$$

Il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{O}'$ de a et un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $b=g(a)$ tels que $K\cap\mathcal{O}'=\{(y,g(y))\mid y\in\mathcal{U}\}$. Comme la restriction de f à K admet un extremum local en a, la fonction $h: y\mapsto f(y,g(y))$ admet un extremum local en b. Cette fonction étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a $\dfrac{\partial h}{\partial y_j}(b)=0$ pour $1\leq j\leq n-p$, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(a)+\sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial z_k}(a)\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a)=0\ \ (1\leq j\leq n-p)$$

Avec $\varphi(y,g(y))=0$ pour tout $y\in\mathcal{U}$, on a aussi :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(a)+\sum_{k=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k}(a)\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a)=0\ \ (1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq n-p)$$

Ces résultats se traduisent sur la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial f}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_p}(a) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial \varphi_p}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial z_p}(a) \end{pmatrix}$$

en disant que les colonnes 1 à $n-p$ sont des combinaisons linéaires des p dernières colonnes, donc le rang de cette matrice est inférieur ou égal à p et comme $\det\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq p}\neq 0$, ce rang est égal à p. Les $p+1$ lignes de cette matrices sont donc liées, ce qui signifie qu'il existe des réels non tous nuls $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ tels que $\alpha_1 df(a)+\displaystyle\sum_{j=1}^p \alpha_j d\varphi_j(a)=0$. Comme la famille $(d\varphi_k(a))_{1\leq k\leq p}$ est libre, on a nécessairement $\alpha_1\neq 0$ et $df(a)=\displaystyle\sum_{j=1}^p \lambda_j d\varphi_j(a)$, les λ_j étant uniquement déterminés.

2. En notant $\varphi(x,y) = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 1$, on a $K = \varphi^{-1}\{0\}$. La condition $df(a,b)$ et $d\varphi(a,b)$ liées, avec $(a,b) \in K$, signifie qu'il existe un réel λ tel que :

$$a = \lambda(a-2) \text{ et } b = \lambda(b+1) \text{ avec } (a-2)^2 + (b+1)^2 = 1$$

Nécessairement $\lambda \neq 0$ (sinon $a = b = 0$ et $5 = 1$), donc $b \neq 0$, $b \neq -1$ et $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a-2}{b+1}$, soit $a = -2b$ et $5b^2 + 10b + 4 = 0$, ce qui donne deux solutions :

$$(a_1,b_1) = \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad (a_2,b_2) = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

avec $f(a_1,b_1) = 2\left(\sqrt{5}+3\right)$ et $f(a_2,b_2) = 2\left(3-\sqrt{5}\right)$. En écrivant tout point (x,y) de K sous la forme $(x,y) = (2+\cos(t), -1+\sin(t))$ avec $t \in [-\pi,\pi]$, on a :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 2(2x - y - 2) = 2(3 + 2\cos(t) - \sin(t))$$

et :

$$f(x,y) - f(a_1,b_1) = 2\left(2\cos(t) - \sin(t) - \sqrt{5}\right)$$

$$f(x,y) - f(a_2,b_2) = 2\left(2\cos(t) - \sin(t) + \sqrt{5}\right)$$

L'étude de la fonction $\varphi : t \mapsto 2\cos(t) - \sin(t)$ nous montre que la restriction de f à K admet un maximum en (a_1,b_1) et un minimum en (a_2,b_2). En effet, si $\varphi'(t) = -2\sin(t) - \cos(t) = 0$, on a alors $\tan(t) = -\dfrac{1}{2}$ et $\varphi(t) = \dfrac{5}{2}\cos(t) = \pm\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} = \pm\sqrt{5}$.

Exercice 5.7. *Rang de* $((\mathrm{ch}(\alpha_i - \alpha_j)))_{1\leq i,j\leq n}$ *et valeurs propres*

Soient $n \geq 2$, $\alpha = (\alpha_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$ *et* $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ *la forme quadratique de matrice* $A = (\mathrm{ch}(\alpha_i - \alpha_j))_{1\leq i,j\leq n}$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

1. *Déterminer le rang et la signature de* q.
2. *En déduire les valeurs propres de la matrice* A.

Solution.

1. Pour tout $x = (x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{ch}(\alpha_i - \alpha_j)\, x_i x_j \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{ch}(\alpha_i)\,\mathrm{ch}(\alpha_j)\, x_i x_j - \sum_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{sh}(\alpha_i)\,\mathrm{sh}(\alpha_j)\, x_i x_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ch}(\alpha_i)\, x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sh}(\alpha_i)\, x_i\right)^2 = \ell_1^2(x) - \ell_2^2(x) \end{aligned}$$

la forme linéaire ℓ_1 étant non nulle puisque la fonction ch est à valeurs strictement positives, donc q est de rang 1 ou 2. Elle est de rang 1 si, et seulement si, les formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 sont liées, ce qui revient à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ell_2 = \lambda \ell_1$, soit que $\operatorname{sh}(\alpha_i) = \lambda \operatorname{ch}(\alpha_i)$ pour tout entier i compris entre 1 et n, ce qui est encore équivalent à dire que $\operatorname{th}(\alpha_i) = \lambda$ pour tout entier i compris entre 1 et n et cela signifie que tous les α_i sont égaux puisque la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on a $q(x) = \left(\operatorname{ch}^2(\alpha_1) - \operatorname{sh}^2(\alpha_1)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. On a donc :

$$\operatorname{rg}(q) = \begin{cases} 1 \text{ si tous les } \alpha_i \text{ sont égaux} \\ 2 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \operatorname{sgn}(q) = \begin{cases} (1,0) & \text{si tous les } \alpha_i \text{ sont égaux} \\ (1,1) & \text{sinon} \end{cases}$$

2. La matrice A qui est symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable. Dans le cas où tous les α_i sont égaux, tous les coefficients de la matrice A valent 1, ses valeurs propres étant 0 d'ordre $n-1$ avec pour espace propre associé l'hyperplan H d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et n de droite propre $H^{\perp} = R\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On suppose que les α_i ne sont pas tous égaux. Dans ce cas, la matrice A est de rang 2 et son noyau de dimension $n-2$. Ses valeurs propres sont donc $\lambda_3 = 0$ d'ordre $n-2$ et λ_1, λ_2 réelles non nulles. La trace de A est $\lambda_1 + \lambda_2 = n$ (les termes diagonaux de A valent tous 1). Les termes diagonaux de A^2 sont les :

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}^2(\alpha_i - \alpha_k)$$

et sa trace est :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = S &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{ch}^2(\alpha_i - \alpha_j) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(1 + \operatorname{sh}^2(\alpha_i - \alpha_j)\right) \\ &= n^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{sh}^2(\alpha_i - \alpha_j) = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{sh}^2(\alpha_i - \alpha_j) \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{sh}^2(\alpha_i - \alpha_j) = -\frac{S}{2}$. Il résulte de tout cela que λ_1, λ_2 sont les racines réelles du polynôme $P(X) = X^2 - nX - \frac{S}{2} = \left(X - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2 + 2S}{4}$, soit $\lambda_1 = \frac{n - \sqrt{n^2 + 2S}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{n + \sqrt{n^2 + 2S}}{2}$ avec :

$$n^2 + 2S = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(1 + 2\operatorname{sh}^2(\alpha_i - \alpha_j)\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{ch}(2(\alpha_i - \alpha_j))$$

En résumé, les valeurs propres de A sont 0 d'ordre $n-2$ et les deux valeurs propres simples $\frac{1}{2}\left(n \pm \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{ch}(2(\alpha_i - \alpha_j))}\right)$.

Chapitre 6

Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles

Exercice 6.1. *Déterminant d'une matrice blocs*

Soient $\mathbb{K}$ *un corps infini et* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$, *avec* A, B, C, D *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* C *et* D *commutent.*

1. *On suppose que* D *inversible et on pose* $T = \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$. *Calculer le produit* MT, *puis en déduire que* $\det(M) = \det(AD - BC)$.
2. *Désignant par* P *le polynôme défini par* $P(X) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - XI_n \end{pmatrix}$ *(il s'agit ici du déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps* $\mathbb{K}(X)$*), montrer que le polynôme* Q *défini par* $Q(X) = \det(D - XI_n)$ *n'a qu'un nombre fini de racines dans le corps* $\mathbb{K}$, *puis en déduire que* $\det(M) = \det(AD - BC)$.
3. *Déduire de la question précédente que pour* A *et* B *qui commutent dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on a* $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.
4. *Montrer que le résultat de la question précédente est en fait valable pour toutes matrices* A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution.

1. En utilisant le fait que D et C commutent on a :

$$MT = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

   et $\det(M) = \det(M)\det(T) = \det(MT) = \det(AD - BC)$.

2. $Q(X) = \det(D - XI_n)$ est un polynôme de degré n, il n'a donc qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{K}$. En conséquence la matrice $D - xI_n$ est inversible pour une infinité de valeurs de x ($\mathbb{K}$ est supposé infini). Pour ces valeurs on a puisque C et $D - xI_n$ commutent :

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI_n \end{pmatrix} = \det(A(D - xI_n) - BC) = R(x)$$

Les polynômes P et R prenant la même valeur pour une infinité de valeurs de x sont donc égaux. Prenant $x = 0$ on obtient $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

3. En supposant que A et B commutent, on a :

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} &= \det\left(A^2 + B^2\right) = \det\left((A + iB)(A - iB)\right) \\ &= \det(A + iB)\det(A - iB) = \left|\det(A + iB)\right|^2 \geq 0\end{aligned}$$

4. En ajoutant à la colonne $j \in \{1, \cdots, n\}$ la colonne $n + j$ multipliée par i, on a $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{pmatrix}$, puis en retranchant à la ligne $k \in \{n + 1, \cdots, 2n\}$ la ligne k multipliée par i, on a :

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} \\ &= \det(A + iB)\det(A - iB) = \left|\det(A + iB)\right|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Exercice 6.2. *Un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{F}_p)$

1. *Soient* $n \geq 2$ *un entier et* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif. Montrer que l'ensemble* G *des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *ayant un seul terme non nul par colonne est un sous-groupe du groupe multiplicatif* $GL_n(\mathbb{K})$.
2. *Pour cette question,* $p \geq 2$ *est un nombre premier fixé et* $\mathbb{K}$ *est le corps* $\mathbb{F}_p = \dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.
   (a) *Montrer que* $\operatorname{card}(GL_n(\mathbb{F}_p)) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(p^n - p^{k-1}\right)$.
   (b) *Montrer que* $n!\,(p-1)^n$ *divise* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(p^n - p^{k-1}\right)$.

Solution. On note δ_{ij} les symboles de Kronecker.

1. Pour $A \in G$ et j entier compris entre 1 et n, l'élément non nul λ_j de la colonne j est situé en ligne $\sigma(j)$. Comme A est inversible, l'application σ définit une permutation de $I_n = \{1, \cdots, n\}$. Cette application est bien définie car la colonne j de A est de la forme $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j}$ avec $a_{ij} = 0$ pour tous les indices i sauf l'un d'entre eux, que l'on peut donc noter $\sigma(j)$. Elle est injective car si $\sigma(j) = \sigma(j')$ pour $j \neq j'$, les colonnes j et j' sont colinéaires et $\det(A) = 0$, ce qui n'est pas possible pour A inversible. Comme I_n est fini, σ est bijective. On a donc :

$$G = \left\{A = \left(\left(\lambda_j \delta_{i,\sigma(j)}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n},\ (\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} \in (\mathbb{K}^*)^n,\ \sigma \in \mathcal{S}_n\right\}$$

Cet ensemble est non vide car il contient $I_n = ((\delta_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ ($\lambda_j = 1$ pour tout j et $\sigma = Id$). Il est bien contenu dans $GL_n(\mathbb{K})$, car pour tout $A \in G$, on a :

$$\det(A) = \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^{n} a_{\tau(j),j} = \sum_{\tau\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{\tau(j),\sigma(j)}$$

avec $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{\tau(j),\sigma(j)} = 0$ pour $\tau \neq \sigma$, ce qui nous donne $\det(A) = \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0$.
Pour $A = \left(\left(\lambda_j \delta_{i,\sigma(j)}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = \left(\left(\mu_j \delta_{i,\tau(j)}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ dans G, le coefficient d'indice (i,j) de $C = AB$ est :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{i,\sigma(k)} \mu_j \delta_{k,\tau(j)} = \lambda_{\tau(j)} \delta_{i,\sigma(\tau(j))} \mu_j$$

Ce coefficient est nul pour $i \neq \sigma(\tau(j))$ et vaut $\lambda_{\tau(j)}\mu_j \neq 0$ pour $i = \sigma(\tau(j))$. Donc $AB \in G$. L'égalité $AB = I_n$ équivaut à $c_{ij} = \lambda_{\tau(j)} \delta_{i,\sigma(\tau(j))} \mu_j = \delta_{ij}$ pour tous i, j, ce qui nous donne $\lambda_{\tau(i)} \delta_{i,\sigma(\tau(i))} \mu_i = 1$ pour tout i, donc $\tau = \sigma^{-1}$ et $\mu_i = \dfrac{1}{\lambda_{\sigma^{-1}(i)}}$. L'inverse de A est donc $B = \left(\left(\dfrac{\delta_{i,\sigma(j)}}{\lambda_{\sigma^{-1}(j)}}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n} \in G$. En conclusion G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

2.

(a) Voir l'exercice **??**.

(b) Le groupe G étant en bijection avec $\left(\mathbb{F}_p^*\right)^n \times \mathcal{S}_n$, son cardinal est $n!\,(p-1)^n$ et le théorème de Lagrange nous dit qu'il divise $\operatorname{card}(GL_n(\mathbb{F}_p))$.

Exercice 6.3. *Matrices inversible de* $\mathcal{M}_n\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$

Soient $n \geq 2$ et $r \geq 2$ deux entiers naturels. Pour tout entier relatif a, on note $\overline{a}$ sa classe résiduelle modulo r dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}$.

1. *Montrer que l'application :*

$$\varphi : A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mapsto \overline{A} = ((\overline{a_{ij}}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$$

de réduction modulo r est un morphisme d'anneaux surjectif. Préciser son noyau.

2. *Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif unitaire. En notant $\mathbb{A}^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversible de $\mathbb{A}$, montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ si, et seulement si,* $\det(M) \in \mathbb{A}^\times$.

3. *Montrer qu'une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *[resp.* $\overline{M} \in \mathcal{M}_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$*] est inversible dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *[resp. dans* $\mathcal{M}_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$*] si, et seulement si,* $\det(M) = \pm 1$ *[resp.* $\det(M)$ *est premier avec r].*
4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. *Montrer que* $\overline{A}$ *est inversible dans* $\mathcal{M}_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$ *si, et seulement si, il existe deux matrices U et V dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *telles que* $AU + rV = I_n$.
5. *On suppose que* $r = p \geq 3$ *est un nombre premier impair et on se donne un sous-groupe fini G d'ordre m du groupe multiplicatif* $GL_n(\mathbb{Z})$.
   (a) *Montrer que toute matrice A de G est diagonalisable, ses valeurs propres complexes étant des racines m-ièmes de l'unité.*
   (b) *Soient P un polynôme unitaire de degré n dans* $\mathbb{C}[X]$ *dont toutes les racines sont de module égal à 1 et Q un polynôme unitaire de degré n dans* $\mathbb{Z}[X]$. *Montrer que si* $P(X) = p^n Q\left(\frac{X-1}{p}\right)$, *on a alors* $P(X) = (X-1)^n$.
   (c) *Montrer que la restriction de* φ *à G réalise une injection de G dans* $GL_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)$.
   (d) *En déduire que* $\mathrm{card}(G) \leq p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Solution. Pour un anneau commutatif unitaire $\mathbb{A}$, le déterminant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ est $\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$, sa comatrice est la matrice $C(M) = \left(\left((-1)^{i+j} \det(M_{i,j})\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ où $M_{i,j}$ est déduite de M en supprimant la ligne i et la colonne j et on a $M\,{}^tC(M) = {}^tC(M)\,M = \det(M)\,I_n$.

1. L'application $a \mapsto \overline{a}$ réalisant un morphisme d'anneaux surjectif de $\mathbb{Z}$ sur $\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}$, il en résulte que φ est un morphisme d'anneaux surjectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{M}_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$. Si $A \in \ker(\varphi)$, on a alors $\overline{a_{ij}} = \overline{0}$, soit $a_{ij} \in r\mathbb{Z}$, pour tous i, j compris entre 1 et n, ce qui revient à dire que $A \in r\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Réciproquement, il est clair que $r\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \subset \ker(\varphi)$. On a donc $\ker(\varphi) = r\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$, il existe alors $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ telle que $MM' = I_n$, ce qui implique que :

$$\det(M)\det(M') = \det(MM') = \det(I_n) = 1$$

   dans $\mathbb{A}$, soit que $\det(M)$ est inversible dans $\mathbb{A}$. Réciproquement, si $\det(M)$ est inversible dans $\mathbb{A}$, des égalités $M\,{}^tC(M) = {}^tC(M)\,M = \det(M)\,I_n$, on déduit que $(\det(M))^{-1}\,{}^tC(M)$ est un inverse de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$.

3. Si $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif unitaire, on note alors $GL_n(\mathbb{A})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{A})$. Sachant que $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$ et $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)^\times = \left\{\overline{a} \in \dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}},\ a \wedge r = 1\right\}$, on déduit de la question précédente que $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ \det(M) = \pm 1\}$ et :
$$GL_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right) = \left\{M \in \mathcal{M}_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right),\ \det(M) \wedge r = 1\right\}$$

4. S'il existe deux matrices U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + rV = I_n$, on a alors $\overline{AU} = \overline{I_n}$ dans $\mathcal{M}_n\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$, ce qui signifie que $\overline{U}$ est un inverse à droite de $\overline{A}$ dans l'anneau unitaire $\mathcal{M}_n\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$ et il s'agit de vérifier que $\overline{U}$ est aussi un inverse à gauche de $\overline{A}$ (l'anneau $\mathcal{M}_n\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$ n'est pas commutatif pour $n \geq 2$). De $\overline{AU} = \overline{I_n}$, on déduit que $\det\left(\overline{A}\right)\det\left(\overline{U}\right) = \overline{1}$, donc $\det\left(\overline{A}\right) \in \left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)^\times$, puis des égalités ${}^tC\left(\overline{A}\right) = {}^tC\left(\overline{A}\right)\overline{AU} = \det\left(\overline{A}\right)\overline{U}$, on déduit que l'on a ${}^tC\left(\overline{A}\right)\overline{A} = \det\left(\overline{A}\right)\overline{UA}$, soit $\overline{UA} = \left(\det\left(\overline{A}\right)\right)^{-1}\ {}^tC\left(\overline{A}\right)\overline{A} = \overline{I_n}$, ce qui signifie que $\overline{U}$ est aussi un inverse à gauche de $\overline{A}$. En conclusion, $\overline{A}$ est inversible dans $\mathcal{M}_n\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$ d'inverse $\overline{U}$. Réciproquement, si $\overline{A}$ est inversible dans $\mathcal{M}_n\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}\right)$ d'inverse $\overline{U}$, on a alors $\overline{AU} = \overline{I_n}$, donc $AU - I_n \in r\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AU + rV = I_n$.

5. Pour $r = p$ premier, $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ est un corps fini à p éléments.

   (a) En notant m le cardinal du groupe fini G, le théorème de Lagrange nous dit que l'ordre de tout élément A de G est un diviseur de m et nécessairement, on a $A^m = I_n$, ce qui implique que A est diagonalisable car annulée par le polynôme $X^m - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Le polynôme minimal de $A \in G \subset GL_n(\mathbb{Z}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ est donc un diviseur de $X^m - 1$ et en conséquence, les valeurs propres complexes de A, qui sont racines du polynôme minimal, sont des racines m-ièmes de l'unité (on peut aussi écrire que si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, on a alors $X = A^m X = \lambda^m X$ et $\lambda^m = 1$).

   (b) On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on a $P(X) = X - \lambda = pQ\left(\dfrac{X-1}{p}\right) = X - 1 + pb$ avec $|\lambda| = 1$ et $b \in \mathbb{Z}$, donc $\lambda = 1 - pb$ est entier de module 1, soit égal à ± 1. Si $\lambda = -1$, on a alors $pb = 2$ dans $\mathbb{Z}$ avec $p \geq 3$, ce qui est impossible. On a donc $\lambda = 1$ et $P(X) = X - 1$. Supposons le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 1$ et soient P, Q de degré n vérifiant nos hypothèses. Les racines de $P \in \mathbb{C}[X]$ étant toutes de module 1, on a $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ avec $|\lambda_k| = 1$ pour tout k compris entre 1 et n, ce qui nous donne en particulier :

$$|P(1)| = \prod_{k=1}^{n} |1 - \lambda_k| \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + |\lambda_k|) \leq 2^n$$

De $P(X) = p^n Q\left(\frac{X-1}{p}\right)$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$, on déduit que si $Q(0) \neq 0$, on a alors $|P(1)| = p^n |Q(0)| \geq p^n > 2^n$ pour $p \geq 3$, ce qui est contradictoire. On a donc $P(1) = Q(0) = 0$, soit $P(X) = (X-1) P_1(X)$ avec P_1 dans $\mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n-1$ dont toutes les racines sont de module 1 et $Q(X) = XQ_1(X)$ avec $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n-1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}(X-1) P_1(X) = P(X) = p^n Q\left(\frac{X-1}{p}\right) &= p^n \frac{X-1}{p} Q_1\left(\frac{X-1}{p}\right) \\ &= (X-1) p^{n-1} Q_1\left(\frac{X-1}{p}\right)\end{aligned}$$

soit $P_1(X) = p^{n-1} Q_1\left(\frac{X-1}{p}\right)$. De l'hypothèse de récurrence, on déduit alors que $P_1(X) = (X-1)^{n-1}$ et $P(X) = (X-1)^n$.

(c) Pour toute matrice $A \in G$, on a $\det(A) = \pm 1$, donc $\det\left(\overline{A}\right) = \pm\overline{1}$ et $\overline{A} \in GL_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)$. Si $A \in \ker(\varphi)$, on a alors $\overline{A} = \overline{I_n}$ et il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $A = I_n + pB$. En notant χ_M le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned}\chi_A(z) &= \det(zI_n - A) = \det((z-1) I_n - pB) \\ &= p^n \det\left(\left(\frac{z-1}{p}\right) I_n - B\right) = \chi_B\left(\frac{z-1}{p}\right)\end{aligned}$$

avec $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ à racines de module 1 et $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n, ce qui impose que $\chi_A(X) = (X-1)^n$. La matrice A est donc diagonalisable avec 1 pour unique valeur propre, ce qui implique que $A = I_n$. En conclusion $\ker(\varphi) = \{I_n\}$ et φ est injective.

(d) Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(G) \leq \operatorname{card}\left(GL_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)\right) &= \prod_{k=1}^{n} \left(p^n - p^{k-1}\right) \\ &\leq p^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \left(p^k - 1\right) \leq p^{\frac{n(n-1)}{2}}\end{aligned}$$

(voir l'exercice **??**).

Exercice 6.4. *Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$*

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes et pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes).

1. *Montrer que le groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices d'ordre n inversibles est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2. *En utilisant la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que :*
   (a) *$GL_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;*
   (b) *le centre de $GL_n(\mathbb{K})$ est formé des homothéties non nulles ;*
   (c) *il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles ;*
   (d) *pour $n \geq 2$ il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $\left\|P^{-1}AP\right\| = \|A\|$ pour toutes matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P dans $GL_n(\mathbb{K})$;*
   (e) *pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique ;*
   (f) *en notant $C(A)$ la comatrice d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(C(A)) = (\det(A))^{n-1}$;*
   (g) *pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $C(AB) = C(A)C(B)$;*
   (h) *si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il en est alors de même de leurs comatrices.*

Solution. On rappelle que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ [resp. de $GL_n(\mathbb{K})$] est l'ensemble des matrices [resp. des matrices inversibles] qui commutent avec toutes les matrices [resp. avec toutes les matrices inversibles]. On rappelle également que la comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $C(A) = \left(\left((-1)^{i+j}\det(A_{i,j})\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ où $A_{i,j}$ est déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

1. $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application déterminant qui est continue comme fonction polynomiale des coefficients m_{ij} d'une matrice M. La fonction polynomiale $z \mapsto \det(zI_n - A)$ a au plus n racines dans $\mathbb{K}$, donc il existe un entier k_0 tel que :
$$\forall k > k_0,\ \det\left(\frac{1}{k}I_n - A\right) \neq 0$$
et on a $A = \lim\limits_{\substack{k\to+\infty \\ k>k_0}} A_k$ avec les $A_k = \dfrac{1}{k}I_n - A$ inversibles pour tout $k > k_0$.

2.

   (a) On utilise sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la norme $N : A \mapsto \max\limits_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$. Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $P = ((p_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A-P) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe pour tous i, j compris entre 1 et n, une suite

$\left(r_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui converge vers p_{ij}. De la continuité du déterminant, on déduit, en notant $R_k = \left(\left(r_{i,j}^{(k)}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, qu'il existe un entier k_0 tel que $\det(R_k) \neq 0$ pour tout $k > k_0$ (puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \det(R_k) = \det(P) \neq 0$). Prenant k_0 assez grand, on peut aussi avoir $\left|p_{ij} - r_{i,j}^{(k)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $k > k_0$ et pour tous i, j compris entre 1 et n, ce qui nous donne $N(P - R_{k_0+1}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $N(A - R_{k_0+1}) < \varepsilon$ (inégalité triangulaire) avec $R_{k_0+1} \in GL_n(\mathbb{Q})$. On a ainsi montré que $GL_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) On note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Avec la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la continuité du produit matriciel, on déduit que toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans le centre de $GL_n(\mathbb{K})$ est aussi dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et en particulier, on a $AE_{ij} = E_{ij}A$, pour tous i, j, ce qui nous donne :

$$AE_{ij}e_j = Ae_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k = E_{ij}Ae_j = E_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k\right) = a_{jj}e_i$$

et implique que $a_{ki} = 0$ pour $k \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i\}$ et $a_{ii} = a_{jj}$. C'est-à-dire que $A = \lambda I_n$. , c'est donc une homothétie et son rapport est non nulle puisqu'elle est inversible.

(c) $\operatorname{Vect}(GL_n(\mathbb{K}))$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (on est en dimension finie) qui contient $GL_n(\mathbb{K})$, donc aussi son adhérence $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui implique que $\operatorname{Vect}(GL_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et du système générateur $GL_n(\mathbb{K})$ on peut extraire une base.

(d) Supposons que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ on ait $\left\|P^{-1}AP\right\| = \|A\|$. Cette égalité appliquée à (PA, P) donne $\|AP\| = \|PA\|$. Par densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et continuité du produit matriciel, on déduit que $\|AP\| = \|PA\|$ pour toutes matrices A, P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Mais ce denier résultat est impossible pour $n \geq 2$. En effet, on a $E_{12}E_{11} = 0$ et $E_{11}E_{12} \neq 0$.

(e) Si A est inversible, alors AB et $BA = A^{-1}(AB)A$ sont semblables, donc de même polynôme caractéristique. Dans le cas général, on peut écrire que $A = \lim\limits_{k\to+\infty} M_k$ où $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles. Les matrices M_kB et BM_k ont donc même polynôme caractéristique et avec la continuité du produit matriciel et du déterminant, on peut alors écrire que, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - AB) &= \lim_{k\to+\infty} \det(\lambda I_n - M_kB) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \det(\lambda I_n - BM_k) = \det(\lambda I_n - BA)\end{aligned}$$

c'est-à-dire que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

(f) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A \cdot {}^tC(A) = \det(A) \cdot I_n$ et pour $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on en déduit que $\det(C(A)) = \det({}^tC(A)) = (\det(A))^{n-1}$. Par densité de

$GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et continuité des applications det et C (applications polynomiales), on en déduit que ce résultat est valable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il en résulte que $C(A)$ est inversible si, et seulement si, A l'est.

(g) Pour A, B dans $GL_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned} {}^tC(AB) &= \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} \\ &= \left(\det(B)B^{-1}\right)\left(\det(A)A^{-1}\right) = {}^tC(B)\ {}^tC(A) \end{aligned}$$

et en transposant, $C(AB) = C(A)C(B)$. Par densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et continuité de l'applications C et du produit matriciel, on en déduit que ce résultat est valable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(h) Dire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ signifie qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Pour $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $B \in GL_n(\mathbb{K})$ et :

$$\begin{aligned} {}^tC(B) &= {}^tC\left(P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = \det(A)P^{-1}A^{-1}P \\ &= \det(A)\frac{1}{\det(A)}P^{-1}\ {}^tC(A)P = P^{-1}\ {}^tC(A)P \end{aligned}$$

et en transposant, $C(B) = {}^tPC(A)\ {}^t\left(P^{-1}\right) = {}^tPC(A)\left({}^tP\right)^{-1}$, donc les matrices $C(A)$ et $C(B)$ sont semblables. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on écrit que $A = \lim\limits_{k\to+\infty} A_k$, où $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles, donc $B = \lim\limits_{k\to+\infty} P^{-1}A_kP$ (continuité du produit matriciel) et on a :

$$\begin{aligned} C(B) &= \lim_{k\to+\infty} C\left(P^{-1}A_kP\right) = \lim_{k\to+\infty} {}^tPC(A_k)\left({}^tP\right)^{-1} \\ &= {}^tPC(A)\left({}^tP\right)^{-1} \end{aligned}$$

(continuité de C et du produit matriciel).

Exercice 6.5. *Transformation d'Euler*

En désignant par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles, on associe à tout réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, l'opérateur T_λ qui associe à toute suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $T_\lambda(u) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes d'Euler de paramètre λ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k$$

1. *Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel strictement positif λ, la matrice*

$$Q_{n+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1}\lambda & \binom{2}{2}\lambda^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1}\lambda & \cdots & \binom{n}{n-1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{n}\lambda^n \end{pmatrix}$$

est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ d'inverse :

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0}\frac{1}{\lambda} & \binom{1}{1}\frac{1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0}\frac{1}{\lambda^2} & -\binom{2}{1}\frac{1}{\lambda^2} & \binom{2}{2}\frac{1}{\lambda^2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^n\binom{n}{0}\frac{1}{\lambda^n} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{1}{\lambda^n} & \cdots & -\binom{n}{n-1}\frac{1}{\lambda^n} & \binom{n}{n}\frac{1}{\lambda^n} \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 1$, il s'agit d'une matrice de Pascal (voir l'exercice **??***).*

2. *Montrer que, pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, l'application T_λ réalise un automorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'inverse $T_{-(\lambda+1)}$, ce qui nous dit que pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'équivalence :*

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\lambda+1)^k v_k\right)$$

Solution.

1. Comme $\det(Q_{n+1}(\lambda)) = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} \neq 0$, la matrice $Q_{n+1}(\lambda)$ est inversible. Les égalités $(\lambda X+1)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j X^j$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour k compris entre 0 et n nous disent que la transposée de $Q_{n+1}(\lambda)$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0 = (X^k)_{0\le k\le n}$ à la base $\mathcal{B}_1 = \left((\lambda X+1)^k\right)_{0\le k\le n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et on en déduit que l'inverse de ${}^tQ_{n+1}(\lambda)$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ qui s'obtient avec les égalités $\lambda^k X^k = (\lambda X+1-1)^k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\lambda X+1)^j$ pour k

compris entre 0 et n. On a donc :

$$
{}^{t}Q_{n+1}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & -\frac{1}{\lambda}\binom{1}{0} & \frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{0} & \cdots & (-1)^n \frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{0} \\
0 & \frac{1}{\lambda}\binom{1}{1} & -\frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{1} \\
0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{n-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{n}
\end{pmatrix}
$$

soit :

$$
Q_{n+1}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\binom{1}{0}\frac{1}{\lambda} & \binom{1}{1}\frac{1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{2}{0}\frac{1}{\lambda^2} & -\binom{2}{1}\frac{1}{\lambda^2} & \binom{2}{2}\frac{1}{\lambda^2} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
(-1)^n \binom{n}{0}\frac{1}{\lambda^n} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{1}{\lambda^n} & \cdots & -\binom{n}{n-1}\frac{1}{\lambda^n} & \binom{n}{n}\frac{1}{\lambda^n}
\end{pmatrix}
$$

2. Il est clair que l'application T_λ est un un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En notant $\mu = \dfrac{1}{\lambda+1}$, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V_{n+1} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, l'égalité $v = T_\lambda(u)$ se traduit par $V_{n+1} = P_{n+1}U_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où P_{n+1} est la matrice réelle d'ordre $n+1$ définie par :

$$
P_{n+1} = \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\mu\binom{1}{0} & \mu\binom{1}{1}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\
\mu^2\binom{2}{0} & \mu^2\binom{2}{1}\lambda & \mu^2\binom{2}{2}\lambda^2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\mu^n\binom{n}{0} & \mu^n\binom{n}{1}\lambda & \cdots & \mu^n\binom{n}{n-1}\lambda^{n-1} & \mu^n\binom{n}{n}\lambda^n
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \mu^2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \mu^n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1}\lambda & \binom{2}{2}\lambda^2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}\lambda & \cdots & \binom{n}{n-1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{n}\lambda^n
\end{pmatrix}
$$

$$
= D_{n+1}(\mu)\, Q_{n+1}(\lambda)
$$

avec des notations évidentes. Comme $\det(P_{n+1}) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \neq 0$, la matrice P_{n+1} est inversible et on a la formule d'inversion $U_{n+1} = P_{n+1}^{-1}V_{n+1}$ qui nous dit que T_λ est un automorphisme (pour toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'égalité $T_\lambda(u) = v$ équivaut à $V_{n+1} = P_{n+1}U_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui nous donne pour unique solution la suite u définie par $U_{n+1} = P_{n+1}^{-1} V_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). On a alors :

$$P_{n+1}^{-1} = Q_{n+1}^{-1}(\lambda) D_{n+1}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda+1}\right) = Q_{n+1}^{-1}(\lambda) D_{n+1}(\lambda+1)$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0}\frac{1}{\lambda} & \binom{1}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0}\frac{1}{\lambda^2} & -\binom{2}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda^2} & \binom{2}{2}\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^n\binom{n}{0}\frac{1}{\lambda^n} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda^n} & \cdots & -\binom{n}{n-1}\frac{(\lambda+1)^{n-1}}{\lambda^n} & \binom{n}{n}\frac{(\lambda+1)^n}{\lambda^n} \end{pmatrix}$$

ce qui nous dit que $u_n = \dfrac{1}{\lambda^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\lambda+1)^k v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit que $u = T_{-(\lambda+1)}(v)$. On a donc $T_{\lambda}^{-1} = T_{-(\lambda+1)}$.

Exercice 6.6. *Matrices de Gram et interpolation*

On se donne un intervalle réel I non réduit à un point et on note $\mathcal{C}^0(I)$ l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. À tout entier $n \geq 1$ et toutes suites $\varphi = (\varphi_k)_{0\leq k\leq n}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I)$ et $x = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de réels dans I, on associe la matrice de Gram $G(f,x) = ((f_j(x_i)))_{0\leq i,j\leq n}$ *dans* $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. *Soit $\varphi = (\varphi_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *toute fonction $f \in \mathrm{Vect}\{\varphi_0,\cdots,\varphi_n\}\setminus\{0\}$ a au plus n racines dans l'intervalle I ;*
   (b) *pour toute suite $x = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de points de I deux à deux distincts, la matrice $G(\varphi,x)$ est inversible ;*
   (c) *pour toute suite $x = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de points de I deux à deux distincts et toute suite $y = (y_k)_{0\leq k\leq n}$ de réels, il existe une unique fonction $f \in \mathrm{Vect}\{\varphi_0,\cdots,\varphi_n\}$ telle que $f(x_k) = y_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n.*
2. *Soit $\varphi = (\varphi_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I)$ qui vérifie l'une des conditions de la question précédente.*
   (a) *Montrer que la famille de fonctions φ est libre dans $\mathcal{C}^0(I)$.*
   (b) *Soit $y = (y_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que la fonction d'interpolation $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j$ telle que $f(x_k) = y_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n est définie par :*

$$\forall t \in I,\ f(t) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\det\left(G\left(f, x^{(j,t)}\right)\right)}{\det(G(f,x))}$$

où $x^{(j,t)} = (x_0, \cdots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \cdots, x_n)$. *Que retrouve-t-on pour les fonctions* φ_k *définies par* $\varphi_k(t) = t^k$ *pour tout* k *compris entre* 0 *et* n *?*

Solution. Une famille de fonctions $\varphi = (\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$ dans $\mathcal{C}^0(I)$ qui vérifie l'une des conditions de la première question est un *système de Tchebychev*. Toute base de $\mathbb{R}_n[X]$ est un système de Tchebychev. Avec la base canonique, on retrouve l'interpolation de Lagrange.

$(a) \Leftrightarrow (b)$ On procède par contraposée. Pour $x \in I^{n+1}$ formée de $n+1$ points deux à deux distincts, la matrice $G(\varphi, x)$ est non inversible si, et seulement si, le système linéaire de $n+1$ équations aux $n+1$ inconnues réelles $a_0, \cdots, a_n$:

$$\sum_{j=0}^{p} a_j \varphi_j(x_i) = 0 \ \ (0 \leq i \leq n)$$

a une solution non nulle dans $\mathbb{R}^{n+1}$, ce qui est encore équivalent à dire qu'il existe une fonction $f = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \varphi_j \in \operatorname{Vect}\{\varphi_0, \cdots, \varphi_n\} \setminus \{0\}$ ayant $n+1$ racines distinctes dans I.

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Pour $x \in I^{n+1}$ formée de $n+1$ points deux à deux distincts, la matrice $G(\varphi, x)$ est inversible si, et seulement si, pour tout $y = (y_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le système linéaire :

$$\sum_{j=0}^{p} a_j \varphi_j(x_i) = y_i \ \ (0 \leq i \leq n) \tag{6.1}$$

a une unique solution, ce qui revient à dire qu'il existe une unique fonction $f \in \operatorname{Vect}\{\varphi_0, \cdots, \varphi_n\}$ telle que $f(x_k) = y_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n.

1. Soit $\varphi = (\varphi_k)_{0 \leq k \leq n}$ un système de Tchebychev.

   (a) Si $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j \varphi_j = 0$, on a alors pour toute suite $x \in I^{n+1}$ formée de $n+1$ points deux à deux distincts, $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) = 0$ pour tout i compris entre 0 et n, la matrice $G(\varphi, x)$ de ce système linéaire étant inversible, ce qui implique que tous les coefficients a_j sont nuls.

   (b) Pour tout entier j compris entre 0 et n, on a :

$$\det\left(G\left(\varphi, x^{(j,t)}\right)\right) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_0(x_{j-1}) & \varphi_1(x_{j-1}) & \cdots & \varphi_n(x_{j-1}) \\ \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_0(x_{j+1}) & \varphi_1(x_{j+1}) & \cdots & \varphi_n(x_{j+1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

(en adaptant l'écriture pour $j = 0$ et pour $j = n$) et le développement de ce déterminant suivant la ligne j nous montre que $f \in \text{Vect}\{\varphi_0, \cdots, \varphi_n\}$. Pour $t = x_k$ avec $k \neq j$, on a $\det\left(G\left(\varphi, x^{(j,t)}\right)\right) = 0$ car les lignes k et j de ce déterminant sont égales et pour $t = x_j$, on a $\det\left(G\left(\varphi, x^{(j,t)}\right)\right) = \det\left(G\left(\varphi, x\right)\right)$, donc $f\left(x_k\right) = y_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n. La fonction f est donc bien la fonction d'interpolation annoncée car cette dernière est unique. Pour $\varphi = \left(t^k\right)_{0 \leq k \leq n}$, on a :

$$\det\left(G\left(f, x\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_{n^n} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < k \leq n} \left(x_k - x_i\right)$$

(déterminant de Vandermonde) et pour j compris entre 0 et n, on a en notant $x' = \left(x_0, \cdots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \cdots, x_n\right)$:

$$\frac{\det\left(G\left(f, x^{(j,t)}\right)\right)}{\det\left(G\left(f, x\right)\right)} = \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{x'_k - x'_i}{x_k - x_i}$$

$$= \prod_{k=1}^{j-1} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{t - x_i}{x_j - x_i} \prod_{k=j+1}^{n} \left(\frac{x_k - t}{x_k - x_j} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} \prod_{i=j+1}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

$$= \prod_{i=0}^{j-1} \frac{t - x_i}{x_j - x_i} \prod_{k=j+1}^{n} \frac{t - x_k}{x_j - x_k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{t - x_i}{x_j - x_i}$$

ce qui nous donne l'expression classique des polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$f\left(t\right) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{t - x_i}{x_j - x_i}$$

Chapitre 7

Exercices illustrant l'utilisation de déterminants

Exercice 7.1. *Matrices à coefficients dans* $\{-1, 1\}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. *Montrer que :*

1. *si tous les coefficients de* A *sont dans* $\{0, 2\}$, *alors* $\det(A)$ *est divisible par* 2^n *;*
2. *si tous les coefficients de* A *sont dans* $\{-1, 1\}$, *alors* $\det(A)$ *est divisible par* 2^{n-1}.

Solution.

1. On a $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ avec $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$ si l'un des $a_{\sigma(i),i}$ est nul ou $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 2^n$ si tous les $a_{\sigma(i),i}$ valent 2. Il en résulte que $\det(A)$ est divisible par 2^n. On peut aussi procéder par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, $\det(A)$ qui vaut 0 ou 2 est divisible par 2. Supposant le résultat acquis au rang $n-1 \geq 1$, on a en développant le déterminant par rapport à la première colonne, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})$, où chaque matrice $A_{i,1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ déduite de A en supprimant la i-ième ligne et la première colonne est à coefficients dans $\{0, 2\}$. Par hypothèse de récurrence, on a $\det(A_{i,1}) = q_{i,1} 2^{n-1}$ avec $q_{i,1} \in \mathbb{Z}$, ce qui nous donne $\det(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} q_{i,1} \right) 2^{n-1}$, les $a_{i,1}$ valant 0 ou 2, ce qui implique que $\det(A)$ est divisible par 2^n.
2. Si, pour i compris entre 1 et n, le coefficient a_{i1} vaut -1, en notant $B_{i,1}$ la matrice déduite de A en multipliant la ligne i par -1, on a $\det(A) = -\det(B_{i,1})$ (linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne), le coefficient numéro $(i, 1)$ de $B_{i,1}$ valant $|a_{i,1}| = 1$. Donc en désignant par B la matrice de coefficients $b_{i,1} = |a_{i,1}| = 1$ et $b_{ij} = a_{ij}$ pour $2 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq n$, on a $\det(A) = \pm \det(B)$. En désignant par C la matrice déduite de B en ajoutant la première colonne aux autres, on a $\det(C) = \det(B)$, les coefficients de C valant

1 sur la première colonne et 0 ou 2 sur les autres colonnes. En développant le déterminant de C suivant la première colonne, on a $\det(A) = \pm \det(C) = q2^{n-1}$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7.2. *Déterminants déduits de Vandermonde*

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique différente de 2. À tout entier $n \geq 2$ et toute suite $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on associe la matrice de Vandermonde :

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \left(\alpha_j^{i-1}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et on note $\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, le déterminant de cette matrice.

1. *Montrer que $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est inversible si, et seulement si, les α_k pour k compris entre 1 et n sont deux à deux distincts.*
2. *Montrer que $\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.*
3. *Calculer $\Delta(1, 2, \cdots, n)$.*
4. *Soient $(P_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de polynômes dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $Q(P_1, \cdots, P_n)$ la matrice dont les colonnes sont formées des composantes de chaque polynôme P_k dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Montrer que :*

$$\det \begin{pmatrix} P_1(\alpha_1) & \cdots & P_1(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(\alpha_1) & \cdots & P_n(\alpha_n) \end{pmatrix} = \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \det(Q(P_1, \cdots, P_n))$$

Dans le cas particulier où chaque polynôme P_k, pour k compris entre 1 et $n-1$ est unitaire de degré $k-1$, montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} P_1(\alpha_1) & \cdots & P_1(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(\alpha_1) & \cdots & P_n(\alpha_n) \end{pmatrix} = \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

5. *Soit* $A_n = \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & (n+1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \cdots & (2n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$. *Montrer que :*

$$\det(A_n) = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} ((n-1)!)^n$$

Solution.

1. S'il existe $i \neq j$ tels que $\alpha_i = \alpha_j$, la matrice $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ a alors deux colonnes identiques, ce qui implique qu'elle est non inversible. Réciproquement, si $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est non inversible, il en est alors de même de ${}^tV(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^{j-1} x_j = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

a une solution $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ non nulle, ce qui revient à dire que $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont des racines du polynôme $P(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j X^{j-1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$ et nécessairement il existe $i \neq j$ tels que $\alpha_i = \alpha_j$, sans quoi P aurait n racines distinctes en étant non nul de degré au plus égal à $n-1$, ce qui n'est pas possible.

2. Pour $n = 2$, on a $\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1$. En supposant le résultat acquis pour $n - 1 \geq 2$, on propose trois méthodes de démonstration par récurrence.

   (a) En retranchant, pour $i = n, n-1, \cdots, 2$, à la ligne i de $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ sa ligne $i - 1$ multipliée par α_1, on obtient :

$$\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

   soit par n-linéarité du déterminant :

$$\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \left(\prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$
$$= \left(\prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1)\right) \Delta(\alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

et avec l'hypothèse de récurrence, cela donne :

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \left(\prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1)\right) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)\end{aligned}$$

(b) Le déterminant étant une forme n-linéaire alternée, on a pour tout polynôme P unitaire de degré $n-1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(\alpha_1) & P(\alpha_2) & \cdots & P(\alpha_n) \end{vmatrix} = \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

Prenant $P(X) = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(\alpha_n) \end{vmatrix} = P(\alpha_n) \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_k)\right) \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})\end{aligned}$$

et avec l'hypothèse de récurrence, cela donne :

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_k)\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1}^{n} (\alpha_j - \alpha_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)\end{aligned}$$

(c) Dans le cas où deux des α_k sont égaux, la formule est triviale. Dans le cas contraire, le polynôme $V(X) = V(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, X)$ qui est de degré $n-1$ (développement par rapport à la dernière colonne) s'annule en $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ deux à deux distincts, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $V(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k)$. En développant le déterminant $V(X)$ par rapport à la dernière colonne, on voit que λ qui est le coefficient de X^{n-1} est égal à $\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$, ce qui nous donne par évaluation en α_n, $\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_k)$ et on conclut encore par récurrence.

3. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq 1 < j \leq n} (j-i) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (j-i) = \prod_{j=2}^{n} (j-1)! = \prod_{j=1}^{n-1} j!$$

4. En notant $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} X^j$ pour tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{pmatrix} a_{0,1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= {}^tQ(P_1, \cdots, P_n) V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \end{aligned}$$

où $Q(P_1, \cdots, P_n)$ est la matrice dont les colonnes sont formées des composantes de chaque polynôme P_j dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (dans le où la famille $(P_j)_{1 \leq j \leq n}$ est libre, cette matrice est la matrice de passage de $\left(X^{j-1}\right)_{1 \leq j \leq n}$ à $(P_j)_{1 \leq j \leq n}$), donc $\det(V_n) = \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \det(Q(P_1, \cdots, P_n))$. Dans le cas particulier où chaque polynôme P_k, pour k compris entre 1 et $n-1$ est unitaire de degré $k-1$, la matrice $Q(P_1, \cdots, P_n)$ est triangulaire supérieure avec tous ses termes diagonaux égaux à 1, donc $\det(Q(P_1, \cdots, P_n)) = 1$ et $\det(A_n) = \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

5. On prend $\alpha_k = k$ et $P_k(X) = (X+k-1)^{n-1}$ pour $1 \leq k \leq n$. Dans ce cas, on a $\Delta(1, \cdots, n) = \prod_{j=1}^{n-1} j!$ et $P_1(X) = X^{n-1}$, $P_k(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (k-1)^{n-1-i} X^i$ pour $2 \leq k \leq n$, donc :

$$\begin{aligned} \det(Q(P_1, \cdots, P_n)) &= \begin{vmatrix} 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{0} 2^{n-1} & \cdots & \binom{n-1}{0} (n-1)^{n-1} \\ 0 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{1} 2^{n-2} & \cdots & \binom{n-1}{1} (n-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-2} 2 & \cdots & \binom{n-1}{n-2} n-1 \\ 1 & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{n-1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & 2^{n-2} & \cdots & (n-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

soit :

$$\det\left(Q\left(P_1,\cdots,P_n\right)\right)=(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}\begin{vmatrix}1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1}\\ 1 & 2^{n-2} & \cdots & (n-1)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 2 & \cdots & n-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(n-1)!\begin{vmatrix}1 & 2^{n-2} & \cdots & (n-1)^{n-2}\\ 1 & 2^{n-3} & \cdots & (n-1)^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

avec :

$$\begin{pmatrix}1 & 2^{n-2} & \cdots & (n-1)^{n-2}\\ 1 & 2^{n-3} & \cdots & (n-1)^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}=P_\sigma\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 2^{n-2} & \cdots & (n-1)^{n-2}\end{pmatrix}$$

où P_σ est la matrice de permutation associée à $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1\\ n-1 & n-2 & \cdots & 1\end{pmatrix}$, ce qui nous donne en notant $\lambda_n=(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(n-1)!$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ :

$$\det\left(Q\left(P_1,\cdots,P_n\right)\right)=\lambda_n\varepsilon(\sigma)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 2^{n-2} & \cdots & (n-1)^{n-2}\end{vmatrix}$$
$$=\lambda_n\varepsilon(\sigma)\Delta(1,\cdots,n-1)$$

avec :

$$\lambda_n\Delta(1,\cdots,n-1)=(-1)^{n+1}((n-1)!)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\frac{1}{i!\,(n-1-i)!}\prod_{j=1}^{n-2}j$$
$$=(-1)^{n+1}((n-1)!)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\frac{1}{j!}$$

et :

$$\varepsilon(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n-1}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}=\prod_{1\leq i<j\leq n-1}\frac{(n-j)-(n-i)}{j-i}$$
$$=\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(-1)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

donc :

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= \Delta(1,\cdots,n)\det(Q(P_1,\cdots,P_n))\\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} j!\right)(-1)^{n+1}\varepsilon(\sigma)((n-1)!)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\frac{1}{j!}\\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}((n-1)!)^n\end{aligned}$$

Exercice 7.3. *Utilisation des déterminants de Vandermonde.*

1. *Utilisant un déterminant de Vandermonde, montrer que les vecteurs propres $x_1,\cdots,x_p$ non nuls d'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associés à des valeurs propres $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.*
2. *On suppose $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et les scalaires $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ deux à deux distincts. Montrer que pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré $n-1$, la famille de polynômes $(P(X+\alpha_k))_{1\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.*
3. *En utilisant des déterminants de Vandermonde, montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n\ge 1$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors toutes les dérivées $f^{(k)}$, pour k compris entre 1 et n, sont également bornées sur $\mathbb{R}$.*

Solution.

1. On a $Ax_i=\alpha_i x_i$ pour $1\le i\le p$ et pour tout entier naturel j, $A^j x_i=\alpha_i^j x_i$ pour $1\le i\le p$. Si $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i=0$, en appliquant A^j, pour $j\in\mathbb{N}$, on a $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\alpha_i^j x_i=0$.

   On notant $x_i=(x_{i,k})_{1\le k\le n}$, on a $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\alpha_i^j x_{i,k}=0$ pour tout $j\in\mathbb{N}$, donc chaque vecteur $X_k=(\lambda_i x_{i,k})_{1\le i\le p}$ est solution de $V(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)X=0$, ce qui donne $X_k=0$ pour tout k compris entre 1 et n, soit $\lambda_i x_{i,k}=0$ pour tout i compris entre 1 et p et tout k compris entre 1 et n. On a donc, pour tout i compris entre 1 et p, $\lambda_i x_i=0$ et $\lambda_i=0$ puisque $v_i\neq 0$.
2. Notons $P_k(X)=P(X+\alpha_k)$ pour $1\le k\le n$. Comme P est de degré $n-1$, la famille $\left(P^{(j)}\right)_{0\le j\le n-1}$, qui est échelonnée en degrés ($\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle) est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[x]$ (si $P(X)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$, la matrice de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec les $\dfrac{(n-1)!}{(n-1-j)!}a_{n-1}\neq 0$ pour éléments diagonaux). Avec la formule de Taylor pour les polynômes, on a :

$$P_k(X)=P(X+\alpha_k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\alpha_k^j}{j!}P^{(j)}(X)$$

C'est à dire que la matrice du système $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ dans la base $\left(\dfrac{1}{j!}P^{(j)}\right)_{0\leq j\leq n-1}$ est la matrice de Vandermonde $V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. Dans le cas particulier où les α_i sont deux à deux distincts cette matrice est inversible et en conséquence $(P_k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

3. Pour tout réel x et tout entier p compris entre 1 et n, la formule de Taylor à l'ordre n sur l'intervalle $[x, x+p]$ s'écrit :

$$f(x+p) - f(x) - \frac{f^{(n+1)}(x+p\theta_p)}{(n+1)!}p^{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}p^k$$

avec $0 < \theta_p < 1$, ce qui peut s'écrire matriciellement $V(x) = AU(x)$, où on a noté :

$$V(x) = \begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) - \dfrac{f^{(n+1)}(x+\theta_1)}{(n+1)!} \\ \vdots \\ f(x+n) - f(x) - \dfrac{f^{(n+1)}(x+n\theta_n)}{(n+1)!}n^{n+1} \end{pmatrix},\ U(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{f^{(1)}(x)}{1!} \\ \vdots \\ \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} \end{pmatrix}$$

et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\det(A) = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n!\prod_{1\leq 1<j\leq n}(i-j) \neq 0$$

(déterminant de Vandermonde), c'est-à-dire que la matrice A est inversible. On peut donc écrire que $U(x) = A^{-1}V(x)$ et $\|U(x)\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty \|V(x)\|_\infty$, soit :

$$\begin{aligned} \max_{1\leq k\leq n}\left|\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right| &\leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty \max_{1\leq p\leq n}\left|f(x+p) - f(x) - \frac{f^{(n+1)}(x+p\theta_p)}{(n+1)!}p^{n+1}\right| \\ &\leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty\left(2\|f\|_\infty + \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty\right) \end{aligned}$$

le réel x étant quelconque. On a donc pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leq k!\left\|A^{-1}\right\|_\infty\left(2\|f\|_\infty + \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty\right)$$

(inégalités de Kolmogorov).

Chapitre 8

Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés

Exercice 8.1. *Condition pour que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On note $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans le plan complexe et $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A. On désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ de matrice A dans la base canonique.

1. *Étudier le cas où $p = 1$.*
2. *Montrer que si la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on a alors $\mathrm{Sp}(A) \subset D(0,1) \cup \{1\}$ et $\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.*
3. *Pour cette question, on suppose que $p = 2$, que les valeurs propres λ_1, λ_2 de A sont dans $D(0,1) \cup \{1\}$ et que $\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.*
   (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*
   $$A^n = \begin{cases} n\lambda_1^{n-1}A - (n-1)\lambda_1^n I_2 \text{ si } \lambda_1 = \lambda_2 \\ \dfrac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}A - \lambda_1\lambda_2\dfrac{\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}I_2 \text{ si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$
   (b) *En déduire que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.*
4. *Pour cette question, on suppose que $p \geq 2$, $\mathrm{Sp}(A) \subset D(0,1) \cup \{1\}$ et $\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.*
   (a) *Dans le cas où $\mathrm{Sp}(A) \subset D(0,1)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$.*
   (b) *Dans le cas où $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, montrer que $A = I_p$ (donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire sur I_n).*
   (c) *On suppose que $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de A d'ordre r compris entre 1 et $n - 1$ et on note $\lambda_2, \cdots, \lambda_m$ les autres valeurs propres deux à deux distinctes de A qui sont nécessairement dans $D(0,1)$.*

i. *Montrer que les sous-espaces vectoriels* $\ker(u - Id)$ *et* $\mathrm{Im}(u - Id)$ *sont stables par* u *et supplémentaires dans* $\mathbb{C}^p$.

ii. *On note* u_1 *la restriction de* u *à* $\mathrm{Im}(u - Id)$. *Montrer que* $\mathrm{Sp}(u_1) = \{\lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$.

iii. *Montrer que* $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.*

5. *Conclure.*

Solution.

1. Pour $p = 1$, on a $A = (\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et il s'agit alors d'étudier la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $\lambda = 0$, cette suite est stationnaire sur 0. Pour $|\lambda| > 1$, la formule du binôme de Newton nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|\lambda^n| = (1 + |\lambda| - 1)^n \geq 1 + n(|\lambda| - 1)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |\lambda|^n = +\infty$ et la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Pour $0 < |\lambda| < 1$, en écrivant que $|\lambda|^n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^n}$ avec $\dfrac{1}{|\lambda|} > 1$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. Pour $|\lambda| = 1$, la convergence de la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que :
$$0 = \lim_{n\to+\infty} \left|\lambda^{n+1} - \lambda^n\right| = \lim_{n\to+\infty} |\lambda|^n |\lambda - 1| = |\lambda - 1|$$
soit que $\lambda = 1$ et réciproquement, pour $\lambda = 1$, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire sur 1. En conclusion, la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, on a $\lambda = 1$ ou $|\lambda| < 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. On vérifie facilement par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u^n(x) = \lambda^n x$ (soit en termes matriciels, $A^n X = \lambda^n X$ avec des notations évidentes), donc la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ implique celle de la suite $(\lambda^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^p$, soit celle de la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque x est non nul, ce qui revient à dire que $\lambda = 1$ ou $|\lambda| < 1$. On a donc $\mathrm{Sp}(A) \subset D(0,1) \cup \{1\}$.
Soit $y = u(x) - x \in \mathrm{Im}(u - Id)$. Si $y \in \ker(u - Id)$, on a alors $u(y) = y$, soit $u^2(x) = 2u(x) - x$ et par récurrence sur $n \geq 1$, il en résulte que :
$$u^n(x) = nu(x) - (n-1)x = n(u(x) - x) + x = ny + x$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit en termes matriciels $A^n X = nY + X$ la suite $(A^n X)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans $\mathbb{C}^p$, ce qui impose que $y = 0$. On a donc :
$$\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$$

3.

(a) En désignant par $P_A(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$ le polynôme caractéristique de A, le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $P_A(A) = 0$. D'autre part, le théorème de division euclidienne nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n et deux réels

α_n et β_n tels que $X^n = P_A(X) Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n$, ce qui nous donne $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$. Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$, la racine λ_1 de P_A est double et on a $P_A(\lambda_1) = P_A'(\lambda_1) = 0$, ce qui nous donne $\lambda_1^n = \alpha_n \lambda_1 + \beta_n$ et $n\lambda_1^{n-1} = \alpha_n$, soit $A^n = n\lambda_1^{n-1} A - (n-1)\lambda_1^n I_2$. Dans le cas où $\lambda_1 \neq \lambda_2$, des égalités $\lambda_1^n = \alpha_n \lambda_1 + \beta_n$ et $\lambda_2^n = \alpha_n \lambda_2 + \beta_n$, on déduit que $\alpha_n = \dfrac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}$ et $\beta_n = -\lambda_1\lambda_2 \dfrac{\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}$. On a donc :

$$A^n = \begin{cases} n\lambda_1^{n-1} A - (n-1)\lambda_1^n I_2 \text{ si } \lambda_1 = \lambda_2 \\ \dfrac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} A - \lambda_1\lambda_2 \dfrac{\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} I_2 \text{ si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

(b) Si λ_1 et λ_2 sont toutes deux dans $D(0,1)$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_k^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\lambda_k^{n-1} = 0$ pour $k = 1, 2$ et de la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$. Si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 \neq \lambda_1$, on a alors $|\lambda_2| < 1$ et de la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \dfrac{1}{1-\lambda_2}(A - \lambda_2 I_2)$. Si $\lambda_2 = \lambda_1$, la valeur propre 1 est alors double et la matrice A est semblable à une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui implique que $A - I_2$ est semblable à $T - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $c \neq 0$, on a $\ker(u - Id) = \operatorname{Im}(u - Id) \neq \{0\}$, ce qui contredit l'hypothèse $\ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id) = \{0\}$. On a donc montré pour $p = 2$, l'équivalence :

$$\begin{aligned} &\left((A^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right) \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{Sp}(A) \subset D(0,1) \cup \{1\} \text{ et } \ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id) = \{0\}) \end{aligned}$$

4.

(a) Si $\operatorname{Sp}(A) \subset D(0,1)$, alors 1 n'est pas valeur propre de u et on a automatiquement $\ker(u - Id) \cap \operatorname{Im}(u - Id) = \{0\} = \ker(u - Id) = \{0\}$. En utilisant la décomposition de Dunford, $A = D + N$ avec D diagonalisable qui commute à N nilpotente, on a $N^k = 0$ pour tout $k \geq p$ et pour tout $n \geq p$, on a $A^n = \sum\limits_{k=0}^{p} \dbinom{n}{k} D^{n-k} N^k$. La matrice D étant diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que A, il existe une matrice $P \in GL_p(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ de termes diagonaux $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ dans $D(0,1)$ (les valeurs propres distinctes ou confondues de A) telles que $D = P\Delta P^{-1}$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} D^{n-k} &= \frac{1}{k!} \lim_{n\to+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) P\Delta^{n-k} P^{-1} \\ &= \frac{1}{k!} P \left(\lim_{n\to+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\Delta^{n-k} \right) P^{-1} = 0 \end{aligned}$$

pour tout k compris entre 0 et p (continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\alpha_j^{n-k} = 0$ pour $1 \leq j \leq p$ puisque $|\alpha_j| < 1$), ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$.

On peut aussi raisonner en utilisant le théorème de trigonalisation qui nous dit qu'il existe une base $(e_k)_{1\leq k\leq p}$ de $\mathbb{C}^p$ dans laquelle la matrice de u est de la forme $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}$, où les α_j sont les valeurs propres de A supposées être dans $D(0,1)$. On vérifie alors que, pour tout entier k compris entre 1 et p, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_k) = 0$. Pour $k = 1$, on a $u(e_1) = \alpha_1 e_1$ et par récurrence sur $n \geq 0$, on en déduit que $u^n(e_1) = \alpha_1^n e_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sachant que $|\alpha_1| < 1$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_1) = 0$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_j) = 0$ pour tout entier j compris entre 1 et $k-1$ pour $k \geq 2$. On a $u(e_k) = \alpha_k e_k + x$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{ik} e_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_{k-1})$. Par récurrence sur $n \geq 1$, on en déduit que :

$$u^n(e_k) = \alpha_k^n e_k + \alpha_k^{n-1} x + \alpha_k^{n-2} u(x) + \cdots + \alpha_k u^{n-2}(x) + u^{n-1}(x)$$

C'est vrai pour $n = 1$. Supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u^{n+1}(e_k) &= \alpha_k^n(\alpha_k e_k + x) + \alpha_k^{n-1} u(x) + \cdots + \alpha_k u^{n-1}(x) + u^n(x) \\ &= \alpha_k^{n+1} e_k + \alpha_k^n x + \alpha_k^{n-1} u(x) + \cdots + \alpha_k u^{n-1}(x) + u^n(x) \end{aligned}$$

soit le résultat au rang $n+1$. Sachant que $|\alpha_k| < 1$, on a déjà $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_k^{n+1} e_k = 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(x) = 0$ (on a $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_{k-1})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq k-1$), pour $\varepsilon > 0$ donné, en se donnant une norme sur $\mathbb{C}^p$ (elles sont toutes équivalentes en dimension finie), il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|u^n(x)\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. En notant $y_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_k^{n-1-j} u^j(x)$, on a pour $n > n_0$:

$$\begin{aligned} \|y_n\| &\leq \sum_{j=0}^{n_0-1} |\alpha_k|^{n-1-j} \left\|u^j(x)\right\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} |\alpha_k|^{n-1-j} \left\|u^j(x)\right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0-1} |\alpha_k|^{n-1-j} \left\|u^j(x)\right\| + \varepsilon \sum_{j=0}^{+\infty} |\alpha_k|^{n-1-j} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_0-1} |\alpha_k|^{n-1-j} \left\|u^j(x)\right\| + \frac{\varepsilon}{1-|\alpha_k|} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} |\alpha_k|^{n-1-j} = 0$ pour tout j compris entre 0 et $n-1$. Il existe donc un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $\sum\limits_{j=0}^{n_0-1} |\alpha_k|^{n-1-j} \left\| u^j(x) \right\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui nous donne $\|y_n\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-|\alpha_k|}\right)\varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$ et prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. Au final, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_k) = 0$ pour tout entier k compris entre 1 et p, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n = 0$ et cela équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n = 0$ puisque T est la matrice de u dans la base $(e_k)_{1\leq k\leq p}$ de $\mathbb{C}^p$. Comme T est semblable à la matrice A et le produit matriciel est continu, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$.

(b) Dans le cas où $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, le polynôme minimal de A est $\pi_A(X) = (X-1)^r$, où l'entier r est compris entre 1 et n. Si $r \geq 2$, on a alors $(u-Id)^r = 0$ et $(u-Id)^{r-1} \neq 0$, donc il existe $x \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$ tel que $y = (u-Id)^{r-1}(x) \neq 0$, ce vecteur étant dans $\mathrm{Im}(u-Id)$ puisque $r \geq 2$ et dans $\ker(u-Id)$ puisque $(u-Id)(y) = (u-Id)^r(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\ker(u-Id) \cap \mathrm{Im}(u-Id) = \{0\}$. On a donc $r = 1$ et $u = Id$, soit $A = I_p$.

(c)

i. Pour tout $x \in \ker(u-Id)$, on a $u(x) = x$ et $u(u(x)) = u(x)$, donc $u(x) \in \ker(u-Id)$ et $\ker(u-Id)$ est stable par u. Pour tout $y = u(x) - x \in \mathrm{Im}(u-Id)$, on a $u(y) = u(u(x)) - u(x) \in \mathrm{Im}(u-Id)$, $\mathrm{Im}(u-Id)$ est stable par u. Le théorème du rang nous dit que :

$$\dim(\ker(u-Id)) + \dim(\mathrm{Im}(u-Id)) = \dim(\mathbb{C}^p)$$

et d'autre part, on a $\ker(u-Id) \cap \mathrm{Im}(u-Id) = \{0\}$, il en résulte que $\mathbb{C}^p = \ker(u-Id) \oplus \mathrm{Im}(u-Id)$.

ii. On a la somme directe $\mathbb{C}^p = \ker(u-Id) \oplus \mathrm{Im}(u-Id)$, les sous-espaces vectoriels $\ker(u-Id)$ et $\mathrm{Im}(u-Id)$ étant stables par u, donc $P_u(X) = (X-1)^r P_{u_1}(X)$ et $\mathrm{Sp}(u_1) = \{\lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$.

iii. Si $\mathrm{Im}(u-Id) = \{0\}$, on a alors $u = Id$, ce qui est exclu. On a donc $\mathrm{Im}(u-Id) \neq \{0\}$. Comme $\mathrm{Sp}(u_1) = \{\lambda_2, \cdots, \lambda_m\} \subset D(0,1)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1^n = 0$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^p = \ker(u-Id) \oplus \mathrm{Im}(u-Id)$ la matrice de u est $B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ semblable à la matrice A, où A_1 est la matrice de u_1 dans une base de $\mathrm{Im}(u-Id)$. On a alors $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_p(\mathbb{C})$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} B^n = \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A_1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = P \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

5. On a donc montré, pour $p \geq 2$, l'équivalence :

$$\begin{aligned}&\left((A^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{Sp}\,(A) \subset D\,(0,1) \cup \{1\} \text{ et } \ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id) = \{0\}\right)\end{aligned}$$

Chapitre 9

Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables

Exercice 9.1. *Matrices de Hessenberg*

On appelle matrice de Hessenberg une matrice A à coefficients complexes telle que $a_{ij} = 0$ pour $j < i - 1$. Une telle matrice est dite irréductible si $a_{i,i-1} \neq 0$ pour tout $i = 2, \cdots, n$.

1. *Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de Hessenberg irréductible, alors pour toute valeur propre de A, l'espace propre associé est de dimension 1.*
2. *En déduire que les valeurs propres d'une matrice de Hessenberg irréductible sont simples si, et seulement si, la matrice est diagonalisable.*
3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ *une matrice à coefficients réels, tridiagonale (donc de Hessenberg) symétrique et irréductible.*
   (a) *Montrer que les valeurs propres de A sont simples.*
   (b) *Décrire un algorithme de calcul de l'espace propre associé à une valeur propre de A.*
4. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$ *une matrice tridiagonale à coefficients complexes.*
   (a) *Donner un algorithme de calcul du polynôme caractéristique de A.*

(b) Montrer que A admet les mêmes valeurs propres que la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & c_3 b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} & c_n b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que si $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $c_{i+1} b_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $i = 1, \cdots, n-1$, alors A admet n valeurs propres réelles simples et est diagonalisable.

Solution.

1. Pour tout nombre complexe λ, on note :

$$A_\lambda = A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n} \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} - \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix}$$

En désignant par B_λ la matrice extraite de A_λ en supprimant la première ligne et la dernière colonne, soit :

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n} \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} - \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

on a $\det(B_\lambda) = \prod\limits_{i=2}^{n} a_{i,i-1} \neq 0$, donc A_λ est de rang égal à $n-1$ ou n, ce qui revient à dire que $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) \leq 1$. Dans le cas où λ est une valeur propre de A, on a alors $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) = 1$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg irréductible. Elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, pour toute valeur propre λ de A, la dimension de $\ker(A - \lambda I_n)$ est égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de A, ce qui revient à dire d'après la question précédente, que toutes ses valeurs propres sont simples.

3.

   (a) Une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable. Si de plus elle tridiagonale et irréductible, elle est alors de Hessenberg irréductible et toutes ses valeurs propres sont simples.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur propre associé, on a alors :

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 = \lambda x_1 \\ b_{k-1} x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1} = \lambda x_k \quad (2 \leq k \leq n-1) \\ b_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Si $x_n = 0$, avec l'hypothèse $b_i \neq 0$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$, on déduit alors que tous les x_i sont nuls. On peut donc prendre $x_n = 1$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ est solution du système triangulaire supérieur :

$$\begin{cases} b_{k-1} x_{k-1} + (a_k - \lambda)\, x_k + b_k x_{k+1} = 0 \ \ (2 \leq k \leq n-2) \\ b_{n-2} x_{n-2} + (a_{n-1} - \lambda)\, x_{n-1} = -b_{n-1} \\ b_{n-1} x_{n-1} = \lambda - a_n \end{cases}$$

La solution de ce système peut se calculer avec l'algorithme :

$$\begin{cases} x_{n-1} = \dfrac{\lambda - a_n}{b_{n-1}} \\ x_{k-1} = -\dfrac{b_k x_{k+1} + (a_k - \lambda)\, x_k}{b_{k-1}} \quad (k = n-1, \cdots, 2) \end{cases}$$

4. Pour $1 \leq k \leq n$, on note A_k la matrice principale d'ordre k de A.

(a) La suite $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$ des polynômes caractéristiques des A_k vérifie la récurrence :

$$\begin{cases} P_0(\lambda) = 1, \quad P_1(\lambda) = a_1 - \lambda \\ P_k(\lambda) = (a_k - \lambda)\, P_{k-1}(\lambda) - b_{k-1} c_k P_{k-2}(\lambda) \quad (2 \leq k \leq n) \end{cases}$$

(b) Le polynôme caractéristique de la matrice B s'obtient avec la même relation de récurrence que celui de A en utilisant les mêmes conditions initiales, ces deux polynômes sont donc identiques.

(c) En utilisant deux fois le résultat précédent, on voit que A admet les mêmes valeurs propres que la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{c_2 b_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{c_2 b_1} & a_2 & \sqrt{c_3 b_2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \sqrt{c_{n-1} b_{n-2}} & a_{n-1} & \sqrt{c_n b_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{c_n b_{n-1}} & a_n \end{pmatrix}$$

Cette matrice C symétrique tridiagonale et irréductible, donc diagonalisable avec n valeurs propres réelles simples. Il en résulte que A admet donc n valeurs propres réelles simples et est diagonalisable.

Deuxième partie

Leçons d'analyse et de probabilité

Exemples d’étude de suites ou de séries divergentes

Chapitre 10

Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence

Exercice 10.1. *Suite récurrente $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, développement asymptotique.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*
2. *Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.*
3. *Justifier le développement asymptotique :*

$$x_n = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

Solution. L'intervalle $\mathbb{R}^{+,*}$ étant stable par la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et si elle converge c'est vers l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}^+$, à savoir $\ell = 0$.

1. La fonction f est strictement croissante et $x_1 = \ln(1 + x_0) < x_0$ pour $x_0 > 0$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante minorée par 0 (stabilité de $\mathbb{R}^{+,*}$ par f), donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^+$. Cette limite étant point fixe de f, elle vaut 0.
2. Pour tout $x \in \left]-1, +\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

De $x_n \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{1}{2}$. Le théorème de Cesàro nous dit alors que :

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{nx_n}\right)$$

soit $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

3. En utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x\left(1-\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)\right)} = \frac{1}{x}\left(1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)\right)\end{aligned}$$

soit $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{x}{12} + o(x)$ et :

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x_n}{12} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}$$

La série $\sum \dfrac{1}{n}$ étant divergente, on a l'équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} - \frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\ln(n)$$

soit $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{n-1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{6}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{nx_n} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{6n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

ou encore :

$$nx_n = 2\left(1 - \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1} = 2\left(1 + \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

soit $x_n = \dfrac{2}{n}\left(1 + \dfrac{\ln(n)}{3n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.

Exercice 10.2. *Suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$, développement asymptotique.*

Soit $f : [0,1[\to [0,1[$ une fonction continue admettant au voisinage de 0 un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = x - ax^{\alpha+1} + \underset{x\to0^+}{o}\left(x^{\alpha+1}\right)$$

où a et α sont deux réels strictement positifs. On désigne par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 \in [0,1[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer qu'il existe un réel* $\eta \in \left]0,1\right[$ *tel que pour tout* $x_0 \in \left]0,\eta\right[$, *la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite nulle.*
2. *Montrer que pour tout* $x_0 \in \left]0,\eta\right[$, *on a* $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.
3. *On suppose qu'on a le développement asymptotique :*

$$f(x) = x - ax^{\alpha+1} - bx^{2\alpha+1} + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha+1}\right)$$

où $b \in \mathbb{R}^*$.

   (a) *Montrer que* $\dfrac{1}{x_{n+1}^{\alpha}} - \dfrac{1}{x_n^{\alpha}} - \alpha a \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{n}$, *où* $c = \dfrac{b}{a} + \dfrac{\alpha+1}{2} a$.

   (b) *Justifier le développement asymptotique :*

$$x_n = \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c}{\alpha} \frac{1}{(\alpha a)^{1+\frac{1}{\alpha}}} \frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

   (c) *Pour* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et* $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *vérifier que :*

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3} \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

   et pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et* $x_{n+1} = \sin(x_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *vérifier que :*

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

Solution. L'intervalle $\left[0,1\right[$ étant stable par la fonction f, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $x_0 \in \left[0,1\right[$.

1. La fonction f étant continue sur $\left[0,1\right[$, on a :

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\left(1 - ax^{\alpha} + \underset{x\to 0^+}{o}(x^{\alpha})\right) = 0$$

Avec $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-x}{x^{\alpha+1}} = -a < 0$, on déduit qu'il existe un réel $\eta \in \left]0,1\right[$ tel que $0 < f(x) < x \leq \eta$ pour tout $x \in \left]0,\eta\right]$. Le segment $[0,\eta]$ est donc stable par f (on a $f(0) = 0$), ce qui implique que pour tout $x_0 \in \left]0,\eta\right[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left[0,\eta\right[$ et strictement décroissante minorée par 0, donc convergente vers un point fixe de f sur $[0,\eta]$, soit vers 0 puisque c'est l'unique point fixe de f dans $[0,\eta]$.

2. Pour tout réel non nul δ et tout $x \in]0, \eta[$, on a $f(x) > 0$ et :

$$(f(x))^\delta - x^\delta = x^\delta \left(\left(1 - ax^\alpha + \underset{x \to 0^+}{o}(x^\alpha) \right)^\delta - 1 \right) = x^\delta \left(-\delta a x^\alpha + \underset{x \to 0^+}{o}(x^\alpha) \right)$$
$$= -x^{\delta+\alpha} \left(\delta a + \underset{x \to 0^+}{o}(1) \right) \underset{x \to 0^+}{\backsim} -\delta a x^{\delta+\alpha}$$

Prenant $\delta = -\alpha$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{(f(x))^\alpha} - \dfrac{1}{x^\alpha} \right) = \alpha a$, ce qui implique compte tenu de la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 pour $x_0 \in]0, \eta[$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{x_n^\alpha} \right) = \alpha a$. Le théorème de Cesàro nous dit alors que :

$$\alpha a = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}^\alpha} - \frac{1}{x_k^\alpha} \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_n^\alpha} - \frac{1}{x_0^\alpha} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n x_n^\alpha} \right)$$

soit $x_n^\alpha \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\alpha a}$, ou encore $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

3.

(a) En utilisant le développement asymptotique :

$$f(x) = x \left(1 - ax^\alpha - bx^{2\alpha} + \underset{x \to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha}\right) \right) = x(1 - u(x))$$

on obtient en posant $c = \dfrac{b}{a} + \dfrac{\alpha+1}{2} a$:

$$\frac{1}{(f(x))^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} (1 - u(x))^{-\alpha}$$
$$= \frac{1}{x^\alpha} \left(1 + \alpha x^\alpha (a + bx^\alpha) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} x^{2\alpha} (a + bx^\alpha)^2 + \underset{x \to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha}\right) \right)$$
$$= \frac{1}{x^\alpha} \left(1 + \alpha a x^\alpha + \alpha a \left(\frac{b}{a} + \frac{\alpha+1}{2} a \right) x^{2\alpha} + \underset{x \to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha}\right) \right)$$
$$= \frac{1}{x^\alpha} + \alpha a + \alpha a c x^\alpha + \underset{x \to 0^+}{o}(x^\alpha)$$

soit $\dfrac{1}{(f(x))^\alpha} - \dfrac{1}{x^\alpha} - \alpha a = \alpha a c x^\alpha + \underset{x \to 0^+}{o}(x^\alpha)$ et :

$$\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha} - \alpha a = \alpha a c x_n^\alpha \left(1 + \underset{n \to +\infty}{o}(1) \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha a c x_n^\alpha \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{c}{n}$$

(b) La série $\sum \dfrac{1}{n}$ étant divergente, on a l'équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha} - \alpha a \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} c \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} c \ln(n)$$

soit $\dfrac{1}{x_n^\alpha} - \dfrac{1}{x_1^\alpha} - (n-1)\,\alpha a \underset{n\to+\infty}{\sim} c\ln(n)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{nx_n^\alpha} &= \alpha a + \left(\frac{1}{x_1^\alpha} - \alpha a\right)\frac{1}{n} + c\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\\ &= \alpha a + c\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \alpha a\left(1 + \frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}nx_n^\alpha &= \frac{1}{\alpha a}\left(1 + \frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{\alpha a}\left(1 - \frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1 - \frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\\ &= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1 - \frac{c}{\alpha^2 a}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c}{\alpha}\frac{1}{(\alpha a)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)\end{aligned}$$

(c) Pour $f(x) = \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, on a $a = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $b = -\dfrac{1}{3}$, et $c = -\dfrac{1}{6}$ ce qui nous donne $x_n = \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$.
Pour $f(x) = \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$, on a $a = \dfrac{1}{3!}$, $\alpha = 2$, $b = -\dfrac{1}{5!}$, et $c = \dfrac{1}{5}$ ce qui nous donne $x_n = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \dfrac{3\sqrt{3}}{10}\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$.

Chapitre 11

Exemples d'utilisation de polynômes en analyse

Exercice 11.1. *Quelques applications du développement de* $\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2p+1}$

Le développement de $\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2p+1}$ *par la formule du binôme de Newton pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *permet d'obtenir des formules de dénombrement et des formules de trigonométrie qui peuvent être exploitées pour calculer des intégrales de Wallis et de Dirichlet généralisées.*

1. *Montrer que pour tous* $p \in \mathbb{N}$ *et* $z \in \mathbb{C}^*$*, on a :*

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2p+1}=\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}\left(z^{2k+1}+\frac{1}{z^{2k+1}}\right)$$

puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}=2^{2p}$.

2. *En intégrant, pour* $p \in \mathbb{N}^*$*, la fonction* $z \mapsto \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2p-1}$ *sur le cercle unité du plan complexe parcouru une fois dans le sens direct, déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale de Wallis* $W_{2p}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t$.

3. *Montrer que pour tous* $p \in \mathbb{N}$ *et* $z \in \mathbb{C}^*$*, on a :*

$$(2p+1)\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2p}=\sum_{k=0}^{p}(2k+1)\binom{2p+1}{p-k}\sum_{j=0}^{2k}z^{2(k-j)}$$

puis en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{p}(2k+1)\binom{2p+1}{p-k}=(2p+1)\binom{2p}{p}$$

4. *Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\cos^{2p+1}(t) = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{p-k} \cos((2k+1)t)$$

5. *Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale impropre $\Delta_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, puis que l'on a $\Delta_n = n\int_0^{+\infty} \cos^{n-1}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. Pour $n = 1$, il s'agit de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.*

6. *Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Delta_{2p+1} = \frac{(2p+1)}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\Delta_1$.*

7. *Montrer que pour tout réel $\lambda > 1$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = 0$.*

8. *Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\Delta_{2p} = \frac{p}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p}\Delta_1$.*

Sachant que $\Delta_1 = \frac{\pi}{2}$, on déduit de ce qui précède que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{(2p+1)\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{p\pi}{2^{2p}}\binom{2p}{p}$$

Solution.

1. Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k} z^{2(p-k)+1}$$

En effectuant le changement d'indice $k = 2p+1-j$ pour $p+1 \leq k \leq 2p+1$, on a :

$$\sum_{k=p+1}^{2p+1}\binom{2p+1}{k} z^{2(p-k)+1} = \sum_{j=0}^{p}\binom{2p+1}{j} z^{-(2(p-j)+1)}$$

donc :

$$\begin{aligned}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2p+1} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\left(z^{2(p-k)+1}+\frac{1}{z^{2(p-k)+1}}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}\left(z^{2k+1}+\frac{1}{z^{2k+1}}\right) \qquad (11.1)\end{aligned}$$

L'évaluation en $z = 1$ dans (11.1) donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{p-k} = 2^{2p}$.

2. En intégrant sur le cercle unité γ du plan complexe parcouru une fois dans le sens direct, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ compte tenu des propriétés de parité des fonctions cos et sin et du fait que $\displaystyle\int_\gamma z^p \mathrm{d}z = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ et $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi$:

$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p-1} \mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{it} + e^{-it}\right)^{2p-1} ie^{it}\mathrm{d}t$$
$$= i2^{2p-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2p-1}(t)\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)\mathrm{d}t = i2^{2p}\int_0^{\pi} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{p-1-k}\left(\int_\gamma z^{2k+1}\mathrm{d}z + \int_\gamma \frac{1}{z^{2k+1}}\mathrm{d}z\right) = 2i\pi\binom{2p-1}{p-1}$$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2p-1}}\binom{2p-1}{p-1} = \frac{\pi}{2^{2p}}\binom{2p}{p}$ où :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui nous donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p}$.

3. En dérivant (11.1) on a :

$$(2p+1)\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = \sum_{k=0}^{p}(2k+1)\binom{2p+1}{p-k}\left(z^{2k} - \frac{1}{z^{2(k+1)}}\right)$$

où :

$$z^{2k} - \frac{1}{z^{2(k+1)}} = z^{2k}\left(1 - \frac{1}{z^{2(2k+1)}}\right) = z^{2k}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{z^{2j}}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\sum_{j=0}^{2k} z^{2(k-j)}$$

ce qui nous donne :

$$(2p+1)\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p} = \sum_{k=0}^{p}(2k+1)\binom{2p+1}{p-k}\sum_{j=0}^{2k} z^{2(k-j)}$$

En identifiant les termes constants dans cette dernière identité, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p}(2k+1)\binom{2p+1}{p-k} = (2p+1)\binom{2p}{p} \tag{11.2}$$

4. Prenant $z = e^{it}$ dans (11.1), on obtient :

$$2^{2p+1}\cos^{2p+1}(t) = \left(e^{it} + e^{-it}\right)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}\left(e^{i(2k+1)t} + e^{-i(2k+1)t}\right)$$
$$= 2\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}\cos((2k+1)t)$$

soit :

$$\cos^{2p+1}(t) = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}\cos((2k+1)t) \tag{11.3}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1-\cos^n(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais. Du fait que :

$$\frac{1-\cos^n(t)}{t^2} = \frac{1-\cos(t)}{t^2}\left(1+\cos(t)+\cdots+\cos^{n-1}(t)\right) \underset{t\to 0^+}{\to} \frac{n}{2}$$

on déduit que f_n se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = \dfrac{n}{2}$. Avec $|f_n(t)| \leq \dfrac{2}{t^2}$ pour $t > 0$ et la continuité de f_n sur $[0,1]$, on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Une intégration par parties nous donne pour tous réels $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_\varepsilon^R \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\cos^n(t)-1}{t}\right]_\varepsilon^R + n\int_\varepsilon^R \cos^{n-1}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

où $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\cos^n(\varepsilon)-1}{\varepsilon} = (\cos^n)'(0) = 0$ et $\left|\dfrac{\cos^n(R)-1}{R}\right| \leq \dfrac{2}{R}$, ce qui implique en faisant tendre (ε, R) vers $(0,+\infty)$ que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos^{n-1}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge comme Δ_n et $\Delta_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos^{n-1}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

6. En écrivant que :

$$1-\cos^{2p+1}(t) = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}\left(1-\cos((2k+1)t)\right)$$

et en exploitant le fait que pour tout réel $\lambda > 0$ on a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(\lambda t)}{t^2}\mathrm{d}t = \lambda\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \lambda\Delta_1$$

on déduit en exploitant l'identité (11.2) que :

$$\Delta_{2p+1} = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{p-k}(2k+1)\Delta_1$$
$$= \frac{2p+1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\Delta_1$$

7. Pour tous réels λ et t, on a :

$$\cos(\lambda t)\sin(t) = \frac{\sin((\lambda+1)t) - \sin((\lambda-1)t)}{2}$$

donc en exploitant le fait que pour tout réel $\gamma > 0$ on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\gamma t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \Delta_1$$

on déduit que pour tout réel $\lambda > 1$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)\sin(t)}{t} dt = 0$. Pour $\lambda = 1$, cette intégrale vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t} \mathrm{d}t = \frac{\Delta_1}{2}$.

8. Pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_{2p} &= 2p \int_0^{+\infty} \cos^{2p-1}(t) \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2p}{2^{2(p-1)}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{p-1-k} \int_0^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)t)\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2p}{2^{2(p-1)}} \binom{2p-1}{p-1} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{2p}{2^{2(p-1)}} \binom{2p-1}{p-1} \frac{\Delta_1}{2}
\end{aligned}$$

où $2p\binom{2p-1}{p-1} = p\binom{2p}{p}$, ce qui donne $\Delta_{2p} = \dfrac{p}{2^{2p-1}} \dbinom{2p}{p} \Delta_1$.

Exercice 11.2. *Une utilisation du théorème de Weierstrass*

L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de convergence uniforme. On désigne par Φ l'application définie sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}),\ \forall x \in [0,1],\ \Phi(f)(x) = \begin{cases} f(0) \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \text{ si } x \in \left]0,1\right] \end{cases}$$

1. *Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, puis qu'il est continu.*
   On note $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des itérés de l'endomorphisme Φ définie par $\Phi^0 = Id$ et $\Phi^{n+1} = \Phi^n \circ \Phi$.
2. *Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\Phi^n(P)$ pour toute fonction polynomiale $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$.*
3. *Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ la suite de fonctions $(\Phi^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction constante $f(0)$.*

Solution. On note $g = \Phi(f)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. La linéarité de Φ se déduit de celle de l'intégrale et de l'évaluation en 0. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, la fonction $g = \Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ avec $g'(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,1]$, donc g est en particulier continue sur $]0,1]$. Comme f est continue en 0, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in]0,\eta[$, ce qui implique que :
$$|g(x)-g(0)| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-f(0))\,dt\right| \leq \frac{1}{x}\left|\int_0^x |f(t)-f(0)|\,dt\right| \leq \varepsilon$$
et prouve que g est continue en 0. En conclusion $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et tout $x \in]0,1]$, on a $|g(x)| = \left|\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq \dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int_0^x |f(t)|\,dt\right| \leq \|f\|_\infty$. Pour $x = 0$, on a encore $|g(0)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui nous dit au final que $\|\Phi(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. L'application linéaire Φ est donc continue de norme d'opérateur $N_\infty(\Phi) \leq 1$. Pour $f = 1$, on a $\Phi(f) = f$ et $\|\Phi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$, donc $N_\infty(\Phi) = 1$.
2. En notant $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ définie par $e_k(x) = x^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on vérifie facilement que $\Phi(e_k) = \dfrac{1}{k+1}e_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $\Phi^n(e_k) = \dfrac{1}{(k+1)^n}e_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate). Par linéarité, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction polynomiale $P = \displaystyle\sum_{k=0}^m a_k e_k$, on a $\Phi^n(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{(k+1)^n}e_k$.
3. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction polynomiale $P = \displaystyle\sum_{k=0}^m a_k e_k$, on a :
$$\begin{aligned}\|\Phi^n(P) - P(0)\|_\infty &= \left\|\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{(k+1)^n}e_k - a_0\right\|_\infty = \left\|\sum_{k=1}^m \frac{a_k}{(k+1)^n}e_k\right\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{|a_k|}{(k+1)^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$
ce qui nous dit que
$$\lim_{n\to+\infty}\Phi^n(P) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{(k+1)^n}e_k\right) = a_0 = P(0)$$
la suite de fonctions $(\Phi^n(P))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction constante $P(0)$. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, le théorème de Weierstrass nous dit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que

$\|f - P\|_\infty < \varepsilon$, ce qui nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\|\Phi^n(f) - f(0)\|_\infty \\
&\leq \|\Phi^n(f) - \Phi^n(P)\|_\infty + \|\Phi^n(P) - P(0)\|_\infty + \|P(0) - f(0)\|_\infty \\
&\leq \|f - P\|_\infty + \|\Phi^n(P) - P(0)\|_\infty + \|P - f\|_\infty \\
&< 2\varepsilon + \|\Phi^n(P) - P(0)\|_\infty
\end{aligned}$$

De $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\Phi^n(P) - P(0)\|_\infty = 0$, on déduit qu'il existe un entier n_ε tel que $\|\Phi^n(P) - P(0)\|_\infty < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne au final $\|\Phi^n(f) - f(0)\|_\infty < 3\varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$ et nous dit que $(\Phi^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f(0)$.

Chapitre 12

Exemples d'applications des séries entières

Exercice 12.1. *Utilisation d'un théorème radial d'Abel pour calculer la somme de séries numériques*

1. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière complexe de rayon de convergence fini* $R > 0$. *On suppose qu'il existe un nombre complexe* z_0 *tel que* $|z_0| = R$ *et la série* $\sum a_n z_0^n$ *soit convergente. Pour tout* $t \in [0, 1]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k t^k$ *et* $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n t^n$.

   (a) *Montrer que pour tout* $t \in [0, 1[$, *on a* $\varphi(t) = (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(1) t^n$.

   (b) *En déduire que* $\lim_{t \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ *(théorème radial d'Abel).*

2. *En utilisant le théorème radial d'Abel, calculer les sommes :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \ \text{et} \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

3. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques et* $\sum w_n$ *leur produit de Cauchy, où* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En utilisant le théorème radial d'Abel, montrer que si les trois séries* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *et* $\sum w_n$ *convergent, on a alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

Solution.

1.

(a) Pour tout $t \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k z_0^k t^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(S_k(1) - S_{k-1}(1)\right) t^k \\
&= S_0(1) + \sum_{k=1}^{n} S_k(1) t^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k(1) t^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} S_k(1) \left(t^k - t^{k+1}\right) + S_n(1) t^n = (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} S_k(1) t^k + S_n(1) t^n
\end{aligned}$$

Tenant compte de $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(1) t^n = \varphi(1) \cdot 0 = 0$, on déduit que la série $\sum S_n(1) t^n$ converge et $\varphi(t) = (1-t) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n(1) t^n$.

(b) En utilisant l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n = \dfrac{1}{1-t}$ pour tout $t \in [0,1[$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - \varphi(1) &= (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(1) t^n - \varphi(1)(1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \\
&= (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(S_n(1) - \varphi(1)\right) t^n
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(1) = \varphi(1)$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |S_n(1) - \varphi(1)| < \varepsilon$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
|\varphi(t) - \varphi(1)| &\leq (1-t) \left(\sum_{k=0}^{n_0} |S_k(1) - \varphi(1)| t^k + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} t^k \right) \\
&\leq (1-t) \sum_{k=0}^{n_0} |S_k(1) - \varphi(1)| + \varepsilon (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \leq A(1-t) + \varepsilon
\end{aligned}$$

où on a noté $A = \sum\limits_{k=0}^{n_0} |S_k(1) - \varphi(1)|$. Pour t voisin de 1, on aura alors $|\varphi(t) - \varphi(1)| \leq 2\varepsilon$. On a donc $\lim\limits_{t \to 1^-} \varphi(t) = \varphi(1)$, soit :

$$\lim_{t \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$$

2. On a les développements en séries entières, de rayon de convergence égal à 1 :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \text{ et } \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

ces séries étant convergentes pour $x = 1$ (théorème des séries alternées). Il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = -2\ln(2)$$

3. On rappelle que le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. Comme les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, les séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. On note respectivement $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ les sommes de ces séries pour $x \in]-1, 1]$. Pour $|x| < 1$, les trois séries sont absolument convergentes et on a $h(x) = f(x) g(x)$. En utilisant le théorème d'Abel, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n &= h(1) = \lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \lim_{x \to R^-} g(x) \\ &= f(1) g(1) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \end{aligned}$$

Exercice 12.2. *Une utilisation de la série de Taylor*

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$.

1. *Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, on a :*

$$\int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0) \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$

2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$ pour tout réel x.*

3. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\int_0^x e^{x-t} t^r f^{(r)}(t)\, dt = \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) f^{(n)}(0) \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^n \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$ pour tout réel x.

Solution.

1. Pour tout $x \in]-R, R[$ et tout t dans le segment I d'extrémités 0 et x (soit $I = [0, x]$ pour $x \geq 0$ ou $I = [x, 0]$ pour $x \leq 0$), on a $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$, la convergence étant uniforme sur I. Il en résulte que :

$$\int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^x e^{-t} t^n dt$$

En notant $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} t^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_0(x) = 1 - e^{-x}$ et pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne :

$$I_n(x) = \left[-e^{-t} t^n\right]_0^x + n \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt = n I_{n-1}(x) - e^{-x} x^n$$

On en déduit alors par récurrence que $\dfrac{I_n(x)}{n!} = 1 - e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1 \geq 1$, on a :

$$\frac{I_n(x)}{n!} = \frac{I_{n-1}(x)}{(n-1)!} - e^{-x} \frac{x^n}{n!} = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \frac{x^n}{n!} = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

cette formule étant encore valable pour $n = 0$. Il en résulte que :

$$\int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\, e^x \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0) \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$

2. En utilisant la fonction $f : t \mapsto e^{\alpha t}$ qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(0) = \alpha^n$ et pour tout réel x :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = e^x \int_0^x e^{(\alpha-1)t} dt = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^x}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ x e^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$ et $x = 1$, on obtient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(e - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = e$ et pour $\alpha = -1$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) = \operatorname{sh}(x)$$

3. Pour tout $x \in \left]-R, R\right[$ et tout t dans le segment I d'extrémités 0 et x, on a :

$$f^{(r)}(t) = \sum_{n=r}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}n(n-1)\cdots(n-r+1)\,t^{n-r} = \sum_{n=r}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n-r)!}t^{n-r}$$

(une série entière est indéfiniment dérivable sur son domaine de convergence ouvert et on peut dériver terme à terme), la convergence étant uniforme sur I, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{x-t}t^r f^{(r)}(t)\,dt &= e^x\sum_{n=r}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n-r)!}\int_0^x e^{-t}t^n dt = e^x\sum_{n=r}^{+\infty}f^{(n)}(0)\,\frac{I_n(x)}{(n-r)!}\\ &= \sum_{n=r}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-r+1)\,f^{(n)}(0)\left(e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\end{aligned}$$

4. En utilisant la fonction $f : t \mapsto e^{\alpha t}$, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}n\alpha^n\left(e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}nf^{(n)}(0)\left(e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) = \int_0^x e^{x-t}tf'(t)\,dt\\ &= \alpha e^x\int_0^x te^{(\alpha-1)t}dt = \begin{cases}\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\left((\alpha x - x - 1)\,e^{\alpha x} + e^x\right) & \text{si } \alpha \neq 1\\ \dfrac{x^2e^x}{2} & \text{si } \alpha = 1\end{cases}\end{aligned}$$

(si l'on est peu courageux, on peut calculer cette intégrale à l'aide d'un logiciel). Pour $\alpha = 1$ et $x = 1$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\left(e - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = \frac{e}{2}$ et pour $\alpha = -1$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n\left(e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{xe^{-x} - \operatorname{sh}(x)}{2}$$

Exercice 12.3. *Nombre de partitions d'un entier en r parts fixées*

Étant donnés un entier $r \geq 2$ et des entiers naturel non nuls $a_1, \cdots, a_r$, on désigne pour tout $n \in \mathbb{N}$, par u_n le nombre de r-uplets $(n_1, \cdots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que $n_1a_1 + \cdots + n_ra_r = n$. Cet entier u_n est le nombre de partitions de l'entier n en r parts fixées. On note $D(0, z) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. *Montrer que le rayon de convergence de la série entière* $\sum u_n z^n$ *est au moins égal à* 1 *et que pour* $z \in D(0, z)$, *on a* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - z^{a_k}}$.

   Pour les questions suivantes, on suppose que les entiers $a_1, \cdots, a_r$ *sont premiers entre eux.*
2. *Montrer que la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle* f *est de la forme :*
$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^r} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_{k,j}}{(z_k - z)^j}$$
   où p *est un entier compris entre* 1 *et* r *et* $z_1 = 1, z_2, \cdots, z_p$ *sont les pôles deux à deux distincts de* f.
3. *En déduire, que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*
$$u_n = \alpha \binom{r+n-1}{n} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_{k,j}}{z_k^{j+n}} \binom{j+n-1}{n}$$
4. *En déduire que* $u_n \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{1}{a_1 \cdots a_r} \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.
5. *De combien de manières différentes peut-on payer la somme de* $10,01$ *euros avec des pièces de* 1, 2 *et* 5 *centimes ?*

Solution. On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et qu'on a alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2 \\ n_1+n_2=n}} u_{n_1} v_{n_2}$, ce qui se généralise facilement au cas du produit de Cauchy de $r \geq 2$ séries numériques absolument convergentes.

1. Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum z^n$ étant égal à 1, on a pour tout entier k compris entre 1 et r et tout $z \in D(0, z)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n a_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{a_k})^n = \frac{1}{1 - z^{a_k}}$. En effectuant le produit de Cauchy de ces r séries entières absolument convergentes, on en déduit que pour tout $z \in D(0, z)$, on a :
$$\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - z^{a_k}} = \prod_{k=1}^{r} \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} z^{n_k a_k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$$

où $v_n = \sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_r)\in\mathbb{N}^r \\ n_1a_1+\cdots+n_ra_r=n}} 1 = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui nous donne $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-z^{a_k}}$.

2. Chaque fonction rationnelle $z \mapsto \frac{1}{1-z^{a_k}}$ a exactement a_k pôles simples, à savoir les racines a_k-ième de l'unité $1, \omega_k, \cdots, \omega_k^{a_k-1}$, où $\omega_k = e^{\frac{2i\pi}{a_k}}$, donc 1 est pôle de f de multiplicité r et ω_k^j pour $1 \leq k \leq r$; $1 \leq j \leq a_k - 1$ est de multiplicité au plus égale à $r-1$ dans le cas où les entiers $a_1, \cdots, a_r$ sont premiers entre eux. En effet, si l'un de ces pôles $\omega = \omega_k^j$ est de multiplicité r, on a alors $\omega^{a_1} = \cdots = \omega^{a_r} = 1$ avec $\omega \neq 1$ et en utilisant des entiers $u_1, \cdots, u_r$ tels que $\sum_{k=1}^{r} a_k u_k = 1$ (théorème de Bézout), on a $\omega = \omega^{\sum_{k=1}^{r} a_k u_k} = \prod_{k=1}^{r} (\omega^{a_k})^{u_k} = 1$, ce qui n'est pas. En notant $z_1 = 1, z_2, \cdots, z_p$ les pôles deux à deux distincts de f, sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^r} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_{k,j}}{(z_k - z)^j}$$

3. Des développements en série entière :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^r} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(r+1)\cdots(n+r-1)}{n!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+r-1)!}{(r-1)!n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{n} z^n \end{aligned}$$

et :

$$\frac{1}{(z_k - z)^j} = \frac{1}{z_k^j} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^j} = \frac{1}{z_k^j} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{z_k^n}$$

on déduit que :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{n} z^n + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_{k,j}}{z_k^j} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{z_k^n}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \alpha \binom{n+r-1}{n} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_{k,j}}{z_k^{j+n}} \binom{j+n-1}{n}$$

4. Compte tenu de $\binom{n+j-1}{n} = \frac{(n+j-1)\cdots(n+1)}{(j-1)!} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!}$ pour $1 \leq j \leq r$ avec $n^{j-1} = \underset{n\to+\infty}{o} n^{r-1}$ pour $1 \leq j \leq r-1$, on déduit que $u_n =$

$\alpha\binom{n+r-1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o} n^{r-1}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \alpha\dfrac{n^{r-1}}{(r-1)!}$. Le coefficient α étant donné par :

$$\alpha = \lim_{z\to 1}(1-z)^r f(z) = \lim_{z\to 1}\prod_{k=1}^{r}\frac{1-z}{1-z^{a_k}} = \lim_{z\to 1}\prod_{k=1}^{r}\frac{1}{1+z+\cdots+z^{a_k-1}} = \frac{1}{a_1\cdots a_r}$$

ce qui nous donne au final $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{a_1\cdots a_r}\dfrac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.

5. Il s'agit de déterminer le nombre de triplets $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n_1 + 2n_2 + 5n_3 = 1001$ et ce nombre est u_{1001}. On le détermine en utilisant la décomposition en éléments simples :

$$f(X) = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^5)} = \frac{1}{(1-X)^3(1+X)(1+X+X+X^3+X^4)}$$

En remarquant que le polynôme $1+X+X^2+X^3+X^4$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, on effectue cette décomposition en éléments simples dans $\mathbb{Q}[X]$, ce qui nous donne :

$$f(X) = \frac{1}{8(X+1)} + \frac{13}{40(1-X)} + \frac{1}{4(1-X)^2} + \frac{1}{10(1-X)^3} + h(X)$$

avec :

$$\begin{aligned} h(X) &= \frac{1+X+2X^2+X^3}{5(X+X^2+X^3+X^4+1)} = \frac{\left(1+X+2X^2+X^3\right)(1-X)}{5(1-X^5)} \\ &= \frac{1+X^2-X^3-X^4}{5(1-X^5)} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{20} + \frac{n+1}{4} + \frac{13}{40} + \frac{(-1)^n}{8} + v_n$$

avec :

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{1}{5} \text{ si } n \equiv 0 \text{ ou } 2 \mod 5 \\ 0 \text{ si } n \equiv 1 \mod 5 \\ -\dfrac{1}{5} \text{ si } n \equiv 3 \text{ ou } 4 \mod 5 \end{cases}$$

Pour $n = 1001 \equiv 1 \mod 5$, on obtient $u_n = 50\,501$. On peut s'aider d'un logiciel pour faire ces calculs (par exemple, Xcas). Pour les moins courageux, on peut considérer le découpage de 100 euros en pièces de 1 et 2 euros, ce qui nous conduit à :

$$f(X) = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)} = \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^2}$$

et nous donne $u_n = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{1+(-1)^n}{4}$ avec en particulier $u_{100} = 51$, ce qui peut aussi se vérifier de manière élémentaire.

Exercice 12.4. *Utilisation des séries entières pour résoudre des équations différentielles.*

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$\left(1+x^2\right)y''+xy'-\frac{y}{4}=0 \tag{12.1}$$

1. *Montrer que toute solution de* (12.1) *est développable en série entière sur l'intervalle* $]-1,1[$.
2. *En utilisant le changement de variable* $x=\operatorname{sh}(t)$, *donner une expression des solutions de* (12.1) *sur* $\mathbb{R}$.
3. *En déduire les développements en séries entières sur* $]-1,1[$ *des fonctions* f *et* g *définies par* $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ *et* $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$.

Solution. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous dit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y"=\dfrac{y}{4(1+x^2)}-\dfrac{xy'}{1+x^2}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

1. Supposons qu'il existe une solution f de cette équation qui soit non identiquement nulle et développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ où $R\in\overline{\mathbb{R}^{+,*}}\cup\{+\infty\}$ est à déterminer. Notons, pour tout $x\in\,]-R,R[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Sur $]-R,R[$, on a :

$$\begin{cases} xf'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_nx^n \\ f''(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \\ x^2f''(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n \end{cases}$$

   et la fonction f est solution de (12.1) si, et seulement si, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)a_n\right)x^n=0$$

   ce qui est encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=-\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

   (unicité du développement en série entière d'une fonction), ce qui peut encore s'écrire $a_{2k}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{(4k-3)(4k-5)}{2k(2k-1)}a_{2(k-1)}$ et $a_{2k+1}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{(4k-1)(4k-3)}{(2k+1)(2k)}a_{2k-1}$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence, on en déduit que :

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{(4k-3)(4k-5)\cdots\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-1)\cdots\cdots 2\cdot 1} a_0 \\ &= -\frac{(-1)^k}{4^{2k}(4k-1)}\frac{(4k)!}{((2k)!)^2} a_0 = -\frac{(-1)^k}{4^{2k}(4k-1)}\binom{4k}{2k} a_0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{(4k-1)(4k-3)\cdots\cdots 3\cdot 1}{(2k+1)(2k)\cdots\cdots 3\cdot 2} a_1 \\ &= \frac{(-1)^k}{4^{2k}(2k+1)}\frac{(4k)!}{((2k)!)^2} a_1 = \frac{(-1)^k}{4^{2k}(2k+1)}\binom{4k}{2k} a_1 \end{aligned}$$

Pour $a_0 = 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\left|a_{2(k+1)}\right|}{|a_{2k}|} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{4}\frac{(4k+1)(4k-1)}{(2k+2)(2k+1)} = 1$ et pour $a_1 = 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\left|a_{2(k+1)+1}\right|}{|a_{2k+1}|} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{4}\frac{(4k+3)(4k+1)}{(2k+3)(2k+2)} = 1$, donc le rayon de convergence des séries entières $\sum a_{2k}z^k$ et $\sum a_{2k+1}z^k$ vaut 1. Les valeurs initiales $(a_0, a_1) = (1, 0)$, $(a_0, a_1) = (0, 1)$ nous donnent deux solutions f_1, f_2 de l'équation différentielle (12.1) sur $]-1, 1[$ définies par $f_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{2k}x^{2k}$ avec $a_0 = 1$ et $f_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$ avec $a_1 = 1$, ces solutions étant linéairement indépendantes, elles fournissent une base de l'espace des solutions sur $]-1, 1[$. En conclusion, toutes les solutions sur $]-1, 1[$ de (12.1) sont développables en série entière sous la forme :

$$f(x) = a_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k}(2k+1)}\binom{4k}{2k} x^{2k+1} - a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k}(4k-1)}\binom{4k}{2k} x^{2k} \tag{12.2}$$

avec $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$.

2. En désignant par f une solution de (12.1) sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(\mathrm{sh}(t))$ est de de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $g'(t) = \mathrm{ch}(t) f'(\mathrm{sh}(t))$ et :

$$\begin{aligned} g''(t) &= \mathrm{sh}(t) f'(\mathrm{sh}(t)) + \mathrm{ch}^2(t) f''(\mathrm{sh}(t)) \\ &= \mathrm{sh}(t) f'(\mathrm{sh}(t)) + \left(1 + \mathrm{sh}^2(t)\right) f''(\mathrm{sh}(t)) = \frac{f((\mathrm{sh}(t)))}{4} = \frac{g(t)}{4} \end{aligned}$$

ce qui signifie que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z'' = \dfrac{z}{4}$. On a donc $g(t) = \lambda e^{\frac{t}{2}} + \mu e^{-\frac{t}{2}}$, où λ, μ sont deux constantes réelles. Les solutions de (12.1) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \lambda e^{\frac{\mathrm{argsh}(x)}{2}} + \mu e^{-\frac{\mathrm{argsh}(x)}{2}}$$

avec $\text{argsh}\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ ($x = \text{sh}\,(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^t - \dfrac{1}{e^t}\right)$, donc e^t est racine de $T^2 - 2Tx - 1 = 0$, ce qui donne $e^t = x + \sqrt{1+x^2}$ puisque e^t est positif, donc $t = \text{argsh}\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$), on peut aussi écrire que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} \\ &= \lambda\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} + \mu\sqrt{\sqrt{1+x^2} - x} \end{aligned}$$

avec $\lambda + \mu = f(0) = a_0$ et $\lambda - \mu = 2f'(0) = 2a_1$.

3. La solution $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ de (12.1) est développable en série entière sur $]-1, 1[$, sous la forme (12.2) où $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = \dfrac{1}{2}$, ce qui nous donne :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k}(2k+1)}\binom{4k}{2k} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k}(4k-1)}\binom{4k}{2k} x^{2k}$$

On a :

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{\sqrt{1+x^2} - x}\right)^2 = 2\left(\sqrt{1+x^2} + 1\right)$$

donc $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}} = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{\sqrt{1+x^2} - x}$ et g est solution de (12.1) avec $g(0) = \sqrt{2}$, $g'(0) = 0$, ce qui nous donne le développement en série entière sur $]-1, 1[$:

$$g(x) = -\sqrt{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k}(4k-1)}\binom{4k}{2k} x^{2k}$$

Exercice 12.5. *Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète.*

Soient X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ pour tout entier naturel n.

1. *Montrer que la série entière $\sum p_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et a un rayon de convergence $R_X \geq 1$. La fonction g_X définie sur $[-1, 1]$ par $g_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$ est la fonction génératrice de X.*
2. *Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Montrer que $g_{X+Y} = g_X g_Y$.*
3. *Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, g_X est dérivable à gauche en 1 et dans ce cas, on a $\mathbb{E}(X) = g'_X(1^-)$.*

4. *Montrer que* X *est de carré intégrable si, et seulement si, la fonction génératrice est deux fois dérivable à gauche en* 1 *et dans ce cas, on a* $\mathbb{E}\left(X^2\right) = g_X''\left(1^-\right) + \mathbb{E}\left(X\right)$ *et* $\mathbb{V}\left(X\right) = g_X''\left(1^-\right) + \mathbb{E}\left(X\right)\left(1 - \mathbb{E}\left(X\right)\right).$
5. *Soient* $N, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ *des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *On suppose que les variables aléatoires* X_n *suivent une même loi qu'une variable aléatoire* X *de fonction génératrice* g_X *et on note* $S = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$, *ce qui signifie que* $S\left(\omega\right) = \sum\limits_{k=1}^{N(\omega)} X_k\left(\omega\right)$ *pour tout* $\omega \in \Omega$ *(somme aléatoire de variables aléatoires).*
   (a) *Montrer que* $g_S\left(x\right) = g_N\left(g_X\left(x\right)\right)$ *pour tout* $x \in [-1, 1]$.
   (b) *Dans le cas où* N *et* X *sont intégrables, montrer que* $\mathbb{E}\left(S\right) = \mathbb{E}\left(N\right)\mathbb{E}\left(X\right)$ *(formule de Wald).*
   (c) *Dans le cas où* N *et* X *sont de carré intégrable, montrer que :*

$$\mathbb{E}\left(\left(S - \mathbb{E}\left(X\right)N\right)^2\right) = \mathbb{V}\left(X\right)\mathbb{E}\left(N\right)$$

   et :

$$\mathbb{V}\left(S\right) = g_S''\left(1\right) + \mathbb{E}\left(S\right)\left(1 - \mathbb{E}\left(S\right)\right) = \mathbb{V}\left(N\right)\mathbb{E}^2\left(X\right) + \mathbb{E}\left(N\right)\mathbb{V}\left(X\right)$$

Solution.

1. Pour tout réel $x \in [-1, 1]$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|p_n x^n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, donc le rayon de convergence de X est au moins égal à 1.
2. En notant pour tout entier naturel n, $p_n = \mathbb{P}\left(X = n\right)$ et $q_n = \mathbb{P}\left(Y = n\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X + Y = n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \left(X = k\right) \cap \left(Y = n - k\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(X = k\right)\mathbb{P}\left(Y = n - k\right) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\end{aligned}$$

   (indépendance de X et Y), ce qui nous donne pour tout réel $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}g_{X+Y}\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X + Y = n\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = g_X\left(x\right) g_Y\left(x\right)\end{aligned}$$

   (produit de Cauchy de deux séries entières).

3. Si X est intégrable (*i. e.* admet une espérance), en notant $u_n(x) = p_n x^n$, on a $|u'_n(x)| = |np_n x^{n-1}| \leq np_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$, la série $\sum np_n$ étant convergente, donc les séries de fonctions $\sum u_n^{(k)}(x)$ sont normalement convergentes sur $[-1,1]$ pour $k = 0,1$ et g_X est dérivable sur $[-1,1]$. Pour $x = 1$, on a $g'_X(1^-) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} np_n = \mathbb{E}(X)$. Réciproquement, si g_X est dérivable à gauche en 1, on a alors :
$$\begin{aligned} g'_X\left(1^-\right) &= \lim_{s\to 1^-} \frac{g_X(1) - g_X(s)}{1-s} = \lim_{s\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \frac{1-s^n}{1-s} \\ &= \lim_{s\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \left(1 + s + \cdots + s^{n-1}\right) \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$
Pour tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} kp_k = \lim_{s\to 1^-} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + s + \cdots + s^{k-1}\right) p_k \leq g'_X\left(1^-\right)$$
donc la série à termes positifs $\sum np_n$ est convergente, ce qui signifie que X est intégrable et avec la condition nécessaire, on a vu que son espérance est $\mathbb{E}(X) = g'_X(1^-)$.
4. Si X est de carré intégrable, en notant $u_n(x) = p_n x^n$, on a $|u'_n(x)| \leq np_n$ et $|u''_n(x)| \leq n(n-1)p_n$ pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in [-1,1]$, les séries $\sum np_n$ et $\sum n^2 p_n$ étant convergentes, donc les séries de fonctions $\sum u_n^{(k)}(x)$ sont normalement convergentes sur $[-1,1]$ pour $k = 0,1,2$ et g_X est deux fois dérivable sur $[-1,1]$. Pour $x = 1$, on a :
$$g''_X\left(1^-\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)p_n = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)$$
Réciproquement, si g_X est deux fois dérivable à gauche en 1, la variable aléatoire X est intégrable d'espérance $\mathbb{E}(X) = g'_X(1^-)$ et :
$$\begin{aligned} g''_X\left(1^-\right) &= \lim_{s\to 1^-} \frac{g'_X(1^-) - g'_X(s)}{1-s} = \lim_{s\to 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} np_n \frac{1-s^{n-1}}{1-s} \\ &= \lim_{s\to 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} np_n \left(1 + s + \cdots + s^{n-2}\right) \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$
Pour tout entier $n \geq 2$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)p_k = \lim_{s\to 1^-} \sum_{k=1}^{n} k\left(1 + s + \cdots + s^{k-2}\right) p_k \leq g''_X\left(1^-\right)$$
donc la série $\sum n(n-1)p_n$ est convergente et il en est de même de $\sum n^2 p_n$ ce qui signifie que X est de carré intégrable et avec la condition nécessaire, on

a vu que $\mathbb{E}\left(X^2\right) = g''_X(1^-) + \mathbb{E}(X) = g''_X(1^-) + g'_X(1^-)$. Pour la variance, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = g''_X\left(1^-\right) + g'_X\left(1^-\right) - \left(g'_X\left(1^-\right)\right)^2 \\ &= g''_X\left(1^-\right) + g'_X\left(1^-\right)\left(1 - g'_X\left(1^-\right)\right) = g''_X\left(1^-\right) + \mathbb{E}(X)(1 - \mathbb{E}(X))\end{aligned}$$

5.

(a) La fonction S est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}(S = n) &= \left(\sum_{k=1}^{N} X_k = n\right) \\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{i_1+\cdots+i_k=n} (N = k) \cap (X_1 = i_1) \cap \cdots \cap (X_k = i_k) \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

donc S est bien une variable aléatoire à valeurs entières. En notant $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires N et S_k sont indépendantes (question **??** de l'exercice **??**), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(S_k = n)$$

ce qui nous donne pour $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}g_S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(S_k = n)\right) x^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\, x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\, g_{S_k}(x)\end{aligned}$$

avec $g_{S_k}(x) = g_X^k(x)$ (les X_k sont indépendantes et suivent la même loi que X), donc $g_S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\, g_X^k(x) = g_N(g_X(x))$.

(b) Dans le cas où N et X sont intégrables, les fonctions génératrices g_X et g_N sont dérivables à gauche en 1, donc il en est de même de g_S et on a :

$$\mathbb{E}(S) = g'_S\left(1^-\right) = g'_N(g_X(1))\, g'_X\left(1^-\right) = g'_N(1)\, g'_X\left(1^-\right) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)$$

($[0, 1]$ est stable par une fonction génératrice).

(c) Comme N et S sont de carré intégrable, le produit NS est intégrable et en utilisant le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((S-\mathbb{E}(X)N)^2\right) &= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} (m-n\mathbb{E}(X))^2\,\mathbb{P}(S=m)\,\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} (m-n\mathbb{E}(X))^2\,\mathbb{P}(S_n=m)\,\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\sum_{m=0}^{+\infty}(m-\mathbb{E}(S_n))^2\,\mathbb{P}(S_n=m) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(X)\sum_{n=0}^{+\infty}n\mathbb{P}(N=n) \\
&= \mathbb{V}(X)\,\mathbb{E}(N)
\end{aligned}$$

Dans le cas où N et X sont de carré intégrable, les fonctions génératrices g_X et g_N sont deux fois dérivables à gauche en 1, donc il en est de même de g_S et on a :

$$\begin{aligned}
g_S''(1) &= g_N''(g_X(1))\,(g_X'(1))^2 + g_N'(g_X(1))\,g_X''(1) \\
&= g_N''(1)\,\mathbb{E}^2(X) + \mathbb{E}(N)\,g_X''(1) \\
&= (\mathbb{V}(N)-\mathbb{E}(N)(1-\mathbb{E}(N)))\,\mathbb{E}^2(X) + \mathbb{E}(N)(\mathbb{V}(X)-\mathbb{E}(X)(1-\mathbb{E}(X))) \\
&= \mathbb{V}(N)\,\mathbb{E}^2(X) - \mathbb{E}(S)(\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(S)) + \mathbb{E}(N)\,\mathbb{V}(X) - \mathbb{E}(S)(1-\mathbb{E}(X)) \\
&= \mathbb{V}(N)\,\mathbb{E}^2(X) + \mathbb{E}(N)\,\mathbb{V}(X) - \mathbb{E}(S)(1-\mathbb{E}(S))
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\mathbb{V}(S) = g_S''(1) + \mathbb{E}(S)(1-\mathbb{E}(S)) = \mathbb{V}(N)\,\mathbb{E}^2(X) + \mathbb{E}(N)\,\mathbb{V}(X)$$

Exercice 12.6. *Étude de* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ *et application à une équation fonctionnelle*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe bornée.*

1. *Que peut-on dire des rayons de convergence des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$. *On note respectivement* $f(z)$ *et* $g(z)$ *les sommes de ces séries entières.*
2. *Pour cette question, on suppose que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell\in\mathbb{C}$.
   (a) *Pour* $\ell=0$, *montrer que* $\lim\limits_{|z|\to+\infty} g(z)\,e^{-|z|}=0$.
   (b) *Pour* ℓ *quelconque, montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,e^{-x}=\ell$.
3.

(a) Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $\mathrm{Re}(z) > 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-zt} dt$ est absolument convergente.

(b) Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-xt} dt = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel $x > 1$.

Solution. On note $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, la série entière $\sum a_n z^n$ à un rayon de convergence $R \geq 1$. Avec $\left|\frac{a_n}{n!}\right| \leq \frac{M}{n!}$, on déduit que le rayon de convergence de la deuxième série est infini.
2. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, elle est alors bornée et la fonction g est bien définie sur $\mathbb{C}$.
   (a) On suppose d'abord que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier n_0 tel que $|a_n| < \varepsilon$ pour tout $n > n_0$, donc pour tout nombre complexe z tel que $|z| > 2$, on a :

$$|g(z)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{n_0} \frac{|a_n|}{n!} |z|^n + \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$
$$\leq M \sum_{n=0}^{n_0} |z|^n + \varepsilon e^{|z|} = M \frac{|z|^{n_0+1} - 1}{|z| - 1} + \varepsilon e^{|z|} \leq M |z|^{n_0+1} + \varepsilon e^{|z|}$$

   et en conséquence, $|g(z)|\, e^{-|z|} \leq M \frac{|z|^{n_0+1}}{e^{|z|}} + \varepsilon$ avec $\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|z|^{n_0+1}}{e^{|z|}} = 0$. Il existe donc un réel $R > 2$ tel que $M \frac{|z|^{n_0+1}}{e^{|z|}} < \varepsilon$ pour $|z| > R$, ce qui nous donne $|g(z)|\, e^{-|z|} < 2\varepsilon$ pour $|z| > R$. On a donc $\lim_{|z|\to+\infty} g(z)\, e^{-|z|} = 0$.

   (b) Dans le cas général, appliquant le résultat précédent à la suite $(a_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n - \ell}{n!} z^n = g(z) - \ell e^z$, donc :

$$g(x)\, e^{-x} - \ell = h(x)\, e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

3.
   (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ et $t > 0$, on a :

$$\left|g(t)\, e^{-zt}\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\right| e^{-\mathrm{Re}(z)t} \leq M \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) e^{-\mathrm{Re}(z)t} = M e^{-(\mathrm{Re}(z)-1)t}$$

   Pour $\mathrm{Re}(z) > 1$, on a $\int_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re}(z)-1)t} dt < +\infty$ et en conséquence l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-zt} dt$ est absolument convergente.

(b) Le changement de variable $u = xt$ donne :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} g\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$$

et en notant $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} g\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{1}{x^k} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du + \int_0^{+\infty} R_n\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$$

avec $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$ ce qui nous donne :

$$\int_0^{+\infty} g\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{x^k} + \int_0^{+\infty} R_n\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$$

et il s'agit de montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_n\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du = 0$. Pour ce faire, on écrit que :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{+\infty} R_n\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du \right| &\leq M \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{u}{x}\right)^k \right) e^{-u} du \\
&\leq M \int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{u}{x}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{u}{x}\right)^k \right) e^{-u} du \\
&\leq M \left(\int_0^{+\infty} e^{-\left(1-\frac{1}{x}\right)u} du - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{x^k} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du \right) \\
&\leq M \left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k} \right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Exercice 12.7. *Calcul de* $\det(I_n + zA)$.

On désigne par f la fonction définie sur $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ par $f(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \right)$ ($\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$ est aussi notée $\ln(1-z)$).

1. *Justifier la définition de la fonction f.*
2. *Montrer que $f(x) = 1 + x$ pour tout réel $x \in]-1,1[$.*
3. *Montrer que $f(z) = 1 + z$ pour tout nombre complexe $z \in D(0,1)$.*

4. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire de termes diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On note $R_T = \dfrac{1}{\sum\limits_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|}$ avec la convention que $R_T = +\infty$ dans la cas où tous les λ_j sont nuls.

(a) Justifier la définition de $\varphi_T(z) = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \operatorname{Tr}\left(T^k\right)\right)$ pour tout $z \in D(0, R_T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_T\}$.

(b) Montrer que $\varphi_T(z) = \det(I_n + zT)$ pour tout $z \in D(0, R_T)$.

5. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et $R_A = \dfrac{1}{\sum\limits_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|}$.

Montrer que :

$$\det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \operatorname{Tr}\left(A^k\right)\right)$$

Solution.

1. En utilisant le critère de d'Alembert, on voit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$ est égal à 1, ce qui justifie la définition de la fonction f sur le disque ouvert $D(0,1)$.
2. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ avec :

$$g'(x) = \frac{(1+x) f'(x) - f(x)}{(1+x)^2}$$

où $f'(x) = f(x) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \dfrac{f(x)}{1+x}$, ce qui nous donne $g'(x) = 0$ et $g(x) = g(0) = f(0) = 1$, soit $f(x) = 1 + x$ pour tout $x \in]-1,1[$.

3. Le résultat est clair pour $z = 0$. Pour $z \neq 0$ fixé dans $D(0,1)$, la fonction h définie sur $\left]-\dfrac{1}{|z|}, \dfrac{1}{|z|}\right[$ par $h(t) = f(tz) = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} t^k z^k\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec :

$$h'(t) = h(t) z \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} t^{k-1} z^{k-1} = \frac{h(t) z}{1+tz}$$

ce qui nous donne pour la fonction φ définie sur $\left]-\dfrac{1}{|z|}, \dfrac{1}{|z|}\right[$ par $\varphi(t) = \dfrac{f(tz)}{1+tz}$:

$$\varphi'(t) = \frac{(1+tz) h'(t) - zh(t)}{(1+tz)^2} = 0$$

donc $\varphi(t) = \dfrac{f(tz)}{1+tz} = \varphi(0) = 1$ et $f(tz) = 1 + tz$ sur $\left]-\dfrac{1}{|z|}, \dfrac{1}{|z|}\right[$. L'évaluation en $t = 1$ qui est bien dans $\left]-\dfrac{1}{|z|}, \dfrac{1}{|z|}\right[$ pour $|z| < 1$ nous donne $f(z) = 1 + z$.

4. Chaque matrice T_k étant triangulaire de termes diagonaux $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$, on a $\operatorname{Tr}\left(T^k\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k$. Dans le cas où tous les termes diagonaux de T sont nuls, on a $\varphi_T(z) = 1$ pour tout nombre complexe z. Dans le cas contraire, on a $R_T \in \mathbb{R}^{+,*}$ et pour tout nombre complexe z :

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \operatorname{Tr}\left(T^k\right)\right| \leq \frac{|z|^k}{k} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^k \leq \frac{1}{k}\left(|z| \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|\right)^k = \frac{1}{k}\left(\frac{|z|}{R_T}\right)^k$$

la série $\sum \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{|z|}{R_T}\right)^k$ étant convergente pour $|z| < R_T$. Il en résulte que la série $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \operatorname{Tr}\left(T^k\right)$ est absolument convergente pour tout $z \in D(0, R_T)$, ce qui assure la définition de φ_T sur $D(0, R_T)$.

5. Dans le cas où tous les termes diagonaux de T sont nuls, on a $\varphi_T(z) = 1 = \det(I_n + zT)$ pour tout nombre complexe z. Dans le cas contraire, on a pour tout $z \in D(0, R_T)$:

$$\begin{aligned}\varphi_T(z) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \operatorname{Tr}\left(T^k\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z\lambda_j)^k\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z\lambda_j)^k\right)\end{aligned}$$

avec $|z\lambda_j| \leq |z| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^k = \dfrac{|z|}{R_T} < 1$ pour tout j compris entre 1 et n, donc :

$$\varphi_T(z) = \prod_{j=1}^{n} f(z\lambda_j) = \prod_{j=1}^{n} (1 + z\lambda_j) = \det(I_n + zT)$$

6. Par trigonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire T de termes diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ telles que $A = PTP^{-1}$. Avec $A^k = PT^kP^{-1}$, $\operatorname{Tr}\left(T^k\right) = \operatorname{Tr}\left(A^k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_n + zA = P(I_n + zT)P^{-1}$ et $\det(I_n + zA) = \det(I_n + zT)$ pour tout nombre complexe, on en déduit le résultat annoncé.

Chapitre 13

Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques

Exercice 13.1. *Une application du théorème de Weierstrass polynomial*

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. *En utilisant le théorème de Weierstrass polynomial, montrer que toute fonction paire $f \in \mathcal{F}$ peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par une suite de polynômes trigonométriques de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{F}$. En écrivant $f = g + h$ avec $g \in \mathcal{F}$ paire et $h \in \mathcal{F}$ impaire, montrer que la fonction $f \cdot \sin^2$ peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par une suite de polynômes trigonométriques.*
3. *Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{F}$ peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par une suite de polynômes trigonométriques (théorème de Weierstrass trigonométrique).*

Solution. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques (*i. e.* des fonctions de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$) est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$ (le fait que le produit de deux polynômes trigonométriques est un polynôme trigonométrique peut se vérifier en utilisant les formules d'Euler).

1. Soient $f \in \mathcal{F}$ une fonction paire et g la fonction définie sur le segment $[-1, 1]$ par $g(x) = f(\arccos(x))$. La fonction g étant continue sur $[-1, 1]$, le théorème de Weierstrass nous dit que pour $\varepsilon > 0$ donné il existe une fonction polynomiale $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ tel que $\sup_{x \in [-1,1]} |g(x) - P(x)| < \varepsilon$. Avec la 2π-périodicité et la parité des fonctions f et cos, on déduit que pour tout réel t il existe un réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $f(t) = f(\theta)$ et $\cos(t) = \cos(\theta)$. En posant $x = \cos(\theta)$, on a alors :

$$|f(t) - P(\cos(t))| = |f(\theta) - P(\cos(\theta))| = |g(x) - P(x)| < \varepsilon$$

La fonction $\theta \mapsto P(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(\theta)$ étant un polynôme trigonométrique puisque $\mathcal{P}$ est une algèbre.

2. Soient $f \in \mathcal{F}$ et ε un réel strictement positif. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ [resp. la fonction $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$] est dans $\mathcal{F}$ et paire [resp. impaire] et pour tout réel x, on a :

$$f(x)\sin^2(x) = g(x)\sin^2(x) + \sin(x)\left(h(x)\sin(x)\right)$$

les fonctions $f_1 : x \mapsto g(x)\sin^2(x)$ et $f_2 : x \mapsto h(x)\sin(x)$ étant dans $\mathcal{F}$ et paires, donc il existe deux polynômes trigonométriques P_1 et P_2 tels que $\|f_1 - P_1\|_\infty < \varepsilon$ et $\|f_2 - P_2\|_\infty < \varepsilon$. On a alors pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\left|f(x)\sin^2(x) - (P_1(x) + \sin(x)P_2(x))\right| &= |f_1(x) - P_1(x) + \sin(x)(f_2(x) - P_2(x))| \\ &\leq |f_1(x) - P_1(x)| + |f_2(x) - P_2(x)| \\ &\leq \|f_1 - P_1\|_\infty + \|f_2 - P_2\|_\infty < 2\varepsilon\end{aligned}$$

la fonction $x \mapsto P_1(x) + \sin(x)P_2(x)$ étant un polynôme trigonométrique puisque $\mathcal{P}$ est une algèbre.

3. Soient $f \in \mathcal{F}$ et ε un réel strictement positif. La fonction $\varphi : x \mapsto f\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ étant dans $\mathcal{F}$, la question précédente nous dit qu'il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\left\|\varphi \cdot \sin^2 - P\right\|_\infty < \varepsilon$ et pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\left|f(x)\cos^2(x) - P\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| &= \left|\varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - P\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &\leq \left\|\varphi \cdot \sin^2 - P\right\|_\infty < \varepsilon\end{aligned}$$

la fonction $x \mapsto P\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ étant un polynôme trigonométrique. En écrivant que $f = f\cos^2 + f \cdot \sin^2$, on déduit de tout cela que f peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par une suite de polynômes trigonométriques.

Chapitre 14

Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires

Exercice 14.1. *Un système différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre* 5

Résoudre le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + x_5(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) + 2x_3(t) + x_5(t) \\ x_3'(t) = x_3(t) + x_4(t) \\ x_4'(t) = x_4(t) - 2x_5(t) \\ x_5'(t) = 2x_4(t) - 3x_5(t) \end{array}\right.$$

où les x_k, pour $1 \leq k \leq 5$, sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. En notant $X = (x_k)_{1 \leq k \leq 5}$, notre système différentiel s'écrit $X' = AX$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & X+1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2(X+1) \begin{vmatrix} X-1 & 2 \\ -2 & X+3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2(X+1) \begin{vmatrix} X+1 & 2 \\ X+1 & X+3 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)^3 \end{aligned}$$

donc $\lambda = 1$ est valeur propre double et $\mu = -1$ valeur propre triple. L'espace propre $\ker(A - I_5)$ est défini par les équations :

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$$

donc $x_4 = x_5 = 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 = x_3 \in \mathbb{R}$ et $\ker(A - I_5) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$, où :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace propre $\ker(A + I_5)$ est défini par les équations :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

donc $x_4 = x_5$, $x_3 = -\dfrac{x_5}{2}$, $x_1 = \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_5}{4}$ et $\ker(A + I_5) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4$, où :

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on a $X \in \ker(A + I_5)^2$ si, et seulement si, $A(X) + X \in \ker(A + I_5)$, ce qui équivaut à dire qu'il existe deux réels α et β tels que $A(X) + X = \alpha e_3 + \beta e_4$, soit que :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = \alpha - \beta \\ 2x_3 + x_5 = 2\alpha \\ 2x_3 + x_4 = -2\beta \\ 2x_4 - 2x_5 = 4\beta \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = -2\beta$, $x_1 = \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_5}{4} - \dfrac{\beta}{2}$, $x_3 = -\dfrac{x_5}{2} - 2\beta$, $x_4 = x_5 + 2\beta$, soit :

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} - \frac{x_5}{4} - \frac{\beta}{2} \\ x_2 \\ -\frac{x_5}{2} - 2\beta \\ x_5 + 2\beta \\ x_5 \end{pmatrix} = \frac{x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_5}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{x_2}{2} e_3 + \frac{x_5}{4} e_4 - \frac{\beta}{2} e_5 \end{aligned}$$

On a donc $\ker (A + Id)^2 = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}e_5$, où $e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ est tel que :

$$A(e_5) + e_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = 4e_3 - 2e_4$$

En remplaçant le vecteur e_4 par $e_4' = 4e_3 - 2e_4$, la matrice de A dans la base $(e_1, e_2, e_3, e_4', e_5)$ est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que $P^{-1}AP = J$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ (réduction de Jordan). En posant $X = PY$, le système différentiel devient $Y' = JY$, soit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t), \ y_2'(t) = y_2(t) \\ y_3'(t) = -y_3(t), \ y_4'(t) = -y_4(t) + y_5(t) \\ y_5'(t) = -y_5(t) \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^t, \ y_2(t) = \beta e^t \\ y_3(t) = \gamma e^{-t}, \ y_4(t) = (\delta + \varepsilon t) e^{-t} \\ y_5(t) = \varepsilon e^{-t} \end{cases}$$

et :

$$X(t) = P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^t \\ \gamma e^{-t} \\ (\delta + \varepsilon t) e^{-t} \\ \varepsilon e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^t + (\gamma + \varepsilon + 6\delta) e^{-t} + 6\varepsilon t e^{-t} \\ \beta e^t + 2(\gamma + 4\delta) e^{-t} + 8\varepsilon t e^{-t} \\ \beta e^t + 4(\varepsilon + \delta) e^{-t} + 4\varepsilon t e^{-t} \\ -4(\varepsilon + 2\delta) e^{-t} - 8\varepsilon t e^{-t} \\ -8(\delta + \varepsilon t) e^{-t} \end{pmatrix}$$

Tous ces calculs peuvent se faire en utilisant un logiciel de calcul formel du type Xcas.

On peut en déduire le calcul de e^{tA} en écrivant que :

$$\begin{aligned} X(t) = e^{tA}X(0) &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} & 6e^{-t} & e^{-t}+6te^{-t} \\ 0 & e^t & 2e^{-t} & 8e^{-t} & 8te^{-t} \\ 0 & e^t & 0 & 4e^{-t} & 4e^{-t}+4te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & -8e^{-t} & -4e^{-t}-8te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & -8e^{-t} & -8te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= M(t)\,Y(0) = M(t)\,P^{-1}X(0) \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= M(t)\,P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} & 6e^{-t} & e^{-t}+6te^{-t} \\ 0 & e^t & 2e^{-t} & 8e^{-t} & 8te^{-t} \\ 0 & e^t & 0 & 4e^{-t} & 4e^{-t}+4te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & -8e^{-t} & -4e^{-t}-8te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & -8e^{-t} & -8te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & -\frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{3}{2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}-te^{-t}\right) & \frac{1}{2}\left(3te^{-t}-\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right) \\ 0 & e^{-t} & e^t-e^{-t} & e^t-e^{-t}-2te^{-t} & -\frac{e^t-e^{-t}}{2}+2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^t & e^t-e^{-t}-te^{-t} & -\frac{1}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}+te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}+2te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 2te^{-t} & e^{-t}-2te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & -\operatorname{sh}(t) & \operatorname{sh}(t) & \frac{3}{2}\operatorname{sh}(t)-\frac{3}{2}te^{-t} & \frac{1}{2}\left(3te^{-t}-\operatorname{sh}(t)\right) \\ 0 & e^{-t} & 2\operatorname{sh}(t) & 2\left(\operatorname{sh}(t)-te^{-t}\right) & -\operatorname{sh}(t)+2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^t & 2\operatorname{sh}(t)-te^{-t} & -\frac{\operatorname{sh}(t)}{2}+te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}+2te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 2te^{-t} & e^{-t}-2te^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la réduction de Jordan de la matrice A pour en déduire un calcul de e^{tA}, puis les solutions du système différentiel. On a :

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & -\frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{e^t-e^{-t}}{2} & \frac{3}{2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}-te^{-t}\right) & -\frac{1}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{3}{2}te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & e^t-e^{-t} & e^t-e^{-t}-2te^{-t} & -\frac{e^t-e^{-t}}{2}+2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^t & e^t-e^{-t}-te^{-t} & -\frac{1}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}+te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t}+2te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 2te^{-t} & e^{-t}-2te^{-t} \end{pmatrix}$$

Exercice 14.2. *Résolution de* $x'_k = \beta x_k + \alpha \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} x_j + e^{(\beta-\alpha)t}$

Soient α, β *deux nombres complexes et* $A(\alpha,\beta) = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice d'ordre* $n \geq 3$ *définie par :*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \begin{cases} a_{ii} = \beta \\ a_{ij} = \alpha \text{ si } j \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i\} \end{cases}$$

1. *Calculer l'exponentielle de* $A(\alpha,\beta)$.
2. *Résoudre le système différentiel* $X' = A(\alpha,\beta) X$.
3. *Résoudre le système différentiel* $X'(t) = A(\alpha,\beta) X(t) + e^{(\beta-\alpha)t} E$, *où* $E = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution. On note $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. On a :

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta \end{pmatrix} = (\beta - \alpha) I_n + \alpha A(1,1)$$

donc $e^{A(\alpha,\beta)} = e^{(\beta-\alpha)I_n} e^{\alpha A(1,1)} = e^{\beta-\alpha} e^{\alpha A(1,1)}$ puisque I_n et $A(1,1)$ commutent. En notant $A = A(1,1)$, on a $A^k = n^{k-1} A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (vérification facile par récurrence), donc :

$$e^{\alpha A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} A^k = I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!} \right) A = I_n + \frac{e^{n\alpha} - 1}{n} A$$

et :

$$e^{A(\alpha,\beta)} = e^{\beta-\alpha} \left(I_n + \frac{e^{n\alpha} - 1}{n} A(1,1) \right)$$

2. La solution du système différentiel $X' = A(\alpha,\beta) X$ avec la condition initiale $X(0) = X_0$ est la fonction $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$X(t) = e^{tA(\alpha,\beta)} X_0 = e^{A(\alpha t,\beta t)} X_0 = e^{(\beta-\alpha)t} \left(X_0 + \frac{e^{n\alpha t} - 1}{n} A(1,1) X_0 \right)$$

ou encore par $x_k(t) = e^{(\beta-\alpha)t} \left(x_k(0) + \dfrac{e^{n\alpha t} - 1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j(0) \right)$ pour $1 \leq k \leq n$.

3. Une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est solution de $X'(t) = A(\alpha,\beta) X(t) + e^{(\beta-\alpha)t} E$ si, et seulement si, la fonction Y définie sur $\mathbb{R}$ par $Y(t) = e^{-tA(\alpha,\beta)} X(t)$ est

solution de :

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= e^{-tA(\alpha,\beta)}\left(X'(t) - A(\alpha,\beta)X(t)\right)\\
&= e^{(\beta-\alpha)t}e^{-tA(\alpha,\beta)}E = e^{(\beta-\alpha)t}e^{-(\beta-\alpha)t}\left(E + \frac{e^{-n\alpha t}-1}{n}A(1,1)E\right)\\
&= e^{-n\alpha t}E
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $Y(t) = -\dfrac{e^{-n\alpha t}}{n}E + Y(0) = -\dfrac{e^{-n\alpha t}}{n}E + X_0$ et :

$$\begin{aligned}
X(t) &= e^{tA(\alpha,\beta)}\left(X_0 - \frac{e^{-n\alpha t}}{n}E\right) = e^{tA(\alpha,\beta)}X_0 - \frac{e^{-n\alpha t}}{n}e^{tA(\alpha,\beta)}E\\
&= e^{tA(\alpha,\beta)}X_0 - \frac{e^{-n\alpha t}}{n}e^{(\beta-\alpha)t}\left(E + \frac{e^{n\alpha t}-1}{n}A(1,1)E\right)\\
&= e^{tA(\alpha,\beta)}X_0 - \frac{e^{-n\alpha t}}{n}e^{(\beta-\alpha)t}e^{n\alpha t}E\\
&= e^{(\beta-\alpha)t}\left(X_0 + \frac{e^{n\alpha t}-1}{n}A(1,1)X_0\right) - \frac{e^{(\beta-\alpha)t}}{n}E
\end{aligned}$$

Exercice 14.3. *Systèmes différentiels linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants*

1. *Soient α, β deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Résoudre le système différentiel d'ordre 2 :*
$$\left\{\begin{array}{l} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{array}\right. \tag{14.1}$$
en exploitant l'équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la fonction $z = x + iy : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
2. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.*
3. *Soient $n \geq 2$ un entier et $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, si pour tout réel t, les matrices $A(t)$ et $A'(t)$ commutent, on a alors $\left(e^{A(t)}\right)' = A'(t)\,e^{A(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
4. *Résoudre le système (14.1), en exploitant les deux questions précédentes.*
5. *Soit A la fonction matricielle définie par $A(t) = \exp\begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
   (a) *Comparer $\left(e^{A(t)}\right)'$ et $A'(t)\,e^{A(t)}$.*
   (b) *Résoudre le système différentiel d'ordre 2 :*
$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + ty \\ y' = 0 \end{array}\right.$$

Solution.

1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous dit que l'ensemble des solutions de notre système différentiel est un espace vectoriel réel de dimension 1. Si (x, y) est une solution de ce système, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = x(t) + iy(t)$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$z' = x' + iy' = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha + i\beta) z'$$

ce qui équivaut à $z(t) = z_0 e^{(a+ib)t}$ pour tout réel t, où $z_0 = x_0 + iy_0$ est une constante complexe et a, b sont respectivement les primitives nulles en 0 de α, β, ce qui nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{a(t)} (x_0 \cos(b(t)) - y_0 \sin(b(t))) \\ y(t) = e^{a(t)} (y_0 \cos(b(t)) + x_0 \sin(b(t))) \end{array} \right.$$

2. En écrivant que $A = aI_2 + bC$, où $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $e^A = e^{aI_2} e^{bC} = e^a e^{bC}$ puisque I_2 et C commutent. Compte tenu de $C^2 = -I_2$, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on $C^{2n} = (-1)^n I_2$ et $C^{2n+1} = (-1)^n C$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} e^{bC} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} C^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \right) I_2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \right) C \\ &= \cos(b) I_2 + \sin(b) C = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$.

3. L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme d'algèbre induite $A \mapsto N(A) = \sup\limits_{X \in \mathbb{C}^n,\ \|X\|=1} \|A(X)\|$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction A^k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme A, A' commutent, on a $\left(A^k\right)' = kA^{k-1}A'$ (c'est vrai pour $k = 1$ et supposant le résultat acquis pour $k \geq 1$, on a $\left(A^{k+1}\right)' = \left(A^k A\right)' = \left(A^k\right)' A + A^k A' = kA^{k-1}A'A + A^k A' = (k+1) A^k A'$ puisque A, A' commutent). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout segment $[a, b]$ et tout $t \in [a, b]$, on a en exploitant la sous-multiplicativité de la norme induite N :

$$N\left(\frac{1}{k!}\left(A^k\right)'(t)\right) \leq \frac{1}{(k-1)!} N(A(t))^{k-1} N(A'(t)) \leq M_1 \frac{M^{k-1}}{(k-1)!}$$

où $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} \|A(t)\|$ et $M_1 = \sup\limits_{t \in [a,b]} \|A'(t)\|$. Il en résulte que la série $\sum \frac{1}{k!} \left(A^k\right)'$ est uniformément convergente sur $[a, b]$ et on peut dériver terme à terme, ce qui nous donne pour tout $t \in [a, b]$:

$$\left(e^{A(t)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A(t)^k \right)' = A'(t) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} A(t)^{k-1} = A'(t) e^{A(t)}$$

4. En notant respectivement a, b les primitives nulles en 0 de α, β, la fonction matricielle A définie par $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En remarquant que l'ensemble de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R} \right\}$ est un corps commutatif isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on voit que pour tout réel t les matrices $A(t)$ et $A'(t)$ commutent et en conséquence, on a $\left(e^{A(t)}\right)' = A'(t) e^{A(t)}$ pour tout réel t, ce qui implique que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$, la fonction $X : t \mapsto e^{A(t)} X_0$ est solution du système différentiel $X'(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & -\beta(t) \\ \beta(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} X(t)$. On retrouve ainsi les solutions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{a(t)} \begin{pmatrix} \cos(b(t)) & -\sin(b(t)) \\ \sin(b(t)) & \cos(b(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{a(t)} (x_0 \cos(b(t)) - y_0 \sin(b(t))) \\ e^{a(t)} (y_0 \cos(b(t)) + x_0 \sin(b(t))) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $A^k(t) = \begin{pmatrix} t^k & \frac{t^{k+1}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} & \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k!} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t(e^t-1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} A'(t) e^{A(t)} &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & \frac{t(e^t-1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t(1+e^t)}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\neq \left(e^{A(t)}\right)' = \begin{pmatrix} e^t & \frac{(1+t)e^t-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) De $y' = 0$, on déduit que $y(t) = y_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $x'(t) = x(t) + y_0 t$ et $x(t) = x_0 e^t - y_0 (1+t)$, ce qui est différent de :

$$e^{A(t)} X_0 = \begin{pmatrix} x_0 e^t + y_0 \frac{t(e^t-1)}{2} \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.4. *Calculs de* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(t^2 x)\, dt$ *et* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(t^2 x)\, dt$

1. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que, pour tout réel* α, *on a :*

$$e^{\alpha C} = \cos(\alpha) I_2 + \sin(\alpha) C$$

2. *Montrer que, pour tout réel x, on a :*

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. *Montrer que les fonctions :*

$$u : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(t^2 x\right) dt \text{ et } v : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin\left(t^2 x\right) dt$$

sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en précisant leurs dérivées successives.

4. *Montrer que les fonctions u et v sont solutions d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 avec condition initiale que l'on résoudra.*

Solution.

1. On a $C^2 = -I_2$, donc $C^{2n} = (-1)^n I_2$ et $C^{2n+1} = (-1)^n C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} e^{\alpha C} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} C^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}(-1)^n\right) I_2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n\right) C \\ &= \cos(\alpha) I_2 + \sin(\alpha) C \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\theta = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta)$ est du signe de x (en convenant que signe $(0) = 0$), ce qui nous donne :

$$\cos(\theta) = \sqrt{\cos^2(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et :

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \operatorname{signe}(x)\sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \operatorname{signe}(x)\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}} \\ &= \operatorname{signe}(x)\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \operatorname{signe}(x)\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

3. La fonction $\varphi : (x,t) \mapsto e^{-t^2}\cos\left(t^2 x\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,t)\right| = \left|e^{-t^2} t^{2n} \cos\left(t^2 x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq t^{2n} e^{-t^2}$$

la fonction $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a $t^{2n}e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$), il en résulte que la fonction u est bien définie sur $\mathbb{R}$ (cas $n = 0$) et d'après théorème de dérivation de Lebesgue qu'elle est

de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ de dérivées définies par $u^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos\left(t^2 x + n\frac{\pi}{2}\right) dt$.
De manière analogue, on vérifie que la fonction v est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ de dérivées définies par $v^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} \sin\left(t^2 x + n\frac{\pi}{2}\right) dt$.
En particulier, on a :

$$u'(x) = -\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \sin\left(t^2 x\right) dt \text{ et } v'(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \cos\left(t^2 x\right) dt.$$

4. Une intégration par parties nous donne pour tout réel x :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(t^2 x\right) dt \\ &= \left[t e^{-t^2} \cos\left(t^2 x\right)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} \left(\cos\left(t^2 x\right) + x \sin\left(t^2 x\right)\right) dt \\ &= -2\left(x u'(x) - v'(x)\right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin\left(t^2 x\right) dt \\ &= \left[t e^{-t^2} \sin\left(t^2 x\right)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} \left(\sin\left(t^2 x\right) - x \cos\left(t^2 x\right)\right) dt \\ &= -2\left(u'(x) + x v'(x)\right) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent au système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}\left(x u(x) + v(x)\right) \\ v'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}\left(-u(x) + x v(x)\right) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales $u(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $v(0) = 0$. En notant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ et $A(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)} \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$, ce système différentiel s'écrit $Y' = AY$ avec $Y(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sa solution est la fonction vectorielle Y définie par $Y(x) = e^{B(x)} Y(0)$, où $B(x) = \displaystyle\int_0^x A(t)\, dt$ (puisque B et $B' = A$ commutent), ce qui compte tenu de $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x)$

et $\displaystyle\int_0^x \frac{tdt}{1+t^2} = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ nous donne :

$$\begin{aligned}
B(x) &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) & \arctan(x) \\ -\arctan(x) & \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \ln\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\arctan(x)}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ln\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}}\right) I_2 + \frac{\arctan(x)}{2} C
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
e^{B(x)} &= e^{\ln\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}}\right) I_2} e^{\frac{\arctan(x)}{2} C} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\arctan(x)}{2} C} \\
&= \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right) I_2 + \sin\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right) C\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$\cos^2\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right) = \frac{\cos(\arctan(x)) + 1}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1}{2} = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

et :

$$\sin^2\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\arctan(x)}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}$$

Vu que $\theta = \dfrac{\arctan(x)}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, on a $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta)$ est du signe de x, donc :

$$\begin{aligned}
e^{B(x)} &= \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}} I_2 + \operatorname{signe}(x)\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}} C\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}} I_2 + \operatorname{signe}(x)\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2}} C\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
Y(x) &= e^{B(x)} Y(0) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{signe}(x)\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

ce qui signifie que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos\left(t^2 x\right) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin\left(t^2 x\right) dt = \frac{\operatorname{signe}(x)}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2}}$$

Exercice 14.5. *Solutions bornées ou nulles à l'infini de $X' = AX$*

Pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni de la norme d'algèbre induite $A \mapsto N_\infty(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n,\ \|X\|=1} \|A(X)\|$.
On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_p$.

1. *On suppose que A est diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que $N_\infty\left(e^{tA}\right) \leq C \max_{1 \leq k \leq p} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)}$ pour tout réel t.*
2. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et une constante réelle C tels que $N_\infty\left(e^{tA}\right) \leq C \left(\max_{1 \leq k \leq p} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)}\right) \sum_{k=0}^{r} |t|^k$ pour tout réel t.*
3. *On suppose que A n'est pas diagonalisable. Montrer qu'il existe une valeur propre λ_k de A telle que $\ker(A - \lambda_k I_n) \subsetneq \ker(A - \lambda_k I_n)^2$.*
4. *Montrer que le système différentiel $X' = AX$ a toutes ses solutions bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, A est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres imaginaires pures.*
5. *Montrer que le système différentiel $X' = AX$ a toutes ses solutions telles que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$, si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.*
6. *On suppose que toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.*
   (a) *Soit $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\lim_{t \to +\infty} C(t) = 0$. Montrer que les solution du système différentiel $X'(t) = AX(t) + C(t)$ sont telles que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$.*
   (b) *Soit $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue telle que $\lim_{t \to +\infty} B(t) = 0$. Montrer que les solutions du système différentiel $X'(t) = (A + B(t))X(t)$ sont telles que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$.*

Solution.

1. Si A est diagonalisable, il existe alors une matrice inversible P tels que :

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1 I_{m_1}, \cdots, \lambda_p I_{m_p}\right)$$

et pour tout réel t, on a :

$$N_\infty\left(e^{tA}\right) = N_\infty\left(e^{P(tD)P^{-1}}\right) = N_\infty\left(Pe^{tD}P^{-1}\right) \leq N_\infty(P)\, N_\infty\left(P^{-1}\right) N_\infty\left(e^{tD}\right)$$

avec :

$$N_\infty\left(e^{tD}\right) = N_\infty\left(\mathrm{diag}\left(e^{t\lambda_1} I_{m_1}, \cdots, e^{t\lambda_p} I_{m_p}\right)\right) = \max_{1 \leq k \leq n} \left|e^{t\lambda_k}\right| = \max_{1 \leq k \leq p} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)}$$

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N telles que $A = D + N$ et $DN = ND$ (décomposition de Dunford), de sorte que pour tout réel t, on a $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$ avec $e^{tN} = \sum_{k=0}^{r} \frac{t^k}{k!} N^k$, où $r \in \mathbb{N}^*$ est l'indice de nilpotence de N. Sachant que la norme matricielle induite N_∞ est sous-multiplicative et que les valeurs propres de la matrice diagonalisable D sont celles de A, on a :
$$\begin{aligned} N_\infty\left(e^{tA}\right) \leq N_\infty\left(e^{tD}\right) N_\infty\left(e^{tN}\right) &\leq \max_{1\leq k\leq p} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)} \sum_{k=0}^{r} \frac{|t|^k}{k!} N_\infty\left(N^k\right) \\ &\leq C_r \max_{1\leq k\leq p} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)} \sum_{k=0}^{r} |t|^k \end{aligned}$$
où $C_r = \max\limits_{1\leq k\leq r} N_\infty\left(N^k\right)$.
3. Pour tout nombre complexe λ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a de manière évidente l'inclusion $\ker(A - \lambda I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)^m$. Si, pour toute valeur propre λ_k de A, on a l'égalité $\ker(A - \lambda_k I_n) = \ker(A - \lambda_k I_n)^2$, on a alors $\ker(A - \lambda_k I_n) = \ker(A - \lambda_k I_n)^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. En effet, c'est vrai pour $m \in \{1, 2\}$ et supposant le résultat acquis pour $m \geq 2$, pour tout $X \in \ker(A - \lambda_k I_n)^{m+1}$, on a $Y = (A - \lambda_k I_n) X \in \ker(A - \lambda_k I_n)^m$, donc $Y \in \ker(A - \lambda_k I_n)$ et $X \in \ker(A - \lambda_k I_n)^2 = \ker(A - \lambda_k I_n)$, d'où l'inclusion de $\ker(A - \lambda_k I_n)^{m+1}$ dans $\ker(A - \lambda_k I_n)$ et l'égalité puisque l'autre inclusion est acquise. On a alors $\bigoplus_{k=1}^{p} \ker(A - \lambda_k I_n) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(A - \lambda_k I_n)^{m_k} = \mathbb{C}^n$ (théorème des noyaux), ce qui signifie que A est diagonalisable. En conclusion, pour A non diagonalisable, il existe une valeur propre λ_k de A telle que $\ker(A - \lambda_k I_n) \subsetneq \ker(A - \lambda_k I_n)^2$.
4. Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto X(t) = e^{tA}X_0$, où $X_0 \in \mathbb{C}^n$. Pour A diagonalisable de valeurs propres imaginaires pures et toute solution X du système différentiel $X' = AX$, il existe une constante réelle C telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\|X(t)\|_\infty = \left\|e^{tA}X_0\right\|_\infty \leq N_\infty\left(e^{tA}\right) \|X_0\|_\infty \leq M = C \|X_0\|_\infty \max_{1\leq k\leq p} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)}$$
ce qui signifie qu'elle est bornée. Si la matrice A admet une valeur propre λ_k de partie réelle non nulle, alors pour tout vecteur propre associé $X_k \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, la fonction X définie sur $\mathbb{R}$ par $X(t) = e^{\lambda_k t}X_k$ est une solution du système différentiel $X' = AX$ telle que $\|X(t)\|_\infty = e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t} \|X_k\|_\infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ [resp. pour $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$] on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\|_\infty = +\infty$ [resp. $\lim\limits_{t\to-\infty} \|X(t)\|_\infty = +\infty$], c'est donc une solution non bornée. Si A n'est pas diagonalisable, il existe alors une valeur propre $\lambda_k \in \mathbb{C}$ de A telle que $\ker(A - \lambda_k I_n) \subsetneq \ker(A - \lambda_k I_n)^2$ et on peut trouver un vecteur $X_k \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $(A - \lambda_k I_n) X_k \neq 0$ et $(A - \lambda_k I_n)^2 X_k = 0$. La solution du problème de Cauchy $X' = AX$ de condition initiale $X(0) = X_k$ est alors :
$$X(t) = e^{\lambda_k t}e^{t(A-\lambda_k I_n)}X_k = e^{\lambda_k t}\left(X_k + t(A - \lambda_k I_n) X_k\right)$$

et on a $\|X(t)\|_\infty \geq e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}\left(|t|\,\|(A-\lambda_k I_n)\,X_k\|_\infty - \|X_k\|_\infty\right)$, c'est donc une solution non bornée. On a donc montré que le système différentiel $X' = AX$ a toutes ses solutions bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, A est diagonalisable de valeurs propres imaginaires pures.

5. Si j compris entre 1 et p est tel que $\max\limits_{1\leq k\leq p} \mathrm{Re}(\lambda_k) = \mathrm{Re}(\lambda_j)$, on a alors pour tout réel positif t, $\max\limits_{1\leq k\leq p} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)} = e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_j)}$. Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négatives, on a alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_j)}\sum\limits_{k=0}^{r} t^k\right) = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X_0 = 0$ pour toute solution du système différentiel $X' = AX$. Si A admet une valeur propre de partie réelle positive ou nulle, on a alors $\mathrm{Re}(\lambda_j) \geq 0$ et pour tout vecteur propre $X_j \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ associé à λ_j, la fonction X définie par $X(t) = e^{\lambda_j t}X_j$ est alors une solution de $X' = AX$ telle que $\lim\limits_{t\to+\infty}\|X(t)\|_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\mathrm{Re}(\lambda_j)t}\|X_j\|_\infty = \|X_j\|_\infty > 0$ pour $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty}\|X(t)\|_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\mathrm{Re}(\lambda_j)t}\|X_j\|_\infty = +\infty$ pour $\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$, c'est donc une solution qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$. On a donc montré que le système différentiel $X' = AX$ a toutes ses solutions telles que $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$, si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

Chapitre 15

Exemples d'applications de l'intégration par parties

Exercice 15.1. *Polynômes deLegendre*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par π_{2n} et L_n les polynômes définis par $\pi_{2n}(X) = \left(X^2 - 1\right)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\pi_{2n}^{(n)}$. Les L_n sont les polynômes de Legendre.

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^n([-1,1])$, on a :*

$$\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)\, g(x)\, dx = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-1-k)} g^{(k)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} f(x)\, g^{(n)}(x)\, dx$$

   (formule d'intégrations par parties itérées).

2. *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)^n dx$.*
3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n.*
4. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$, on a $2^n n! \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, L_n(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)\, \pi_{2n}(x)\, dx$.*
5. *Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(x)\, L_m(x)\, dx$, pour tout couple (n,m) d'entiers naturels.*
6. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme L_n admet n racines réelles simples $x_{n,1} < \cdots < x_{n,n}$ dans l'intervalle $]-1,1[$.*
7. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique suite $(\lambda_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ de réels strictement positifs telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} P(x_{n,k})$.*

Solution.

1. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, il s'agit de la formule d'intégration par parties usuelle. Supposons le résultat acquis pour $n \geq 1$ et soient f, g dans $\mathcal{C}^{n+1}([-1,1])$. Le cas $n = 1$ appliqué au couple $\left(f^{(n)}, g\right)$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f^{(n+1)}(x)\, g(x)\, dx &= \int_{-1}^{1} \left(f^{(n)}\right)'(x)\, g(x)\, dx \\ &= \left[f^{(n)} g\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)\, g'(x)\, dx\end{aligned}$$

puis appliquant l'hypothèse de récurrence au couple $\left(f^{(n)}, g'\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f^{(n+1)}(x)\, g(x)\, dx &= \left[f^{(n)} g\right]_{-1}^{1} + \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right]_{-1}^{1} \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} f(x)\, g^{(n+1)}(x)\, dx \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} f(x)\, g^{(n+1)}(x)\, dx\end{aligned}$$

2. Pour tout entier naturel n, on a :

$$W_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n\, dx = \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \left((x+1)^{2n}\right)^{(n)} (x-1)^n\, dx$$

et utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$W_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n}\, dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

compte tenu du fait que -1 est racine d'ordre $2n$ de $(x+1)^{2n}$ et 1 est racine d'ordre n de $(x-1)^n$.

3. Pour $n = 0$ on a $L_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, le polynôme $\pi_{2n}(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} X^{2k}$ est de degré $2n$ et :

$$\begin{aligned}L_n(X) &= \frac{1}{2^n n!} \pi_{2n}^{(n)}(X) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} X^{2k-n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{n} X^{2k-n}\end{aligned}$$

est un polynôme de degré n.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$, on a :

$$2^n n! \int_{-1}^{1} f(x) L_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x) \pi_{2n}^{(n)}(x)\, dx$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \pi_{2n}^{(n-1-k)}(x) f^{(k)}(x)\right]_{-1}^{1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) \pi_{2n}(x)\, dx$$
$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) \pi_{2n}(x)\, dx$$

(-1 et 1 étant racines d'ordre n du polynôme π_{2n}, on a $\pi_{2n}^{(n-1-k)}(\pm 1) = 0$ pour k compris entre 0 et $n-1$).

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P^{(n)} = 0$, donc de la question précédente, on déduit que $\int_{-1}^{1} P(x) L_n(x)\, dx = 0$. Chaque polynôme L_k étant de degré k, on en déduit que $\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0$ pour n, m entiers naturels distincts. Pour $n = m$, on a :

$$2^n n! \int_{-1}^{1} L_n^2(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \pi_{2n}(x) L_n^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} W_n$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} 2^n n!$$

soit $\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\, dx = \dfrac{2}{2n+1}$.

6. Soit $\in \mathbb{N}^*$. Si L_n ne s'annule pas sur l'intervalle $]-1,1[$, il garde alors un signe constant (par continuité) et on a $\int_{-1}^{1} L_n(x)\, dx \neq 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\int_{-1}^{1} P(x) L_n(x)\, dx = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le polynôme L_n a donc au moins une racine réelle dans $]-1,1[$. Si $x_1 \in]-1,1[$ est une racine de L_n de multiplicité $p \geq 2$, on peut alors écrire $L_n(X) = (X - x_1)^2 P_{n-2}(X)$ avec $P_{n-2} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et on a :

$$0 = \int_{-1}^{1} P_{n-2}(x) L_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (x - x_1)^2 P_{n-2}^2(x)\, dx > 0$$

soit une impossibilité. Les racines du polynôme L_n qui sont dans $]-1,1[$ sont donc toutes simples. Notons $x_1, ..., x_p$ ces racines. Si $p < n$, on peut alors écrire $L_n(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - x_k) P_{n-p}(X)$, avec $P_{n-p} \in \mathbb{R}_{n-p}[X]$ de signe constant dans $]-1,1[$ et on a :

$$0 = \int_{-1}^{1} L_n(x) \prod_{k=1}^{p} (x - x_k)\, dx = \int_{-1}^{1} \prod_{k=1}^{p} (x - x_k)^2 P_{n-p}(x)\, dx \neq 0$$

soit encore une impossibilité. On a donc $p = n$, c'est-à-dire que toutes les racines de L_n sont dans $]-1, 1[$ et simples.

7. Par division euclidienne, tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ s'écrit sous la forme $P = QL_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} Q(x)\,L_n(x)\,dx + \int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \int_{-1}^{1} R(x)\,dx$$

Comme $P(x_{n,k}) = R(x_{n,k})$ pour tout k compris entre 1 et n, il nous suffit de montrer le résultat annoncé sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui équivaut à prouver que le système linéaire de n équations aux n inconnues $\lambda_{n,k}$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{n,i}^{k-1} \lambda_{n,i} = \int_{-1}^{1} x^{k-1}dx \ \ (1 \leq k \leq n)$$

a une unique solution. Le déterminant de ce système étant le déterminant de Vandermonde $\prod\limits_{1 \leq j < i \leq n} (x_{n,i} - x_{n,j}) \neq 0$, on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution $(\lambda_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$. En désignant, pour tout k compris entre 1 et n, par $P_{n,k} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $P_{n,k}(x_{n,i}) = 0$ pour $j \neq k$ et $P_{n,k}(x_{n,k}) = 1$, on a $P_{n,k}^2 \in \mathbb{R}_{2n-2}[X]$ et $\lambda_{n,k} = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n,k}^2(x)\,dx > 0$.

Exercice 15.2. *Calcul de* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$ *pour* $p^2 - 4q < 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ *la primitive de* $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ *nulle en* 0.

1. *Montrer que, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* p, q *réels tels que* $\delta = p^2 - 4q < 0$ *(de sorte que* $x^2 + px + q$ *ne s'annule jamais sur* $\mathbb{R}$*), le calcul d'une primitive de* $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$ *se ramène à celui de* $\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$.
2. *Calculer* F_1.
3. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$2nF_{n+1}(x) = (2n-1)\,F_n(x) + \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

   En déduire les valeurs de F_2 *et* F_3.

4. *Soit* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de nombres rationnels définie par* $\alpha_n = \dfrac{2^{2n-1}}{n} \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*
   (a) $2n\alpha_n = (2n+1)\,\alpha_{n+1}$;

(b) $2\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\,\alpha_k F_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}$;

(c) $F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n\alpha_n}\left(\arctan(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$.

5. *Calculer* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution.

1. En utilisant la forme canonique $x^2 + px + q = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \omega^2$, où $\omega = -\frac{\delta}{4} > 0$, on a en effectuant le changement de variable $y = x - \frac{p}{2}$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dy}{(y^2+\omega^2)^n} = \frac{1}{\omega^{2n}} \int \frac{dy}{\left(1 + \left(\frac{y}{\omega}\right)^2\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\omega^{2n-1}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{\omega^{2n-1}} F_n(t) + \text{Cste} = \frac{1}{\omega^{2n-1}} F_n\left(\frac{1}{\omega}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right) + \text{Cste}$$

2. On a $F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2 dt}{(1+t^2)^{n+1}} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = F_n(x) - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} t \cdot dt \end{aligned}$$

et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} t \cdot dt &= \left[-\frac{1}{2n}\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + \frac{1}{2n}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\ &= -\frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n} F_n(x) \end{aligned}$$

soit $F_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} F_n(x) + \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}$. Pour $n = 1$ et $n = 2$, cela donne :

$$F_2(x) = \frac{1}{2} F_1(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}$$

et :

$$F_3(x) = \frac{3}{4} F_2(x) + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{3}{8}\left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + \frac{2x}{3(1+x^2)^2}\right)$$

4.

(a) On a $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$ et :

$$\alpha_{n+1} = \frac{2^{2n+1}}{n+1}\frac{1}{\frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}} = \frac{2n}{2n+1}\alpha_n$$

(b) Pour tout entier $k \geq 1$, on a $2k\alpha_k F_{k+1}(x) = (2k-1)\alpha_k F_k + \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^n}$ et faisant la somme, on obtient :

$$2\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\alpha_k F_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}$$

(c) Avec $2k\alpha_k = (2k+1)\alpha_{k+1}$, on déduit que :

$$2\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)\alpha_{k+1}F_{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1}(2j-1)\alpha_j F_j$$

et :

$$\sum_{j=2}^{n+1}(2j-1)\alpha_j F_j = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\alpha_k F_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}$$

soit :

$$(2n+1)\alpha_{n+1}F_{n+1} = \alpha_1 F_1 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k} = \arctan(x) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}$$

avec $(2n+1)\alpha_{n+1} = 2n\alpha_n$, d'où le résultat.

5. On a $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{n\to+\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \geq 2$ entier :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n} = \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \frac{1}{(n-1)\alpha_{n-1}}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}\pi$$

Exercice 15.3. *Irrationalité de* π

On désigne par $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2 - t^2\right)^n \cos(t)\,dt$$

1. Calculer $I_n(x)$ *pour* $n = 0$ *et* $n = 1$.

2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a :*

$$xI_n'(x) = (2n+1)\, I_n(x) - \frac{1}{2} I_{n+1}(x)$$

3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n à coefficients entiers relatifs et de degré au plus égal à n telles que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a $I_n(x) = P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x)$.*

4. *On a $I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. On suppose que $\frac{\pi}{2}$ est rationnel, soit que $\frac{\pi}{2} = \frac{a}{b}$ avec a, b premiers entre eux dans $\mathbb{N}^*$.*

   (a) *Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = b^{2n+1} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un entier naturel non nul.*

   (b) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et conclure.*

Solution.

1. Pour tout réel $x > 0$, on a $I_0(x) = 2\int_0^x \cos(t)\, dt = 2\sin(x)$ et en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= 2\int_0^x \left(x^2 - t^2\right)\cos(t)\, dt = 2\left[\left(x^2 - t^2\right)\sin(t)\right]_0^x + 4\int_0^x t\sin(t)\, dt \\ &= 4\left(\left[-t\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x \cos(t)\, dt\right) = 4\left(-x\cos(x) + \sin(x)\right) \end{aligned}$$

2. Le changement de variable $t = xu$, à $x > 0$ fixé, nous donne :

$$I_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n!}\int_{-1}^1 \left(1 - u^2\right)^n \cos(xu)\, du = \frac{x^{2n+1}}{n!} J_n(x)$$

La fonction $(u, x) \mapsto \left(1 - u^2\right)^n \cos(xu)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}^{+,*}$ et l'intégration se faisant sur un segment, on en déduit que la fonction J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, sa dérivée première étant donnée par :

$$J_n'(x) = -\int_{-1}^1 u\left(1 - u^2\right)^n \sin(xu)\, du.$$

Une intégration par parties nous donne alors :

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= \left[\frac{\left(1 - u^2\right)^{n+1}}{2(n+1)}\sin(xu)\right]_{u=-1}^{u=1} - \int_{-1}^1 \frac{\left(1 - u^2\right)^{n+1}}{2(n+1)} x\cos(xu)\, du \\ &= -\frac{x}{2(n+1)} J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction I_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, sa dérivée première étant donnée par $I_n'(x) = (2n+1)\dfrac{x^{2n}}{n!}J_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{n!}J_n'((x)$, donc :

$$\begin{aligned} xI_n'(x) &= (2n+1)\frac{x^{2n+1}}{n!}J_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{n!}\frac{x}{2(n+1)}J_{n+1}(x) \\ &= (2n+1)I_n(x) - \frac{1}{2}I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

3. C'est vrai pour $n=0$ et pour $n=1$ avec $(P_0, Q_0) = (0,2)$ et $(P_1, Q_1) = (-4x, 4)$ Supposant le résultat acquis au rang $n-1 \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= 2(2n+1)I_n(x) - 2xI_n'(x) \\ &= 2(2n+1)(P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x)) \\ &- 2x(P_n'(x)\cos(x) - P_n(x)\sin(x) + Q_n'(x)\sin(x) + Q_n(x)\cos(x)) \\ &= P_{n+1}(x)\cos(x) + Q_{n+1}(x)\sin(x) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= 2(2n+1)P_n(x) - 2x(P_n'(x) - Q_n(x)) \\ Q_{n+1}(x) &= 2(2n+1)Q_n(x) - 2x(Q_n'(x) - P_n(x)) \end{aligned}$$

qui sont bien des fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs de degré au plus égal à $n+1$.

4. Avec $\left(x^2 - t^2\right)^n \cos(t) > 0$ pour $t \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on déduit que $I_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$ et $u_n > 0$. Si $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a}{b}$, il existe alors un entier naturel non nul R_n tel que :

$$I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = I_n\left(\frac{a}{b}\right) = Q_n\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{R_n}{b^{2n+1}}$$

(réduction au même dénominateur de $Q_n\left(\dfrac{a}{b}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\alpha_k\frac{a^k}{b^k}$, les α_k étant entiers), donc $b^{2n+1}I_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = R_n \in \mathbb{N}^*$.

5. On a $u_n = b^{2n+1}I_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{a^{2n+1}}{n!}J_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ avec :

$$0 < J_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right)dt \leq \int_{-1}^{1}dt = 2$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{2n+1}}{n!} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$, tous les u_n étant dans $\mathbb{N}^*$, ce qui est peu probable. En conclusion $\dfrac{\pi}{2}$ ne peut être rationnel et il en est de même pour π.

Exercice 15.4. *Intégrales de Wallis*

On note $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des intégrales de Wallis.*

1. *Calculer* W_0 *et* W_1.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$, *puis en déduire que* $W_{n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(n+1)\,W_n}$. *Il suffit donc de calculer* W_n *pour* n *pair ou pour* n *impair.*
3. *Montrer que la suite* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers* 0.
4. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a :*
$$(\cos(t))^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)\,t)$$
puis en déduire que $W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{2}$ *et* $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.
5. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, *soit que :*
$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$
6. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on désigne par* p_n *la probabilité d'obtenir* n *fois pile et* n *fois face sur* $2n$ *lancés indépendants d'une pièce équilibrée. Montrer que :*
   (a) *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $p_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$ *et :*
   $$p_n^2 = \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{1}{2n+1}\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}\frac{2}{\pi}$$
   (b) $p_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Solution.

1. On a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = 1$.

2. Une intégration par parties nous donne :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1-\sin^2(t)\right)dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^n(t)\sin(t)\right)\sin(t)\,dt$$
$$= W_n - \left[-\sin(t)\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1}$$

soit $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$. En notant $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$, on a :

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = u_n$$

donc $u_n = u_0 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$, soit $W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(n+1)W_n}$.

3. Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos(t) \leq 1$, donc $0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par intégration, $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante minorée par 0 et en conséquence, convergente vers un réel $\lambda \geq 0$. De $W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$, on déduit en passant à la limite quand n tend vers l'infini que $\lambda^2 = 0$ et donc que $\lambda = 0$.

4. On a :

$$(\cos(t))^n = \frac{\left(e^{it}+e^{-it}\right)^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikt}e^{-i(n-k)t} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t}$$

donc $(\cos(t))^n = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t}\right) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)t)$. Sachant que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2mt)\,dt = 0$ pour $m \in \mathbb{Z}^*$, il en résulte que :

$$W_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(k-n)t)\,dt = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{2}$$

et $W_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2n+1)W_{2n}} = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$. La valeur de W_{2n} peut aussi se déduire de la relation de récurrence :

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdots\frac{1}{2\cdot 1}W_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{2}$$

5. On a $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2n+1)(W_{2n})^2}$ avec $1 \leq \dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leq \dfrac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$ (puisque la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante) et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1$ ou encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ce qui compte tenu de $W_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\dfrac{\pi}{2}$ se traduit par $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

6.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_{2n} égale au nombre de fois où on obtient face au bout de $2n$ lancés suit une loi binomiale de paramètre $\left(2n, \dfrac{1}{2}\right)$, donc :

$$\begin{aligned} p_n &= \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n))\,(1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1))}{(n!)^2} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \end{aligned}$$

et $p_n^2 = \dfrac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2}{\prod\limits_{k=1}^{n}(4k^2)}$ avec :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2 &= \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)\left(\prod_{j=0}^{n-1}(2j+1)\right) \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right) = \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(4k^2-1\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne $p_n^2 = \dfrac{1}{2n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4k^2-1}{4k^2}$. D'autre part, en utilisant la relation de récurrence $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$ et en notant $v_n = \dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}}$, on a :

$$v_n = \frac{W_{2n}}{W_{2n-2}}\frac{W_{2n-2}}{W_{2n-1}}\frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n-1}{2n}v_{n-1}\frac{2n+1}{2n} = \frac{4n^2-1}{4n^2}v_{n-1}$$

donc $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4k^2-1}{4k^2}v_0$ avec $v_0 = \dfrac{W_0}{W_1} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui nous donne l'égalité $p_n^2 = \dfrac{1}{2n+1}\dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}}\dfrac{2}{\pi}$.

(b) Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$, on en déduit que $p_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Exercice 15.5. *Une formule de sommation par parties d'Abel*

Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x.

1. *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes,* A *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $A(x) = \sum_{k=0}^{[x]} a_k$ *et* $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$.
   Montrer que :
   (a) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*
   $$a_{n+1} f(n+1) = A(n+1) f(n+1) - A(n) f(n) - \int_n^{n+1} A(t) f'(t)\,dt$$
   (b) *pour tous* $n < m$ *dans* $\mathbb{N}$, *on a :*
   $$\sum_{k=n+1}^{m} a_k f(k) = A(m) f(m) - A(n) f(n) - \int_n^m A(t) f'(t)\,dt$$
   (c) *pour tous réels* $\alpha < \beta$ *dans* $\mathbb{R}^+$, *on a :*
   $$\sum_{\alpha<k\leq\beta} a_k f(k) = A(\beta) f(\beta) - A(\alpha) f(\alpha) - \int_\alpha^\beta A(t) f'(t)\,dt$$
   (formule sommatoire d'Abel).
2. *En utilisant la formule sommatoire d'Abel, montrer que :*
   $$\gamma = \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \ln(m)\right) = 1 - \int_1^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^2}dt$$

Solution.

1. La fonction A définie sur $\mathbb{R}^+$ par $A(x) = \sum_{k=0}^{[x]} a_k = a_0 + \cdots + a_n$ pour tout $x \in [n, n+1[$, où n décrit $\mathbb{N}$, est continue par morceaux avec les entiers naturels pour éventuels points de discontinuité. Elle est donc Riemann-intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A(t) = A(n)$ pour tout $t \in [n, n+1[$ et :
   $$\begin{aligned}\int_n^{n+1} A(t) f'(t)\,dt &= A(n)\int_n^{n+1} f'(t)\,dt = A(n)\,(f(n+1) - f(n)) \\ &= A(n+1) f(n+1) - A(n) f(n) + (A(n) - A(n+1))\, f(n+1) \\ &= A(n+1) f(n+1) - A(n) f(n) - a_{n+1} f(n+1)\end{aligned}$$
   soit $a_{n+1} f(n+1) = A(n+1) f(n+1) - A(n) f(n) - \int_n^{n+1} A(t) f'(t)\,dt.$

(b) Il en résulte que pour $n < m$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} a_k f(k) &= \sum_{k=n+1}^{m} \left(A(k) f(k) - A(k-1) f(k-1) - \int_{k-1}^{k} A(t) f'(t)\, dt \right) \\ &= A(m) f(m) - A(n) f(n) - \int_{n}^{m} A(t) f'(t)\, dt\end{aligned}$$

cette formule étant valable pour $n = m$ en convenant que $\sum_{k=m+1}^{m} = 0$.

(c) En notant $n = [\alpha]$ et $m = [\beta]$, on a $n \leq m$ et :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} A(t) f'(t)\, dt &= \int_{n}^{m} A(t) f'(t)\, dt - \int_{n}^{\alpha} A(t) f'(t)\, dt + \int_{m}^{\beta} A(t) f'(t)\, dt \\ &= \int_{n}^{m} A(t) f'(t)\, dt - A(n) \int_{n}^{\alpha} f'(t)\, dt + A(m) \int_{m}^{\beta} f'(t)\, dt \\ &= A(m) f(m) - A(n) f(n) - \sum_{k=n+1}^{m} a_k f(k) \\ &\quad - A(n) (f(\alpha) - f(n)) + A(m) (f(\beta) - f(m)) \\ &= - \sum_{k=n+1}^{m} a_k f(k) - A(n) f(\alpha) + A(m) f(\beta) \\ &= - \sum_{\alpha < k \leq \beta} a_k f(k) - A(\alpha) f(\alpha) + A(\beta) f(\beta)\end{aligned}$$

la somme $\sum_{\alpha<k\leq\beta} = \sum_{k=n+1}^{m}$ étant nulle pour $n = m$ (pour $\alpha < k \leq \beta$, on a $n \leq \alpha < k \leq \beta < m+1$, soit $n+1 \leq k \leq m$ et réciproquement), ce qui nous donne la formule de sommation par parties annoncée.

2. En désignant par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A(x) = 0 = [x]$ pour tout $x \in [0, 1[$ et $A(x) = \sum_{k=1}^{[x]} 1 = [x]$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, ce qui nous donne en utilisant la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $f(t) = \frac{1}{t}$, pour tout entier $m \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k} = \int_{1}^{m} \frac{[t]}{t^2} dt = \int_{1}^{m} \frac{[t] - t}{t^2} dt + \ln(m)$$

soit $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln(m) = 1 + \int_{1}^{m} \frac{[t] - t}{t^2} dt$ et faisant tendre m vers l'infini, on en déduit que :

$$\gamma = \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln(m) \right) = 1 - \int_{1}^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^2} dt$ étant convergente puisque $0 \leq \frac{t-[t]}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ pour tout $t \geq 1$.

Exercice 15.6. *Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\cos(\theta x)}{\sqrt{\theta}} d\theta$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\sin(\theta x)}{\sqrt{\theta}} d\theta$*

1. *Montrer que, pour tout réel x, on a :*
$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
2. *Montrer que la fonction $w : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{it^2 x} dt$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en précisant ses dérivées successives.*
3. *Montrer que la fonction w est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec condition initiale que l'on résoudra.*
4. *En déduire, pour tout réel x, les valeurs des intégrales :*
$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\cos(\theta x)}{\sqrt{\theta}} d\theta \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\sin(\theta x)}{\sqrt{\theta}} d\theta$$

Solution.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\theta = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta)$ est du signe de x (en convenant que signe $(0) = 0$), ce qui nous donne :
$$\cos(\theta) = \sqrt{\cos^2(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
et :
$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \text{signe}(x)\sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \text{signe}(x)\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}} \\ &= \text{signe}(x)\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \text{signe}(x)\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$
2. La fonction $\varphi : (x,t) \mapsto e^{-t^2} e^{it^2 x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x,t)\right| = \left|e^{-t^2}\left(it^2\right)^n e^{it^2 x}\right| = t^{2n} e^{-t^2}$$
la fonction $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a $t^{2n} e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$), il en résulte que la fonction w est bien définie sur $\mathbb{R}$ (cas $n = 0$) et d'après théorème de dérivation de Lebesgue qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dérivées définies par $w^{(n)}(x) = i^n \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{(ix-1)t^2} dt$.

3. Une intégration par parties, où l'on dérive $e^{(ix-1)t^2}$ par rapport à la variable t, nous donne pour tout réel x :

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t^2} dt = \left[te^{(ix-1)t^2} \right]_{t=0}^{t \to +\infty} - \int_0^{+\infty} 2t(ix-1)\, te^{(ix-1)t^2} dt \\ &= -2(ix-1) \int_0^{+\infty} t^2 e^{(ix-1)t^2} dt = -2(x+i)\, w'(x) \end{aligned}$$

soit l'équation différentielle $w'(x) = -\dfrac{1}{2(x+i)} w(x)$ avec la conditions initiale $w(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. La solution de ce problème de Cauchy est la fonction w définie par $w(x) = w(0)\, e^{\varphi(x)}$, où la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{t+i} = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{t-i}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) - i \arctan(x) \right) = \ln\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}} \right) + \frac{\arctan(x)}{2} i \end{aligned}$$

ce qui nous donne $w(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\arctan(x)}{2} i}$. En notant $\theta = \arctan(x)$, on a $\theta \in \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$ et $e^{\frac{\arctan(x)}{2} i} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ avec $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$, $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ du signe de x et :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos(\theta)+1}{2} = \frac{\cos(\arctan(x))+1}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+1}{2} = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{it^2 x} dt \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + i \,\mathrm{signe}(x) \sqrt{\sqrt{1+x^2}-1} \right) \end{aligned}$$

4. Prenant les parties réelle et imaginaire dans la question précédente, on en déduit que, pour tout réel x, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(t^2 x\right) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin\left(t^2 x\right) dt = \frac{\mathrm{signe}(x)}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2}}$$

Le changement de variable $t^2 = \theta$ nous donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\cos(\theta x)}{\sqrt{\theta}} d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\sin(\theta x)}{\sqrt{\theta}} d\theta = \operatorname{signe}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 + x^2}}$$

Chapitre 16

Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites

Exercice 16.1. *Un résultat de continuité des valeurs propres.*

On se donne deux matrices réelles d'ordre $n \geq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}^{+,*}$ et :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On associe à ces matrices la fonction $F : [0,1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in [0,1], \; F(t) = (1-t) D + tA$$

1. *Calculer les valeurs propres de D.*
2. *Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $F(t)$ admet n valeurs propres réelles simples.*
3. *Montrer qu'il existe une fonction continûment dérivable :*

$$f = (f_1, \cdots, f_n) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que le polynôme caractéristique de $F(t)$ s'écrive :

$$\forall t \in [0,1], \; P(\lambda, t) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - f_j(t))$$

4. Montrer que pour tout $j = 1, 2, \cdots, n$, f_j est solution sur $[0,1]$ d'une équation différentielle avec condition initiale.

Solution.

1. La matrice D est symétrique réelle, donc toutes ses valeurs propres sont réelles. Avec le théorème de Gerschgörin-Hadamard, on déduit que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $|\lambda| \leq 2$. Une telle valeur propre peut donc s'écrire $\lambda = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in [0, \pi]$. Si x est un vecteur propre non nul associé ses composantes sont solutions de la récurrence :

$$x_{k-1} - \lambda x_k + x_{k+1} = 0 \ \ (1 \leq k \leq n)$$

avec les conditions aux limites $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. Le polynôme caractéristique de cette récurrence est :

$$P(r) = r^2 - 2\cos(\alpha) r + 1,$$

soit $P(r) = \left(r - e^{i\alpha}\right)\left(r - e^{-i\alpha}\right)$. Les racines sont donc $r_1 = e^{i\alpha}$ et $r_2 = e^{-i\alpha}$. Ce qui donne :

$$x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha} \ \ (0 \leq k \leq n+1)$$

Avec $x_0 = 0$, on déduit que $c_2 = -c_1$. Avec $x_{n+1} = 0$ et $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, on déduit que $\sin((n+1)\alpha) = 0$ et $\alpha = \dfrac{j\pi}{n+1}$ avec $1 \leq j \leq n$. Les valeurs propres de D sont donc :

$$\lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \ \ (1 \leq k \leq n)$$

2. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$F(t) = \begin{pmatrix} ta_1 & 1-t+tb_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & ta_2 & 1-t+tb_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & ta_{n-1} & 1-t+tb_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & ta_n \end{pmatrix}$$

et cette matrice admet n valeurs propres réelles simples puisqu'elle est irréductible avec $1-t+tb_i > 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $i = 1, 2, \cdots, n$ (voir l'exercice 9.1, question 4c).

3. Soit $t_0 \in [0,1]$ et λ_0 une valeur propre de $A(t_0)$. On a $P(\lambda_0, t_0) = 0$ et $\dfrac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda_0, t_0) \neq 0$ puisque λ_0 est racine simple de $P(\cdot, t_0)$. Le théorème des fonctions implicites nous dit alors qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_0$ de t_0 dans $[0,1]$ et une fonction continûment dérivable :

$$f = (f_1, \cdots, f_n) : \mathcal{V}_0 \to \mathbb{R}^n$$

tels que :

$$\forall t \in V_0,\ P(\lambda, t) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - f_k(t))$$

Les valeurs propres de $A(t)$ étant toutes simples, on peut supposer que $f_1(t) < f_2(t) < \cdots < f_n(t)$. Avec cette condition la fonction f est unique. L'intervalle $[0, 1]$ étant compact, on peut trouver une partition du type :

$$[0, 1] = [a_0, b_0[\cup [a_1, b_1[\cup \cdots \cup [a_p, b_p],$$

où :

$$0 = a_0 < b_0 = a_1 < b_1 = a_2 < \cdots < b_{p-1} = a_p < b_p = 1,$$

telle pour tout $k = 0, 1, \cdots, p$, il existe une unique fonction continûment dérivable :

$$f_k = (f_{1,k}, \cdots, f_{n,k}) : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^n$$

avec :

$$\forall t \in [a_k, b_k],\ \begin{cases} P(\lambda, t) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - f_{j,k}(t)) \\ f_{1,k}(t) < f_{2,k}(t) < \cdots < f_{n,k}(t) \end{cases}$$

La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = (f_{1,k}(t), \cdots, f_{n,k}(t))$ si $t \in [a_k, b_k]$ est alors continûment dérivable et $P(\lambda, t) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - f_j(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$.

4. En dérivant la relation $\varphi_j(t) = 0$ par rapport à t, pour tout $j = 1, 2, \cdots, n$, on déduit alors que f_j est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f_j(0) = a_j \\ f_j'(t) = -\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial t}(f_j(t), t)}{\dfrac{\partial P}{\partial \lambda}(f_j(t), t)} \quad (t \in [0, 1]) \end{cases}$$

La simplicité des valeurs propres de $A(t)$ nous garantit que $\dfrac{\partial P}{\partial \lambda}(f_j(t), t) \neq 0$ sur $[0, 1]$.

Chapitre 17

Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme

On rappelle le résultat suivant, où $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|')$ sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et u une application linéaire de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

— u est continue en 0 ;

— u est continue sur E ;

— u est bornée sur la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$;

— il existe une constante réelle c telle que $\|u(x)\|' \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$;

— u est uniformément continue sur E.

Dans ce cas, la norme de u est définie par :

$$N(u) = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|' = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|}$$

L'application $u \mapsto N(u)$ est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

Pour justifier que $N(u) = \alpha$, on essaye de montrer que $\|u(x)\|' \leq \alpha\|x\|$ pour tout $x \in E$, puis soit on trouve $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|u(x)\|' = \alpha$ (si cette borne supérieure est atteinte, ce qui est toujours le cas en dimension finie car la sphère unité est compacte, mais pas nécessairement en dimension infinie), soit on essaye de trouver une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans la boule unité de E telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|u(x_k)\|' = \alpha$ et avec $\|u(x_k)\|' \leq N(u)\|x_k\| \leq N(u)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit, par passage à la limite, que $\alpha \leq N(u)$.

Dans le cas où la borne supérieure $N(u)$ n'est pas atteinte, on a l'inégalité stricte $\|u(x)\|' < N(u)\|x\|$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Exercice 17.1. *Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, norme de la forme linéaire trace.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Pour $k \in \{\infty, 1, 2\}$, S_k désigne la sphère *unité de* $\left(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_k\right)$ *et pour toute matrice* $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *on note* $N_k(A) = \sup_{x\in S_k} \|Ax\|$.

1. *Montrer que, pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *on a* $N_\infty(A) = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

2. *Montrer que, pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *on a* $N_1(A) = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

3. *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{sp}(A)$ *l'ensemble de ses valeurs propres et* $A^* = {}^t\overline{A}$ *sa matrice adjointe.*

   (a) *Dans le cas où* A *est hermitienne, montrer que* $N_2(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{sp}(A)} |\lambda|$.

   (b) *Montrer que* $N_2(A^*) = N_2(A)$, *puis que* $N_2(A) = \sqrt{\max_{\lambda\in\mathrm{sp}(A^*A)} |\lambda|}$.

4. *Pour* $k \in \{\infty, 1, 2\}$, *calculer la norme de la forme linéaire trace sur l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *muni de l'une des normes* N_k.

Solution. $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Pour tout $x \in S_\infty$, on a $\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \left(\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$, donc $N_\infty(A) \le \alpha = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Soient k un entier compris entre 1 et n tel que $\alpha = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$ et $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in S_\infty$, où :

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{kj}}}{|a_{kj}|} \text{ si } a_{kj} \ne 0 \\ 0 \text{ si } a_{kj} = 0 \end{cases}$$

   (A étant non nulle, il existe au moins un indice j tel que $a_{kj} \ne 0$). En notant $y = Ax$, on a :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ |y_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \alpha$$

   avec $|y_k| = \left|\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \alpha$, donc $\|Ax\|_\infty = \alpha$ et $N_\infty(A) = \alpha$.

2. Pour tout $x \in S_1$, on a :

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \, |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)\end{aligned}$$

donc $N_1(A) \leq \beta = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$. En notant k un entier compris entre 1 et n tel que $\beta = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$, on a $\beta = \|Ae_k\|_1 \leq N_1(A)$ (colonne k de A) et en conséquence, $N_1(A) = \beta$. On peut remarquer que $N_1(A) = N_\infty(A^*)$.

3.

(a) Une matrice hermitienne se diagonalisant dans une base orthonormée, il existe des nombres complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et une base orthonormée $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{C}^n$ tels que $A\varepsilon_k = \lambda_k \varepsilon_k$ pour tout k compris entre 1 et n. Pour tout $x = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k$ dans $\mathbb{C}^n$, on a alors en notant $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A :

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 x_k^2 \leq \rho(A)^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \rho(A)^2 \|x\|_2$$

Donc $N_2(A) \leq \rho(A)$. Si $k \in \{1, \cdots, n\}$ est tel que $\rho(A) = |\lambda_k|$, on a alors $\rho(A) = |\lambda_k| = \|A\varepsilon_k\|_2$ avec $\|e_k\|_2 = 1$. Donc $N_2(A) = \rho(A)$.

(b)

i. Pour tout $x \in S_2$, on a en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2^2 &= \langle x \mid A^*Ax \rangle \leq \|x\|_2 \|A^*Ax\|_2 \\ &\leq \|x\|_2 N_2(A^*A) \|x\|_2 = N_2(A^*A)\end{aligned}$$

donc $(N_2(A))^2 \leq N_2(A^*A) \leq N_2(A) N_2(A^*)$ et $N_2(A) \leq N_2(A^*)$. En appliquant cette inégalité à A^*, on obtient $N_2(A^*) \leq N_2(A)$ ce qui nous donne $N_2(A^*) = N_2(A)$.

ii. On a $(N_2(A))^2 \leq N_2(A^*A) \leq N_2(A^*) N_2(A) = (N_2(A))^2$, donc $(N_2(A))^2 = N_2(A^*A)$ avec A^*A hermitienne, donc :

$$N_2(A^*A) = \rho(A^*A) \text{ et } N_2(A) = \sqrt{N_2(A^*A)} = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

(c) Pour $k \in \{\infty, 1, 2\}$, on note $N'_k(\mathrm{Tr}) = \sup_{A \neq 0} \dfrac{|\mathrm{Tr}(A)|}{N_k(A)}$.

i. Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$|\mathrm{Tr}(A)| = \left|\sum_{i=1}^n a_{ii}\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq nN_\infty(A)$$

et $|\mathrm{Tr}(I_n)| = n = nN_\infty(I_n)$, donc $N'_\infty(\mathrm{Tr}) = n$.

ii. Comme $N_1(A) = N_\infty(A^*)$ et $\mathrm{Tr}(A^*) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$, on en déduit que $N'_1(\mathrm{Tr}) = n$.

iii. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{C}^n$, on a en notant $\mu_1, \cdots, \mu_n$ les valeurs propres (réelles positives) de la matrice hermitienne positive A^*A :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Tr}(A)| &= \left|\sum_{i=1}^n 1\cdot a_{ii}\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ii}|^2}\\ &\leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)}\\ &\leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^n \mu_k} \leq n\sqrt{\rho(A^*A)} = nN_2(A)\end{aligned}$$

avec $|\mathrm{Tr}(I_n)| = n = nN_2(I_n)$, donc $N'_2(\mathrm{Tr}) = n$.

Exercice 17.2. *Norme d'un endomorphisme continu d'un espace préhilbertien.*

Soit $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien (de dimension finie ou non) et $u \neq 0$ une application linéaire continue de E dans E. On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire sur E.

1. *Montrer que $N(u) = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle u(x) \mid y\rangle|$.*
2. *Dans le cas où u est symétrique, montrer que $N(u) = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x) \mid x\rangle|$.*

Solution. On note S la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$.

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout x, y dans E :

$$|\langle u(x) \mid y\rangle| \leq \|u(x)\|\,\|y\| \leq N(u)\,\|x\|\,\|y\|$$

donc $\alpha = \sup\limits_{(x,y)\in S^2} |\langle u(x) \mid y\rangle| \leq N(u)$. Pour $x \in S$ tel que $u(x) \neq 0$, on a :

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x) \mid u(x)\rangle = \|u(x)\|\left\langle u(x) \mid \frac{1}{\|u(x)\|}u(x)\right\rangle \leq \|u(x)\|\,\alpha$$

(puisque $y = \dfrac{1}{\|u(x)\|}u(x) \in S_2$) et il en résulte que $\|u(x)\| \leq \alpha$, cette dernière inégalité étant aussi vérifiée si $u(x) = 0$. On en déduit donc que $N(u) \leq \alpha$ et l'égalité.

2. On déjà $\beta = \sup\limits_{x \in S_2} |\langle u(x) \mid x \rangle| \leq N(u) = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle u(x) \mid y \rangle|$. Comme u est symétrique, l'application bilinéaire $\varphi : (x, y) \mapsto \langle u(x) \mid y \rangle$ est symétrique ($\varphi(y, x) = \langle u(y) \mid x \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle$) et on a l'identité de polarisation, $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{4}(\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y))$, soit :

$$\langle u(x) \mid y \rangle = \frac{1}{4}(\langle u(x + y) \mid x + y \rangle - \langle u(x - y) \mid x - y \rangle)$$

avec $|\langle u(x \pm y) \mid x \pm y \rangle| \leq \beta \|x \pm y\|^2$, ce qui nous donne :

$$|\langle u(x) \mid y \rangle| \leq \frac{\beta}{4}\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) = \frac{\beta}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

et pour $(x, y) \in S_2^2$, on obtient $|\langle u(x) \mid y \rangle| \leq \beta$. On a donc $N(u) \leq \beta$ et l'égalité.

Exercice 17.3. *Norme d'une forme linéaire continue sur l'espace des suites numériques bornées.*

On note ℓ^∞ l'espace des suites complexes bornées, ℓ^0 le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites convergentes vers 0 et ℓ^1 le sous-espace de ℓ^0 formé des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ soit absolument convergente. L'espace ℓ^∞ est normé par $x \mapsto \|x\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ et l'espace ℓ^1 est normé par $x \mapsto \|x\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. À toute suite $\varphi \in \ell^1$, on associe la forme linéaire u_φ définie sur ℓ^∞ par $u_\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi_n x_n$ pour tout $x \in \ell^\infty$. Montrer que :

1. *u_φ est continue avec $N(u_\varphi) = \|\varphi\|_1$, cette borne supérieure étant atteinte ;*
2. *la restriction u_0 de u_φ à ℓ^0 est continue avec $N(u_0) = \|\varphi\|_1$;*
3. *le sous-espace $\ell^{0,0}$ de ℓ^∞ formé des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans $\left(\ell^0, \|\cdot\|_\infty\right)$;*
4. *pour toute forme linéaire continue u sur ℓ^0, il existe une unique suite $\varphi \in \ell^1$ telle que $u = u_{\varphi|\ell^0}$ (restriction de u_φ à ℓ^0).*

Solution.

1. Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n \varphi_n| \leq \|x\|_\infty |\varphi_n|$ avec $\|\varphi\|_1 = \sum |\varphi_n| < +\infty$, ce qui entraîne l'absolue convergence de $\sum x_n \varphi_n$, donc $u_\varphi(x)$ est bien défini et on a :

$$|u_\varphi(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n\right| \leq \|\varphi\|_1 \|x\|_\infty$$

d'où la continuité de l'application linéaire u_φ avec $N(u_\varphi) \leq \|\varphi\|_1$. Pour $\varphi \neq 0$, on désigne par x la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \begin{cases} \dfrac{\overline{\varphi_n}}{|\varphi_n|} \text{ si } \varphi_n \neq 0 \\ 0 \text{ si } \varphi_n = 0 \end{cases} \tag{17.1}$$

On a alors $\|x\|_\infty = 1$ et $u_\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n = \|\varphi\|_1$, donc $N(u_\varphi) = \|\varphi\|_1$, cette borne supérieure étant atteinte.

2. La restriction u_0 de u_φ à ℓ^0 est continue avec $N(u_0) \leq \|\varphi\|_1$, mais le calcul de $N(u_0)$ inspiré de la question précédente n'est pas valable car la suite x définie par (17.1) n'est pas dans ℓ^0. On utilise la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ℓ^0 définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n^{(k)} = \begin{cases} x_n \text{ si } 0 \leq n \leq k \\ 0 \text{ si } n \geq k+1 \end{cases}$$

où x est définie par (17.1) (on a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n^{(k)} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq 1$ et :

$$\left|\left|u_0\left(x^{(k)}\right)\right| - \|\varphi\|_1\right| \leq \left|u_0\left(x^{(k)}\right) - \|\varphi\|_1\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x_n^{(k)}\varphi_n - |\varphi_n|\right)\right|$$
$$\leq \sum_{n=k+1}^{+\infty} |\varphi_n| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left|u_0\left(x^{(k)}\right)\right| = \|\varphi\|_1$ et avec $\left|u_0\left(x^{(k)}\right)\right| \leq N(u_0)\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq N(u_0)$, on déduit que $\|\varphi\|_1 \leq N(u_0)$ et $N(u_0) = \|\varphi\|_1$.

3. On a clairement l'inclusion $\ell^{0,0} \subset \ell^0$. Soient $x \in \ell^0$ et $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^{0,0}$ définie par $x_n^{(k)} = x_n$ pour $0 \leq n \leq k$ et $x_n^{(k)} = 0$ pour $n \geq k+1$. Avec :

$$\left\|x - x^{(k)}\right\|_\infty = \sup_{n\geq k+1}|x_n| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

(la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0), on déduit que $x = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$ dans $\left(\ell^0, \|\cdot\|_\infty\right)$, ce qui signifie bien que $\ell^{0,0}$ est dense dans $\left(\ell^0, \|\cdot\|_\infty\right)$.

4. Soit u une forme linéaire continue sur ℓ^0. En notant $\left(e^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^{0,0}$ définie par $e_k^{(n)} = \delta_{n,k}$ (symbole de Kronecker) pour tous n, k dans $\mathbb{N}$, on vérifie que la suite $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\varphi_n = u\left(e^{(n)}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est dans ℓ^1. En effet, en utilisant les notations de la question 2, chaque suite $x^{(k)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} x_n e^{(n)}$ est dans $\ell^{0,0}$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|u\left(x^{(k)}\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{k} x_n u\left(e^{(n)}\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{k} x_n \varphi_n\right| = \sum_{n=0}^{k} |\varphi_n|$$

avec $\left|u\left(x^{(k)}\right)\right| \leq N(u)\left\|x^{(k)}\right\|_{\infty} \leq N(u)$. Il en résulte que $\sum_{n=0}^{+\infty}|\varphi_n| < +\infty$, soit $\varphi \in \ell^1$. Écrivant toute suite $x \in \ell^{0,0}$ sous la forme $x = \sum_{n=0}^{m} x_n e^{(n)}$ où m est tel que $x_n = 0$ pour $n \geq m+1$, on a $u(x) = \sum_{n=0}^{k} x_n u\left(e^{(n)}\right) = \sum_{n=0}^{k} x_n \varphi_n = u_\varphi(x)$. Par densité de $\ell^{0,0}$ dans $\left(\ell^0, \|\cdot\|_\infty\right)$ et continuité de u, on en déduit que $u(x) = u_\varphi(x)$ pour tout $x \in \ell^0$. On a donc $u = u_\varphi$ sur ℓ^0. Réciproquement si $u = u_\varphi$ avec $\varphi \in \ell^1$, on a alors $\varphi_n = u\left(e^{(n)}\right) = u_\varphi\left(e^{(n)}\right) = \varphi_n$, ce qui assure l'unicité de φ. On a ainsi montré que l'application $\varphi \mapsto u_\varphi$ réalise une bijection isométrique de ℓ^1 sur l'espace des formes linéaires continues sur ℓ^0 (à savoir, le dual topologique de ℓ^0).

Exercice 17.4. *Opérateur de dérivation.*

On note D l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, où I un intervalle réel non réduit à un point, ou sur $\mathbb{R}[X]$.

1. *Montrer que l'opérateur de dérivation n'est pas continue sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ muni d'une quelconque norme $\|\cdot\|$.*
2. *Qu'en-est-il de l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$?*

Solution.

1. Désignant par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = e^{nx}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a $D(f_n) = n \cdot f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence, la suite $\left(\frac{1}{\|f_n\|} D(f_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (puisque $\left\|\frac{1}{\|f_n\|} D(f_n)\right\| = n$), il en résulte que D ne peut être continue.
2.
   (a) Munissant $\mathbb{R}[X]$ de la norme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, on a $\|X^n\|_1 = 1$ et $\|D(X^n)\|_1 = \left\|nX^{n-1}\right\|_1 = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite $(D(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée et D n'est pas continue pour cette norme.

   (b) Munissant $\mathbb{R}[X]$ de la norme $P \mapsto \|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\|P^{(k)}\right\|_1$ (cette somme est en fait finie), on a $\|D(P)\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\|P^{(k+1)}\right\|_1 \leq \|P\|$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, donc D est continue pour cette norme avec $N(D) \leq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\|(X^n)^{(k)}\right\|_1 = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ pour $0 \leq k \leq n$ et :

$$\frac{\|D(X^n)\|}{\|X^n\|} = \frac{n\left\|X^{n-1}\right\|}{\|X^n\|} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

ce qui implique que $N(D) \geq 1$ et $N(D) = 1$.

En fait, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}[X]$, l'application $P \mapsto \|P\|' = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left\|P^{(k)}\right\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et on a $\|D(P)\|' \leq \|P\|'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et D est continue pour cette norme $\|\cdot\|'$.

Exercice 17.5. *Norme d'une forme linéaire continue sur* $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$

L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1])$ *des fonctions continues sur* $[0,1]$ *à valeurs réelles est muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$. *On se donne une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de réels tous non nuls telle que la série* $\sum \alpha_n$ *soit absolument convergente et on lui associe la forme linéaire* ℓ *définie sur* $\mathcal{C}^0([0,1])$ *par* $\ell(f) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)\alpha_n$ *pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

1. *Monter que* ℓ *est bien définie et continue. Calculer sa norme d'opérateur.*
2. *La norme* $N(\ell)$ *est-elle atteinte ?*

Solution.

1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right)\alpha_n \right| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty$$

donc l'application ℓ est bien définie sur $\mathcal{C}^0([0,1])$. Il est clair que ℓ est linéaire. L'inégalité précédente nous dit aussi que $|\ell(f)| \leq \|f\|_\infty \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$, ce qui signifie que ℓ est continue avec $N(\ell) \leq S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions affines par morceaux et continues sur $[0,1]$ telle que $f_1(t) = \dfrac{|\alpha_1|}{\alpha_1}$ pour tout t dans $[0,1]$ et pour $n \geq 2$, f_n est affine sur chaque intervalle

$\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right], \cdots, \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f_n\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $f_n(t) = \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et :

$$\ell(f_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)\alpha_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{k}\right)\alpha_k = \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| + \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k$$

sachant que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| = S$ et $\left|\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k\right| \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|\alpha_k|$, avec $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, ce qui nous dit que $\lim_{n\to+\infty}\ell(f_n) = S$ et en conséquence, on a $S = \lim_{n\to+\infty}|\ell(f_n)| \leq N(\ell)$, soit au final $N(\ell) = \sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|$.

2. Si la borne supérieure $N(\ell)$ est atteinte sur la sphère unité, il existe alors une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\ell(f)| = N(\ell)$. En remplaçant au besoin f par $-f$, on peut supposer que $\ell(f) = N(\ell)$, ce qui nous donne :

$$0 = N(\ell) - \ell(f) = \sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|\left(1 - \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

les réels $\frac{\alpha_n}{|\alpha_n|}$ et $f\left(\frac{1}{n}\right)$ étant compris entre -1 et 1, donc les réels $1-\frac{\alpha_n}{|\alpha_n|}f\left(\frac{1}{n}\right)$ sont tous positifs ou nuls et l'égalité précédente impose que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$, la suite $\left(\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à valeurs dans $\{-1, 1\}$, ce qui impose l'existence d'un entier n_0 tel que α_n soit de signe constant pour tout $n \geq n_0$. Donc la norme $N(\ell)$ ne peut être atteinte pour une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang. C'est le cas par exemple pour une série alternée $\sum \alpha_n = \sum (-1)^n \beta_n$ absolument convergente. Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant à partir d'un rang $n_0 \geq 2$, disons positif, la fonction f affine sur chaque intervalle $\left[\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0-1}\right], \cdots, \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ avec $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$ pour $1 \leq k \leq n_0$ et $f(t) = 1$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{n_0}\right]$ est telle que $\|f\|_\infty = 1$ et :

$$\ell(f) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)\alpha_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{k}\right)\alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k = N(\ell)$$

Exercice 17.6. *Normes d'une forme linéaire continue sur* $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_p\right)$

$\mathcal{C}^0([0,1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On se donne une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1]) \setminus \{0\}$ et on lui associe la forme linéaire ℓ définie sur $\mathcal{C}^0([0,1])$ par $\ell(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

1. *Montrer que ℓ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ avec $N_\infty(\ell) = \|\varphi\|_1$. La norme $N_\infty(\ell)$ est-elle atteinte ?*
2. *Montrer que ℓ est continue pour $\|\cdot\|_1$ avec $N_1(\ell) = \|\varphi\|_\infty$.*
3. *Montrer que ℓ est continue pour $\|\cdot\|_2$ avec $N_2(\ell) = \|\varphi\|_2$.*
4. *On se donne un réel $p > 1$ et on suppose que la fonction φ est à valeurs positives. Montrer que ℓ est continue pour $\|\cdot\|_p$ avec $N_p(\ell) = \|\varphi\|_q$, où $q > 1$ est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

Solution.

1.

(a) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on a :

$$|\ell(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\right)\|f\|_\infty = \|\varphi\|_1 \|f\|_\infty$$

donc l'application linéaire ℓ est continue avec $N_\infty(\ell) \leq \|\varphi\|_1$. On utilise la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon_n}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a $|f_n(t)| = \dfrac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \varepsilon_n} < 1$, donc $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et :

$$\begin{aligned}\left||\ell(f_n)| - \|\varphi\|_1\right| = \left|\ell(f_n) - \|\varphi\|_1\right| &= \left|\int_0^1 \left(\frac{\varphi^2(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon_n} - |\varphi(t)|\right)dt\right| \\ &= \varepsilon_n \int_0^1 \frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \varepsilon_n}\,dt \leq \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |\ell(f_n)| = \|\varphi\|_1$ et avec $|\ell(f_n)| \leq N_\infty(\ell)\|f_n\|_\infty \leq N_\infty(\ell)$, on déduit que $\|\varphi\|_1 \leq N_\infty(\ell)$ et l'égalité $N_\infty(\ell) = \|\varphi\|_1$.

(b) Si la fonction φ est de signe constant, prenant $f = 1$ pour φ à valeurs positives, ou $f = -1$ pour φ à valeurs négatives, on a $\|f\|_\infty = 1$ et :

$$|\ell(f)| = \ell(f) = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt = N_\infty(\ell)$$

donc la borne supérieure $N_\infty(\ell)$ est atteinte. Si φ n'est pas de signe constant, cette borne supérieure n'est pas nécessairement atteinte. Considérons par exemple le cas d'une fonction φ telle que $\varphi(t) < 0$ pour tout $t \in [0, a[$, $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \in]a, 1]$, où $0 < a < 1$. S'il existe $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle $\|f\|_\infty = 1$ et $|\ell(f)| = \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $\ell(f) \geq 0$ et on a :

$$\ell(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt = \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt = \int_a^1 \varphi(t)\, dt - \int_0^a \varphi(t)\, dt$$

soit :

$$\int_\alpha^1 (1 - f(t))\varphi(t)\, dt = \int_0^a (1 + f(t))\varphi(t)\, dt$$

avec $\int_a^1 (1 - f(t))\varphi(t)\, dt \geq 0$ et $\int_0^a (1 + f(t))\varphi(t)\, dt \leq 0$ du fait que $-1 \leq f \leq 1$ sur $[0,1]$, donc :

$$\int_a^1 (1 - f(t))\varphi(t)\, dt = \int_0^a (1 + f(t))\varphi(t)\, dt = 0$$

ce qui équivaut à $(1 - f)\varphi = 0$ sur $]a, 1]$ et $(1 + f)\varphi = 0$ sur $[0, a[$, soit à $f = 1$ sur $]a, 1]$ et $f - 1$ sur $[0, a[$, ce qui est impossible pour f continue en a.

2. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on a :

$$|\ell(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |f(t)|\, dt = \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$$

donc ℓ est continue avec $N_1(\ell) \leq \|\varphi\|_\infty$. La fonction φ étant continue sur le segment $[0,1]$, est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $t_0 \in [0,1]$ tel que $|\varphi(t_0)| = \|\varphi\|_\infty$. Remplaçant éventuellement φ par $-\varphi$, on peut supposer que $\varphi(t_0) > 0$ (φ est supposée non nulle). En se donnant une suite de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, par continuité de φ en t_0, on peut trouver, pour tout entier naturel n, un réel $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a_n, b_n] = [0,1] \cap [t_0 - \eta_n, t_0 + \eta_n],\ \varphi(t) > 0 \text{ et } |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon_n$$

En désignant par $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction affine par morceaux, continue, nulle en dehors de $]a_n, b_n[$ et telle que $\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\, dt = 1$ (figure 17.1), on a :

$$||\ell(f_n)| - \|\varphi\|_\infty| = \left| \int_{a_n}^{b_n} f_n(t)(\varphi(t) - \varphi(t_0))\, dt \right| \leq \varepsilon_n \int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\, dt = \varepsilon_n$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\ell(f_n)| = \|\varphi\|_\infty$. Avec $|\ell(f_n)| \leq N_1(\ell)\|f_n\|_1 = N_1(\ell)$, on en déduit que $\|\varphi\|_\infty \leq N_1(\ell)$ et l'égalité $N_1(\ell) = \|\varphi\|_\infty$.

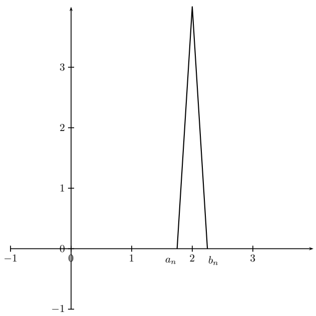

FIGURE 17.1 – graphe de f_n

3. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\ell(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| \leq \|\varphi\|_2 \|f\|_2$$

donc u_φ est continue avec $N_2(\ell) \leq \|\varphi\|_2$. Avec :

$$\ell(\varphi) = \int_0^1 \varphi^2(t)\,dt = \|\varphi\|_2^2 \leq N_2(\ell)\,\|\varphi\|_2$$

on déduit que $\|\varphi\|_2 \leq N_2(\ell)$ et l'égalité.

4. En utilisant l'inégalité de Hölder, on a pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$:

$$|\ell(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q$$

donc ℓ est continue avec $N_p(\ell) \leq \|\varphi\|_q$. Pour φ à valeurs positives, on a :

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_q^q &= \int_0^1 \varphi^q(t)\,dt = \int_0^1 (\varphi^q(t))^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,dt = \int_0^1 \varphi^{\frac{q}{p}}(t)\,\varphi(t)\,dt \\ &= \ell\left(\varphi^{\frac{q}{p}}\right) \leq N_p(\ell)\left\|\varphi^{\frac{q}{p}}\right\|_p\end{aligned}$$

avec $\left\|\varphi^{\frac{q}{p}}\right\|_p^p = \displaystyle\int_0^1 \varphi^q(t)\,dt = \|\varphi\|_q^q$, donc $\|\varphi\|_q^q \leq N_p(\ell)\left(\|\varphi\|_q\right)^{\frac{q}{p}}$ et :

$$\left(\|\varphi\|_q\right)^{q-\frac{q}{p}} = \left(\|\varphi\|_q\right)^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \|\varphi\|_q \leq N_p(\ell)$$

ce qui nous donne l'égalité.

Exercice 17.7. *Opérateur de Volterra sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.*

$\mathcal{C}^0([0,1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. À toute fonction continue $\varphi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle, on associe l'application V définie sur $\mathcal{C}^0([0,1])$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1]), \ \forall x \in [0,1], \ V(f)(x) = \int_0^x f(t)\varphi(x,t)\,dt$$

(opérateur de Volterra de noyau φ). Pour $\varphi = 1$, cet opérateur est l'opérateur de « primitivation » $V : f \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$.

1. *Montrer que V est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0,1])$, puis qu'il est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ avec $N_\infty(V) = \|\Phi\|_\infty$, où $\Phi \in \mathcal{C}^0([0,1])$ est définie par $\Phi(x) = \int_0^x |\varphi(x,t)|\,dt$.*
2. *Soit $\psi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :*

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \psi(x,t)\,dt\right)dx = \int_0^1 \left(\int_t^1 \psi(x,t)\,dx\right)dt$$

3. *En supposant que φ est à valeurs positives, montrer que V est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$ avec $N_1(V) = \|\Lambda\|_\infty$, où $\Lambda \in \mathcal{C}^0([0,1])$ est définie par $\Lambda(t) = \int_t^1 \varphi(x,t)\,dx$.*
4. *Montrer que V est continue pour la norme $\|\cdot\|_2$ avec $N_2(V) \leq \dfrac{\|\varphi\|_\infty}{\sqrt{2}}$, où $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{(x,t)\in[0,1]^2} |\varphi(x,t)|$.*
5. *Pour cette question, V est l'opérateur de primitivation, c'est-à-dire que la fonction φ est constante égale à 1. On désigne par φ la fonction définie sur $]0,1]$ par $\varphi(t) = \dfrac{\pi}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}(1-t)\right)$.*
   (a) *Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $g(0) = 0$, la fonction $\varphi \cdot g$ se prolonge par continuité en 0, puis que :*

$$\|g' - \varphi \cdot g\|_2^2 = \|g'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4}\|g\|_2^2$$

   En déduire que $\|g\|_2 \leq \dfrac{2}{\pi}\|g'\|_2$, l'égalité étant réalisée uniquement pour les fonctions $g : t \in [0,1] \mapsto \lambda \sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$, où λ est une constante réelle.
   (b) *Calculer $N_2(V)$.*

Solution.

1.

(a) Pour tout $x \in]0,1]$, en effectuant le changement de variable $t = \theta x$ avec $0 \leq \theta \leq 1$, on a $V(f)(x) = x \displaystyle\int_0^1 f(\theta x)\varphi(x,\theta x)\,d\theta$, ce résultat étant encore valable pour $x = 0$. La fonction $(\theta, x) \mapsto f(\theta x)\varphi(x,\theta x)$ est continue sur $[0,1]^2$ et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction $V(f)$ est continue sur $[0,1]$, c'est-à-dire que $V(f) \in \mathcal{C}^0([0,1])$. De la linéarité de l'intégrale, on déduit que V est linéaire.

(b) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}|V(f)(x)| &= \left|\int_0^x f(t)\varphi(x,t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^x |\varphi(x,t)|\,dt\right)\|f\|_\infty = \Phi(x)\|f\|_\infty \\ &\leq \|\Phi\|_\infty \|f\|_\infty\end{aligned}$$

donc V est continue avec $N_\infty(V) \leq \|\Phi\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]}\int_0^x |\varphi(x,t)|\,dt$. La fonction Φ étant continue sur le segment $[0,1]$ (mêmes arguments que pour $V(f)$) est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $\|\Phi\|_\infty = \Phi(x_0)$. Dans le cas où la fonction $\varphi(x_0,\cdot)$ ne s'annule jamais sur $[0,1]$, en désignant par f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \dfrac{\varphi(x_0,t)}{|\varphi(x_0,t)|}$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et :

$$V(f)(x_0) = \int_0^{x_0} |\varphi(x_0,t)|\,dt = \|\Phi\|_\infty \leq \|V(f)\|_\infty \leq N_\infty(V) \leq \|\Phi\|_\infty$$

ce qui nous donne l'égalité $N_\infty(V) = \|\Phi\|_\infty$. Dans le cas où la fonction $\varphi(x_0,\cdot)$ s'annule sur $[0,1]$, on utilise la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\varphi(x_0,t)}{|\varphi(x_0,t)| + \varepsilon_n}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a $|f_n(t)| = \dfrac{|\varphi(x_0,t)|}{|\varphi(x_0,t)| + \varepsilon_n} < 1$, donc $\|f_n\|_\infty \leq 1$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}|f_n(t)\varphi(x_0,t) - |\varphi(x_0,t)|| &= \left|\frac{\varphi^2(x_0,t)}{|\varphi(x_0,t)| + \varepsilon_n} - |\varphi(x_0,t)|\right| \\ &= \frac{\varepsilon_n|\varphi(x_0,t)|}{|\varphi(x_0,t)| + \varepsilon_n} < \varepsilon_n\end{aligned}$$

donc la suite de fonctions $(f_n \cdot \varphi(x_0,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $|\varphi(x_0,\cdot)|$ et en conséquence :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} |V(f_n)(x_0)| = \lim_{n\to+\infty} V(f_n)(x_0) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{x_0} f_n(t)\,\varphi(x_0,t)\,dt \\ &= \int_0^{x_0} |\varphi(x_0,t)|\,dt = \|\Phi\|_\infty\end{aligned}$$

avec $|V(f_n)(x_0)| \leq \|V(f_n)\|_\infty \leq N_\infty(V)$. On a donc $\|\Phi\|_\infty \leq N_\infty(V)$ et l'égalité $N_\infty(V) = \|\Phi\|_\infty$. Par exemple, pour l'opérateur de primitivation $V : f \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, cela donne $N_\infty(V) = 1$, ce qui peut se voir directement en vérifiant que $V(1) = 1$.

2. En notant $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'une partie A de $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \psi(x,t)\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi(x,t)\,\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,dt\right) dx$$

avec $\mathbf{1}_{[0,x]}(t) = \mathbf{1}_{[t,1]}(x)$ pour tous x,t dans $[0,1]$ (pour $0 \leq t \leq x \leq 1$, on a $\mathbf{1}_{[0,x]}(t) = 1 = \mathbf{1}_{[t,1]}(x)$ et pour $0 \leq x < t \leq 1$, on a $\mathbf{1}_{[0,x]}(t) = 0 = \mathbf{1}_{[t,1]}(x)$), ce qui nous donne en utilisant le théorème de Fubini sur un carré :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^x \psi(x,t)\,dt\right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi(x,t)\,\mathbf{1}_{[t,1]}(x)\,dt\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \psi(x,t)\,\mathbf{1}_{[t,1]}(x)\,dx\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_t^1 \psi(x,t)\,dx\right) dt\end{aligned}$$

3.

(a) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on a :

$$\|V(f)\|_1 = \int_0^1 |V(f)(x)|\,dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,|\varphi(x,t)|\,dt\right) dx$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,|\varphi(x,t)|\,dt\right) dx &= \int_0^1 \left(\int_t^1 |\varphi(x,t)|\,dx\right) |f(t)|\,dt \\ &= \int_0^1 \Lambda(t)\,|f(t)|\,dt \leq \|\Lambda\|_\infty \|f\|_1\end{aligned}$$

donc V est continue pour $\|\cdot\|_1$ avec $N_1(V) \leq \|\Lambda\|_\infty = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} \int_t^1 |\varphi(x,t)|\,dx$.

(b) Pour φ à valeurs positives, on a $\Lambda(t) = \displaystyle\int_t^1 \varphi(x,t)\,dx$ pour tout $t \in [0,1]$. La fonction Λ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $t_0 \in [0,1]$ tel que $\|\Lambda\|_\infty = \Lambda(t_0)$. Comme φ est non identiquement nulle, on a $\Lambda(t_0) > 0$. En se donnant une suite de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, par continuité de Λ en t_0, on peut trouver, pour tout entier naturel n, un réel $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a_n, b_n] = [0,1] \cap [t_0 - \eta_n, t_0 + \eta_n], \ \Lambda(t) > 0 \text{ et } |\Lambda(t) - \Lambda(t_0)| < \varepsilon_n$$

En désignant par $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction affine par morceaux et continue qui est nulle en dehors de $]a_n, b_n[$ et telle que :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\,dt = 1$$

on a :

$$\begin{aligned}\|V(f_n)\|_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^x f_n(t)\,\varphi(x,t)\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_t^1 \varphi(x,t)\,dx\right) f_n(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \Lambda(t)\,f_n(t)\,dt = \int_{a_n}^{b_n} \Lambda(t)\,f_n(t)\,dt\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\|V(f_n)\|_1 - \Lambda(t_0) &= \int_{a_n}^{b_n} \Lambda(t)\,f_n(t)\,dt - \Lambda(t_0)\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\,dt \\ &= \int_{a_n}^{b_n} (\Lambda(t) - \Lambda(t_0))\,f_n(t)\,dt\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\left|\|V(f_n)\|_1 - \Lambda(t_0)\right| \leq \int_{a_n}^{b_n} |\Lambda(t) - \Lambda(t_0)|\,f_n(t)\,dt \leq \varepsilon_n \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx = \varepsilon_n$$

et en conséquence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|V(f_n)\|_1 = \Lambda(t_0) = \|\Lambda\|_\infty$. Enfin avec $\|V(f_n)\|_1 \leq N_1(V)\,\|f_n\|_1 = N_1(V)$, on en déduit que $\|\Lambda\|_\infty \leq N_1(V)$ et :

$$N_1(V) = \|\Lambda\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \int_t^1 \varphi(x,t)\,dx$$

Pour l'opérateur de primitivation, cela donne $N_1(V) = 1$, ce qui peut se montrer en utilisant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où f_n est affine par morceaux et continue, valant $2n$ en 0 et nulle sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ (soit $f_n(t) = \left(-2n^2x + 2n\right)\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},1\right]}(t)$, ce qui peut se dessiner). On a $\|f_n\|_1 = 1$ et :

$$\begin{aligned}\|V(f_n)\|_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^x f_n(t)\,dt\right) dx \\ &\geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^x f_n(t)\,dt\right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt\right) dx = 1 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|V(f_n)\|_1 = 1$ et $N_1(V) = 1$.

4. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on a $\displaystyle\int_0^1 (V(f)(x))^2\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \varphi(x,t) f(t)\,dt\right)^2 dx$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[0,x]$, à x fixé dans $]0,1]$, on a :

$$\left(\int_0^x \varphi(x,t) f(t)\,dt\right)^2 \leq \int_0^x (\varphi(x,t))^2\,dt \int_0^x f^2(t)\,dt \leq \int_0^x (\varphi(x,t))^2\,dt\,\|f\|_2^2$$

cette inégalité étant encore vraie pour $x=0$, donc :

$$\|V(f)\|_2^2 \leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x (\varphi(x,t))^2\,dt\right) dx\right) \|f\|_2^2$$

et on en déduit que V est continue avec

$$(N_2(V))^2 \leq \int_0^1 \left(\int_0^x (\varphi(x,t))^2\,dt\right) dx \leq \|\varphi\|_\infty^2 \int_0^1 \left(\int_0^x dt\right) dx = \frac{\|\varphi\|_\infty^2}{2}$$

5.

(a) Comme $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ avec $g(0)=0$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) g(t) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2}t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right) \frac{g(t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \frac{g(t)}{t} = g'(0)\end{aligned}$$

donc $\varphi\cdot g$ se prolonge par continuité en 0 en posant $(\varphi\cdot g)(0) = g'(0)$.
On a :

$$\begin{aligned}\|g' - \varphi\cdot g\|_2^2 &= \int_0^1 (g'(t) - \varphi(t)\cdot g(t))^2\,dt \\ &= \|g'\|_2^2 + \int_0^1 \left(\varphi^2(t) g^2(t) - 2\varphi(t) g(t) g'(t)\right) dt\end{aligned}$$

avec $\varphi' = -\dfrac{\pi^2}{4} - \varphi^2$ et :

$$\varphi^2 g^2 - 2\varphi\cdot g\cdot g' = -\left(\frac{\pi^2}{4} + \varphi'\right) g^2 - 2\varphi\cdot gg' = -\frac{\pi^2}{4^2} g^2 - \left(\varphi g^2\right)'$$

sur $]0,1]$, ce qui nous donne pour $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \left(\varphi^2(t) g^2(t) - 2\varphi(t) g(t) g'(t)\right) dt &= -\frac{\pi^2}{4}\int_\varepsilon^1 g^2(t)\,dt - \int_\varepsilon^1 \left(\varphi g^2\right)'(t)\,dt \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\int_\varepsilon^1 g^2(t)\,dt + \varphi(\varepsilon) g^2(\varepsilon)\end{aligned}$$

et faisant tendre ε vers 0^+, on aboutit à :

$$\|g' - \varphi\cdot g\|_2^2 = \|g'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4}\|g\|_2^2 + g'(0) g(0) = \|g'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4}\|g\|_2^2$$

ce qui implique que $\|g\|_2 \leq \dfrac{2}{\pi}\|g'\|_2$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, on a $g' = \varphi \cdot g$, ce qui équivaut à $g(t) = \lambda e^{\Phi(t)}$ pour tout $t \in]0,1]$, où Φ est la primitive de φ nulle en 1, soit :

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= -\int_t^1 \varphi(x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\int_t^1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}dx \\ &= \left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)\right)\right]_t^1 = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)\right) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\end{aligned}$$

On a donc $g(t) = \lambda\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ pour tout $t \in]0,1]$, cette égalité étant également assurée en 0 par continuité.

(b) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, la fonction $V(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $(V(f))' = f$ et $V(f)(0) = 0$. On déduit alors de la question précédente que :

$$\|V(f)\|_2 \leq \frac{2}{\pi}\left\|(V(f))'\right\|_2 = \frac{2}{\pi}\|f\|_2$$

ce qui nous dit que $\|T\|_2 \leq \dfrac{2(b-a)}{\pi}$. Pour $f(t) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$, on a $V(f)(t) = \dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ et $\|V(f)\|_2 = \dfrac{2}{\pi}\|f\|_2$, donc $\|V\|_2 = \dfrac{2}{\pi}$.

Exercice 17.8. *Opérateur de Hardy sur* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes. À toute fonction f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on associe la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. On note H l'application qui associe g à f (opérateur de Hardy).

1. *Montrer que H est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
2. *Montrer que l'opérateur H est injectif.*
3. *Montrer que l'ensemble des valeurs propres de H est contenu dans le disque fermé de centre $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.*
4. *On note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ formé des fonctions continues et bornées. Montrer que $\mathcal{F}$ est stable par H et que la restriction de H à $\mathcal{F}$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ avec $N_\infty\left(H_{|\mathcal{F}}\right) = 1$.*
   Pour la suite de cet exercice, on note $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ formé des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx < +\infty$. Il est connu que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un espace vectoriel et que l'application $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}dx$ est un produit scalaire hermitien sur cet espace. La norme associée est notée $\|\cdot\|_2$.

5. *Soient $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $g = H(f)$. Montrer que pour tous réels $a < 0 < b$, on a :*

$$\int_a^b |g(x)|^2\, dx = a\,|g(a)|^2 - b\,|g(b)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\overline{g}(x)\, dx\right)$$

(on peut écrire que :

$$\int_a^b |g(x)|^2\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{-\varepsilon} |g(x)|^2\, dx + \int_\varepsilon^b |g(x)|^2\, dx\right)$$

et intégrer par parties).

6. *Déduire de la question précédente que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est stable par H, puis que pour tout $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $\|H(f)\|_2^2 = 2\,\mathrm{Re}(\langle H(f) \mid f\rangle)$.*
7. *Montrer que la restriction de H à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_2$ avec $N_2\left(H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}\right) = 2$ (on peut utiliser la famille de fonctions $(f_r)_{r\in\left]\frac{1}{2},1\right[}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_r(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$ et $f_r(t) = \dfrac{1}{|t|^r}$ pour $|t| > 1$).*
8. *La borne supérieure $N_2\left(H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}\right)$ est-elle atteinte ?*

Solution.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^1 f(\theta x)\, d\theta$, ce résultat étant encore valable pour $x = 0$. La fonction $(\theta, x) \mapsto f(\theta x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $H(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. La linéarité de H se déduit de celle de l'intégrale.
2. Si $g = H(f) = 0$, on a alors $f(0) = g(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = xg(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, ce qui implique par dérivation que $f(x) = 0$. On a donc $\ker(H) = \{0\}$ et H est injectif.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de H et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Comme H est injectif, λ est non nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\lambda f(x) = H(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$$

ce qui implique que f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et solution de l'équation différentielle $\lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x)$, soit $f'(x) = \left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)\dfrac{1}{x} f(x)$, ce qui revient à dire qu'il existe deux nombres complexes μ_1 et μ_2 non tous deux nuls tels que $f(x) = \mu_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $f(x) = \mu_2(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{-,*}$. Comme f est continue en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Si μ_1 [resp. μ_2] est non nul, cela implique que $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right| = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-1} = \dfrac{|f(0)|}{|\mu_1|}$

[resp. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left|(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1}\right| = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x)^{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-1} = \dfrac{|f(0)|}{|\mu_2|}$] et on a nécessairement $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \geq 1$. Notant $\lambda = a+ib$, on a $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ et la condition $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \geq 1$ équivaut à $a^2+b^2 \leq a$, encore équivalent à $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2 + b^2 \leq \dfrac{1}{4}$. Donc l'ensemble des valeurs propres de H est contenu dans le disque fermé de centre $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

4. Pour tous $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $|H(f)(x)| = \left|\int_0^1 f(\theta x)\, d\theta\right| \leq \|f\|_\infty$, donc $H(f) \in \mathcal{F}$ et $H_{|\mathcal{F}}$ est continue avec $N_\infty\left(H_{|\mathcal{F}}\right) \leq 1$, cette borne supérieure étant atteinte pour $f = 1 \in \mathcal{F}$, donc $N_\infty\left(H_{|\mathcal{F}}\right) = 1$.

5. En désignant par $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt = xg(x)$ la primitive de f nulle en 0, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b |g(x)|^2\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{-\varepsilon} |g(x)|^2\, dx + \int_\varepsilon^b |g(x)|^2\, dx\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} F(x)\, \overline{F}(x)\, dx + \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^2} F(x)\, \overline{F}(x)\, dx\right)\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon \in \left]0, \min(-a,b)\right[$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^b \frac{1}{x^2} F(x)\, \overline{F}(x)\, dx &= \left[-\frac{1}{x} F(x)\, \overline{F}(x)\right]_\varepsilon^b + \int_\varepsilon^b \frac{1}{x} \left(F'(x)\, \overline{F}(x) + F(x)\, \overline{F'}(x)\right) dx\\ &= \left[-x\, |g(x)|^2\right]_\varepsilon^b + \int_\varepsilon^b \left(f(x)\, \overline{g}(x) + g(x)\, \overline{f}(x)\right) dx\\ &= \varepsilon\, |g(\varepsilon)|^2 - b\, |g(b)|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\int_\varepsilon^b f(x)\, \overline{g}(x)\, dx\right)\end{aligned}$$

et :

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} F(x)\, \overline{F}(x)\, dx = \varepsilon\, |g(-\varepsilon)|^2 + a\, |g(a)|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\int_a^{-\varepsilon} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx\right)$$

En faisant tendre ε vers 0^+, on en déduit que :

$$\int_a^b |g(x)|^2\, dx = a\, |g(a)|^2 - b\, |g(b)|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(x)\, \overline{g}(x)\, dx\right) \qquad (17.2)$$

6. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ pour $a<0<b$, on a avec les notations de la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_a^b |g(x)|^2\,dx &= a\,|g(a)|^2 - b\,|g(b)|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\overline{g}(x)\,dx\right)\\ &\leq 2\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\overline{g}(x)\,dx\right) \leq 2\left|\int_a^b f(x)\,\overline{g}(x)\,dx\right|\\ &\leq 2\left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\int_b^b |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\,\|f\|_2\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

soit $\displaystyle\int_a^b |g(x)|^2\,dx \leq 4\,\|f\|_2^2$, ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,dx$ avec $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,dx \leq 4\,\|f\|_2^2$. En conclusion, la fonction g est dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est stable par H. Faisant tendre (a,b) vers $(-\infty,+\infty)$ dans (17.2), on obtient l'égalité $\|H(f)\|_2^2 = 2\operatorname{Re}(\langle H(f)\mid f\rangle)$.

7. Pour toute fonction $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a :

$$\|H(f)\|_2^2 = 2\operatorname{Re}(\langle H(f)\mid f\rangle) \leq 2\,|\langle H(f)\mid f\rangle| \leq 2\,\|H(f)\|_2\,\|f\|_2$$

soit $\|H(f)\|_2 \leq 2\,\|H(f)\|_2$, donc $H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}$ est continue et $N_2\left(H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}\right) \leq 2$.
Pour tout réel $r\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$, on désigne par f_r la fonction définie par :

$$f_r(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t\in[-1,1] \\ \dfrac{1}{|t|^r} \text{ si } |t|>1 \end{cases}$$

Ces fonctions f_r sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, avec $\|f_r\|_2^2 = 2\left(1+\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2r}}\right) = \dfrac{4r}{2r-1}$.
Comme f_r est paire, on a pour $x\neq 0$:

$$\begin{aligned} H(f_r)(-x) &= -\frac{1}{x}\int_0^{-x} f_r(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x f_r(-u)\,du\\ &= \frac{1}{x}\int_0^x f_r(u)\,du = H(f_r)(x)\end{aligned}$$

et $H(f_r)$ est aussi paire. Pour $x>0$, on a :

$$H(f_r)(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x\in[0,1] \\ \dfrac{1}{x}\left(1+\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t^r}\right) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1-r}\left(x^{1-r}-r\right) \text{ si } x>1 \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned}\|H(f_r)\|_2^2 &= 2+\frac{2}{(1-r)^2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^r}-\frac{r}{x}\right)^2 dx\\ &= 2+\frac{2}{(1-r)^2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^{2r}}-2\frac{r}{x^{r+1}}+\frac{r^2}{x^2}\right) dx\\ &= 2+\frac{2}{(1-r)^2}\left(\frac{1}{2r-1}-\frac{2}{r}+r^2\right)\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\|H(f_r)\|_2^2}{\|f_r\|_2^2}=\frac{2+\frac{2}{(1-r)^2}\left(\frac{1}{2r-1}-\frac{2}{r}+r^2\right)}{\frac{4r}{2r-1}}=\frac{-2r^3+r^2-r+1}{r^2(1-r)}$$

et $\lim\limits_{r\to\frac{1}{2}}\dfrac{\|H(f_r)\|_2}{\|f_r\|_2}=2$. Avec $\dfrac{\|H(f_r)\|_2}{\|f_r\|_2}\leq N_2\left(H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}\right)$ pour tout $r\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$, il en résulte que $N_2\left(H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}\right)\geq 2$ et $N_2\left(H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}\right)=2$.

8. S'il existe $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\|f\|_2=1$ et $\|H(f)\|_2=2$, on a alors :

$$\begin{aligned}4=\|H(f)\|_2^2 &= 2\operatorname{Re}(\langle H(f)\mid f\rangle)\leq 2\left|\operatorname{Re}(\langle H(f)\mid f\rangle)\right|\\ &\leq 2\left|\langle H(f)\mid f\rangle\right|\leq 2\|H(f)\|_2\|f\|_2=4\end{aligned}$$

soit l'égalité $|\langle H(f)\mid f\rangle|=\|H(f)\|_2\|f\|_2$, ce qui équivaut à dire qu'il existe un nombre complexe λ tel que $H(f)=\lambda f$ (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). On a alors $|\lambda|^2=\|\lambda f\|_2^2=\|H(f)\|_2^2=4$ et $|\lambda|=2$, ce qui n'est pas possible d'après la question 3. En conclusion, la borne supérieure $N_2\left(H_{|\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}\right)$ n'est pas atteinte.

Chapitre 18

Exemples d'équations fonctionnelles

Exercice 18.1. *Équations fonctionnelles transformées en équations différentielles*

On s'intéresse ici à diverses équations fonctionnelles portant sur une fonction f continue. En introduisant une primitive judicieusement choisie, on vérifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis par dérivation par rapport à une variable de l'équation fonctionnelle on se ramène à une équation différentielle.
Utiliser le procédé suggéré en introduction pour résoudre les équations fonctionnelles qui suivent où f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$;
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) f(y)$;
4. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2,\ f(xy) = f(x) f(y)$;
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y)$.

Solution. On désigne par $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ [resp. $G : x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$] la primitive de f nulle en 0 [resp. en 1].

1. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :
$$\int_y^{x+y} f(z)\,dz = \int_0^x f(t+y)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + xf(y)$$
soit $F(x+y) - F(y) = F(x) + xf(y)$, ce qui nous donne pour $x = 1$:
$$F(y+1) - F(y) = F(1) + f(y)$$
Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 0$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :
$$f'(x+y) = f'(y) \text{ et } f'(x) = f'(0) = \alpha$$
donc $f(x) = \alpha x + \beta$ avec $\beta = f(0) = 0$ (déduit de $f(0) = 2f(0)$).

2. Pour $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé, on a par intégration, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\int_{y}^{xy} f(z)\,dz = y\int_{1}^{x} f(ty)\,dt = y\left(\int_{1}^{x} f(t)\,dt + (x-1)\,f(y)\right)$$

soit $G(xy) - G(y) = y\,(G(x) + (x-1)\,f(y))\,,$ ce qui nous donne pour $x = 2$:

$$G(2y) - G(y) = y\,(G(2) + f(y))$$

Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 1$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$xf'(xy) = f'(y) \text{ et } xf'(x) = f'(1) = \alpha$$

donc $f(x) = \alpha \ln(x) + \beta$ avec $\beta = f(1) = 0$ (déduit de $f(1) = 2f(1)$).

3. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\int_{y}^{x+y} f(z)\,dz = \int_{0}^{x} f(t+y)\,dt = f(y)\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

soit $F(x+y) - F(y) = f(y)\,F(x)\,.$ Si $F = 0$, on a alors $f = F' = 0$.
Si $F \neq 0$, il existe alors x_0 tel que $F(x_0) \neq 0$ et de $f(y) = \dfrac{F(x_0+y) - F(y)}{F(x_0)}$, on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 0$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$f'(x+y) = f(x)\,f'(y) \text{ et } f'(x) = f'(0)\,f(x) = \alpha f(x)$$

donc $f(x) = e^{\alpha x}$.

4. Pour $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\int_{y}^{xy} f(z)\,dz = y\int_{1}^{x} f(ty)\,dt = yf(y)\int_{1}^{x} f(t)\,dt$$

soit $G(xy) - G(y) = yf(y)\,G(x)\,.$ Si $G = 0$, on a alors $f = G' = 0$. Si $G \neq 0$, il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $G(x_0) \neq 0$ et de $f(y) = \dfrac{G(x_0y) - G(y)}{yG(x_0)}$, on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 1$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$xf'(xy) = f(x)\,f'(y) \text{ et } xf'(x) = f'(1)\,f(x) = \alpha f(x)$$

donc $f(x) = \beta x^{\alpha}$ avec $\beta = f(1) = 1$ (déduit de $f(1) = (f(1))^2$ avec $f(1) \neq 0$ pour f non nulle).

5. On cherche une solution non nulle f. L'équation fonctionnelle appliquée au couple $(x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$ donne $f(x) = f(x)\,f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $f(0) = 1$ puisque f n'est pas identiquement nulle. Cette équation appliquée au couple $(0, y)$ pour $y \in \mathbb{R}$ donne $f(y) + f(-y) = 2f(y)\,,$ soit

$f(-y) = f(y)$, la fonction f est donc paire. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\int_{y}^{x+y} f(z)\,dz + \int_{-y}^{x-y} f(z)\,dz &= \int_0^x f(t+y)\,dt + \int_0^x f(t-y)\,dt \\ &= 2f(y)\int_0^x f(t)\,dt\end{aligned}$$

soit $F(x+y) - F(y) + F(x-y) - F(-y) = 2f(y)F(x)$. Si $F = 0$, on a alors $f = F' = 0$. Si $F \neq 0$, il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F(x_0) \neq 0$ et on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Puis avec :

$$\begin{aligned}2f'(y)F(x_0) &= F'(x_0+y) - F'(y) - F'(x_0-y) + F'(-y) \\ = f(x_0+y) - f(y) - f(x_0-y) + f(-y) &= f(x_0+y) - f(x_0-y)\end{aligned}$$

on déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Dérivant deux fois l'équation fonctionnelle par rapport à x, pour y fixé, on a $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$ et pour $x = 0$, en tenant compte de la parité de f, on a $f''(y) = f''(0)f(y)$ avec $f(0) = 1$. D'autre part, en dérivant par rapport à y et en faisant $y = 0$, on obtient $2f(x)f'(0) = 0$ pour tout réel x, ce qui entraîne $f'(0) = 0$ puisque f n'est pas la fonction nulle. En définitive, f est solution de $f'' = f''(0)f$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, ce qui équivaut à $f(x) = \cos(\lambda x)$ pour $f''(0) = -\lambda^2 \leq 0$ ou $f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$ pour $f''(0) = \lambda^2 \geq 0$.

Exercice 18.2. *Équation fonctionnelle de Cauchy*

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, il s'agit de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y dans $\mathbb{K}^2$.

1. *Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.*
2. *Déterminer tous les morphismes de groupes monotones de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.*
3. *Quelques applications de la question précédente.*
   (a) *Montrer que l'identité est le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui même.*
   (b) *Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone telle que :*
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$
   (équation de Jensen), elle est alors affine.
   (c) *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(1) = 1$, $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
4. *Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui même qui est borné sur un intervalle $[a,b]$ où $a < b$. Montrer que f est bornée sur $[0, b-a]$ et continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Conclure.*

Solution.

1. Un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ est une application $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall (r,s)\in\mathbb{Q}^2,\quad f(r+s)=f(x)+f(y) \tag{18.1}$$
Prenant $(r,s)=(0,0)$, on obtient $f(0)=2f(0)$, ce qui équivaut à $f(0)=0$ (un morphisme de groupes transforme le neutre en neutre). Prenant $(r,s)=(r,-r)$, on obtient $f(r)+f(-r)=0$. On a donc $f(-r)=-f(r)$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$ (un morphisme de groupes transforme l'opposé en opposé). De (18.1) on déduit que pour tout $s\in\mathbb{Q}$, on a $f(ns)=nf(s)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En effet, le résultat est vrai pour $n=0$ et le supposant vrai pour $n\geq 0$, on a :
$$f((n+1)s)=f(ns)+f(s)=nf(s)+f(s)=(n+1)f(s)$$
il est donc vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$. En écrivant que $f(s)=f\left(n\frac{s}{n}\right)=nf\left(\frac{s}{n}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on déduit que $f\left(\frac{s}{n}\right)=\frac{1}{n}f(s)$ pour tout $s\in\mathbb{Q}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$. Il en résulte que pour tout rationnel s et tout rationnel positif $r=\frac{p}{q}$, avec $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$f(rs)=f\left(p\frac{s}{q}\right)=pf\left(\frac{s}{q}\right)=\frac{p}{q}f(s)=rf(s)$$
Enfin avec l'imparité de f, on déduit que ce dernier résultat est encore vrai pour les rationnels négatifs. On a donc $f(rs)=rf(s)$ pour tout $(r,s)\in\mathbb{Q}^2$. En prenant $s=1$ et en notant $\lambda=f(1)$, on a $f(r)=\lambda r$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$. Réciproquement de telles applications sont des morphismes de groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$. En considérant $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, nous avons montré que tout morphisme du groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ est une application $\mathbb{Q}$-linéaire.
2. Si f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$, c'est aussi un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ et on a $f(r)=\lambda r$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$, où $\lambda=f(1)$. Si de plus f est croissante, on a alors $\lambda=f(1)\geq f(0)=0$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on désigne par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'approximations décimales de x par défaut et par excès. De telles suites peuvent être définies par $r_n=\frac{[10^n x]}{10^n}$ et $s_n=r_n+\frac{1}{10^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et on a :
$$\lambda r_n=f(r_n)\leq f(x)\leq f(s_n)=\lambda s_n$$
puis faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $f(x)=\lambda x$. On procède de manière analogue pour f décroissante.
3.
   (a) Si f est morphisme du corps $\mathbb{R}$ dans lui même, on a alors $f(1)=1$ et $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(xy)=f(x)f(y)$ pour tous x,y dans $\mathbb{R}$. Avec $f\left(x^2\right)=(f(x))^2\geq 0$, on déduit que $f(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 0$ et pour $x\geq y$ dans $\mathbb{R}$, on a $f(x)-f(y)=f(x-y)\geq 0$, ce qui signifie que f est croissante. On déduit alors de la question précédente que $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ ($\lambda=f(1)=1$).

(b) La relation $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ appliquée au couple $(2x,0)$ pour $x\in\mathbb{R}$ donne $f(x)=\frac{f(2x)+f(0)}{2}$, ou encore $f(2x)=2f(x)-f(0)$. En notant g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-f(0)$, on a pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x+y)=f\left(\frac{2x+2y}{2}\right)-f(0)=\frac{f(2x)+f(2y)}{2}-f(0)=\frac{g(2x)+g(2y)}{2}$$

et pour $x\in\mathbb{R}$ on a $g(2x)=f(2x)-f(0)=2(f(x)-f(0))=2g(x)$. On a donc $g(x+y)=g(x)+g(y)$. Si f est monotone, il en est alors de même de g, donc $g(x)=ax$ et $f(x)=ax+b$ avec $b=f(0)$.

(c) Avec $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on déduit que f est impaire (donc $f(0)=0$) et avec $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ que $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)=f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{1}{f(x(1-x))}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(1-x)}=\frac{f(x)+f(1-x)}{f(x)f(1-x)}=\frac{1}{f(x)f(1-x)}$$

ou encore :

$$f(x)-f\left(x^2\right)=f\left(x-x^2\right)=f(x)f(1-x)=f(x)(1-f(x))$$

soit $f\left(x^2\right)=(f(x))^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Ce résultat étant encore vrai pour $x=0$ et $x=1$, on en déduit que $f(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}$ et pour $x\geq y$ on a alors $f(x)-f(y)=f(x-y)\geq 0$, ce qui signifie que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que $f(x)=f(1)x=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

4.

(a) Soient $m\leq M$ deux réels tels que $m\leq f(x)\leq M$ pour tout $x\in[a,b]$. Pour tout $x\in[0,b-a]$, on a $x+a\in[a,b]$, donc :

$$m\leq f(x+a)=f(x)+f(a)\leq M$$

soit $m-f(a)\leq f(x)\leq M-f(a)$ pour tout $x\in[0,b-a]$.

(b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left[0,\frac{b-a}{n}\right]$, on a $nx\in[0,b-a]$, de sorte que :

$$m'=m-f(a)\leq f(nx)=nf(x)\leq M'=M-f(a)$$

et $\frac{m'}{n}\leq f(x)\leq\frac{M'}{n}$. Pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier $n\geq 1$ tel que $\left[\frac{m'}{n},\frac{M'}{n}\right]$ soit contenu dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$, donc pour tout $x\in\left[0,\frac{b-a}{n}\right]$, on a $-\varepsilon<f(x)<\varepsilon$. La fonction f est donc continue à droite en 0.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a $f(x+h) = f(x) + f(h)$ et avec la continuité à droite en 0 de f, on déduit que $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x+h) = f(x)$, ce qui signifie que f est continue à droite en x.

(d) En notant $\lambda = f(1)$, on sait déjà que $f(r) = \lambda r$ pour tout nombre rationnel r. Comme f est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$, en désignant par $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'approximations décimales par excès de x, on a :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(s_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda s_n = \lambda x$$

Exercice 18.3. *Caractérisation des fonctions* cos *et* ch *par l'équation fonctionnelle* $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

On se donne une fonction continue non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui vérifie l'équation fonctionnelle* $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

1. *Montrer que* $f(0) = 1$ *et que* f *est paire.*
2. *Justifier l'existence d'un réel strictement positif* $\alpha 0$ *tel que* $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in [-\alpha, \alpha]$.
3. *On suppose que* $f(\alpha) \in \left]0,1\right]$ *et* $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *est défini par* $f(\alpha) = \cos(\theta)$.
   (a) *Montrer que* $f\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   (b) *Montrer que, pour tout* n *fixé dans* $\mathbb{N}$, *on a :*
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(p\frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right)$$
   (c) *En déduire qu'il existe un réel* $\lambda > 0$ *tel que* $f(x) = \cos(\lambda x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
4. *Dans le cas où* $|f(\alpha)| > 1$, *montrer qu'il existe un réel* $\lambda > 0$ *tel que* $f(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$.

Solution.

1. L'équation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ appliquée au couple $(x,0)$ pour $x \in \mathbb{R}$ donne $f(x) = f(x)f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $f(0) = 1$ puisque f n'est pas identiquement nulle. Cette équation appliquée au couple $(0,y)$ pour $y \in \mathbb{R}$ donne $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, soit $f(-y) = f(y)$, la fonction f est donc paire.
2. Avec la continuité en 0 et $f(0) = 1$ on déduit qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$.
3.
   (a) Le résultat est vrai pour $n = 0$ par définition de θ et le supposant vrai pour $n \geq 0$, en appliquant l'équation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

au couple $\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}, \frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$, on obtient :

$$f^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)+1}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)+1}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

ce qui entraîne $f\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ du fait de la positivité de f sur $[0,\alpha]$ et de cos sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Le résultat est vrai pour $p = 0$, $p = 1$ et le supposant vrai pour $p \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} f\left((p+1)\frac{\alpha}{2^n}\right) &= 2f\left(p\frac{\alpha}{2^n}\right)f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - f\left((p-1)\frac{\alpha}{2^n}\right) \\ &= 2\cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cos\left((p-1)\frac{\theta}{2^n}\right) \\ &= \cos\left((p+1)\frac{\theta}{2^n}\right) \end{aligned}$$

(c) Avec $f(0) = \cos(0) = 1$ et la parité des fonctions f et cos il nous suffit de montrer le résultat pour $x > 0$. Pour $x > 0$, on définit les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $r_n = \frac{[2^n x]}{2^n} = \frac{p_n}{2^n}$ et $s_n = r_n + \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq x - r_n < \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne la convergence de ces suites vers x (développement dyadique par défaut et par excès). Avec la continuité des fonctions f et cos, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \lim_{n\to+\infty} f(\alpha r_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(p_n\frac{\alpha}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos\left(p_n\frac{\theta}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\cos(r_n\theta) = \cos(\theta x) \end{aligned}$$

Il en résulte que $f(x) = \cos\left(\frac{\theta}{\alpha}x\right) = \cos(\lambda x)$.

(d) Si $|f(\alpha)| > 1$ en écrivant que $f(\alpha) = \operatorname{ch}(\theta)$ avec $\theta > 0$, on aboutit à $f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

Exercice 18.4. *L'équation fonctionnelle $f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$*

On montre que les rotations de $\mathbb{R}^3$ sont les seules solutions non identiquement nulles de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y) \tag{18.2}$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et de sa structure euclidienne usuelle. On note $\det(x,y,z)$ *le déterminant du* *système de vecteurs (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Pour x, y dans $\mathbb{R}^3$, $x \wedge y$ désigne le produit vectoriel de x et y.*

1. *Quelques propriétés du produit vectoriel.*

   (a) *Montrer que pour tous vecteurs x, y, z, t dans $\mathbb{R}^3$, on a :*

$$\langle x \wedge y \mid z \wedge t \rangle = \begin{vmatrix} \langle x \mid z \rangle & \langle y \mid z \rangle \\ \langle x \mid t \rangle & \langle y \mid t \rangle \end{vmatrix}$$

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x \mid y \rangle^2$$

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x \mid z \rangle y - \langle x \mid y \rangle z \text{ (formule de Grassmann)}$$

   (b) *Montrer que si x est un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^3$, pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^3$ orthogonal à x il existe alors un vecteur $z \in \mathbb{R}^3$ tel $x \wedge z = y$.*

2. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une rotation. Montrer que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^3$.*

   Pour la suite, on se donne une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ solution de l'équation fonctionnelle (18.2) .

3. *Montrer que $f(0) = 0$.*
4. *Montrer que si f s'annule en un vecteur non nul x_0, elle est alors identiquement nulle.*
5. *Dans ce qui suit on suppose que f est non identiquement nulle.*

   (a) *Montrer que les vecteurs $f(x)$ et $f(y)$ sont liés si, et seulement si, les vecteurs x et y le sont.*

   (b) *Montrer que f est linéaire et conserve l'orthogonalité.*

   (c) *Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3$ est tel que $\|x\| = 1$ alors $\|f(x)\| = 1$.*

   (d) *Conclure.*

Solution.

1.

   (a) Par 4-linéarité il suffit de vérifier la première formule sur les vecteurs de base canonique, ce qui ne pose pas de problème. De cette formule on déduit que :

$$\|x \wedge y\|^2 = \begin{vmatrix} \|x\|^2 & \langle y \mid x \rangle \\ \langle x \mid y \rangle & \|y\|^2 \end{vmatrix} = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x \mid y \rangle^2$$

   Par 3-linéarité il suffit de vérifier la formule de Grassmann sur les vecteurs de base canonique, ce qui ne pose pas de problème.

   (b) Si $\langle x \mid y \rangle = 0$, on a alors $x \wedge (y \wedge x) = \|x\|^2 y$ et en posant $z = \frac{1}{\|x\|^2} y \wedge x$, on a $x \wedge z = y$.

2. Soit f une rotation de $\mathbb{R}^3$. Pour tous vecteurs x, y, z dans $\mathbb{R}^3$ on a :

$$\begin{aligned}\det(f(x), f(y), f(z)) &= \det(f)\det(x, y, z) = \det(x, y, z) \\ &= \langle x \wedge y \mid z\rangle = \langle f(x \wedge y) \mid f(z)\rangle\end{aligned}$$

   f étant un isomorphisme, cela s'écrit $\det(f(x), f(y), w) = \langle f(x \wedge y) \mid w\rangle$ pour tout $w \in \mathbb{R}^3$, ce qui revient à dire que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ par définition du produit vectoriel.

3. Avec $f(0) = f(0) \wedge f(0)$, on déduit que $f(0)$ est orthogonal à lui même, donc que $f(0) = 0$.

4. En notant $D = \mathbb{R}x_0$ la droite vectorielle engendrée par x_0 et $H = D^{\perp}$ le plan orthogonal à D, on a $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$ et tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique $x = \lambda x_0 + h$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. Si $\lambda = 0$, on a alors $x = h$ et x est orthogonal à x_0, il existe donc un vecteur $z \in \mathbb{R}^3$ tel $x_0 \wedge z = x$ et $f(x) = f(x_0) \wedge f(z) = 0$. On a donc $f(h) = 0$ pour tout $h \in H$. En désignant par h_0 un vecteur non nul dans H, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on peut trouver $z \in \mathbb{R}^3$ tel $h_0 \wedge z = \lambda x_0$ et $f(\lambda x_0) = f(h_0) \wedge f(z) = 0$. On a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$. Enfin si $x = \lambda x_0 + h$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $h \in H - \{0\}$, le vecteur $z_0 = x_0 \wedge h$ est non nul (x_0 et h sont linéairement indépendants), $f(z_0) = 0$ et en écrivant $x = z_0 \wedge t$, on déduit que $f(x) = 0$. En définitive on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que f est identiquement nulle.

5.
   (a) On a :

$$\begin{aligned}(f(x), f(y) \text{ liés}) &\Leftrightarrow (f(x) \wedge f(y) = 0) \Leftrightarrow (f(x \wedge y) = 0) \\ &\Leftrightarrow (x \wedge y = 0) \Leftrightarrow (x, y \text{ liés})\end{aligned}$$

   (b) Soient x, y dans $\mathbb{R}^3$ et λ dans $\mathbb{R}$.

      i. Pour $x = 0$ ou $y = 0$, il est clair que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On suppose donc que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Avec :

$$\begin{aligned}f(x + y) \wedge f(x) &= f((x + y) \wedge x) = f(y \wedge x) = f(y) \wedge f(x) \\ &= (f(x) + f(y)) \wedge f(x)\end{aligned}$$

      on déduit que $(f(x + y) - f(x) - f(y)) \wedge f(x) = 0$, ce qui équivaut à dire que les vecteurs $f(x + y) - f(x) - f(y)$ et $f(x)$ sont liés. Pour $x \neq 0$ on a $f(x) \neq 0$ et il existe alors un réel α tel que $f(x + y) - f(x) - f(y) = \alpha f(x)$. Les vecteurs x et y jouant des rôles symétriques on obtient de même l'existence d'un réel β tel que $f(x + y) - f(x) - f(y) = \beta f(y)$.
      Si x et y sont linéairement indépendants il en est de même de $f(x)$ et $f(y)$ et l'égalité $\alpha f(x) - \beta f(y) = 0$ se traduit par $\alpha = \beta = 0$ et $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
      Si les vecteurs x, y sont liés on a $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et pour $z \in \mathbb{R}^3$ linéairement indépendant de x (et de y), le système $(x + y, z)$ est soit libre soit égal à $(0, z)$, ce qui donne dans tous les cas :

$$f(x + y + z) = f(x + y) + f(z)$$

D'autre part avec $(x+z, y)$ et (x, z) libres on a aussi :

$$f(x+y+z) = f(x+z) + f(y) = f(x) + f(z) + f(y)$$

ce qui permet de conclure à $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

ii. Pour $x = 0$ ou $\lambda = 0$, il est clair que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Pour $x \neq 0$ fixé les vecteurs x et λx étant liés il en est de même des vecteurs $f(x)$ et $f(\lambda x)$ avec $f(x) \neq 0$, il existe donc un réel $\mu_x(\lambda)$ tel que $f(\lambda x) = \mu_x(\lambda) f(x)$. Il est clair que $\mu_x(0) = 0$ et $\mu_x(1) = 1$.
Pour λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f((\lambda_1+\lambda_2)x) &= \mu_x(\lambda_1+\lambda_2) f(x) \\ &= f(\lambda_1 x + \lambda_2 x) = f(\lambda_1 x) + f(\lambda_2 x) \\ &= (\mu_x(\lambda_1) + \mu_x(\lambda_2)) f(x) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\mu_x(\lambda_1+\lambda_2) = \mu_x(\lambda_1) + \mu_x(\lambda_2)$.
Si y est un vecteur linéairement indépendant de x, avec :

$$\begin{aligned} f(\lambda x \wedge y) &= f(\lambda x) \wedge f(y) = \mu_x(\lambda) f(x) \wedge f(y) \\ &= f(x \wedge \lambda y) = f(x) \wedge f(\lambda y) = \mu_y(\lambda) f(x) \wedge f(y) \end{aligned}$$

et avec $f(x) \wedge f(y) \neq 0$ (puisque $f(x)$ et $f(y)$ sont libres comme x et y), on déduit que $\mu_x(\lambda) = \mu_y(\lambda)$ pour tout réel λ. En posant $z = x \wedge y$, le système (x, y, z) est libre, donc $\mu_x = \mu_y = \mu_z$ et pour λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1\lambda_2 z) &= \mu_z(\lambda_1\lambda_2) f(z) = \mu_x(\lambda_1\lambda_2) f(z) \\ &= f(\lambda_1 x \wedge \lambda_2 y) = f(\lambda_1 x) \wedge f(\lambda_2 y) \\ &= \mu_x(\lambda_1)\mu_x(\lambda_2) f(x) \wedge f(y) = \mu_x(\lambda_1)\mu_x(\lambda_2) f(z) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\mu_x(\lambda_1\lambda_2) = \mu_x(\lambda_1)\mu_x(\lambda_2)$. En définitive μ_x est un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur lui même, c'est donc l'identité (exercice **18.2**). On a donc $f(\lambda x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. L'application f est donc linéaire.

iii. Soient x, y orthogonaux. Si $x = 0$, on a alors $f(x) = 0$ qui est orthogonal à $f(y)$. Si $x \neq 0$, comme y est orthogonal à x, on peut trouver $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = x \wedge z$ et $f(y) = f(x \wedge z) = f(x) \wedge f(z)$ est orthogonal à $f(x)$.

(c) On complète x en une base orthonormée directe (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ et avec $x = y \wedge z$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 = \|f(y) \wedge f(z)\|^2 &= \|f(y)\|^2 \|f(z)\|^2 - \langle f(y) \mid f(z)\rangle^2 \\ &= \|f(y)\|^2 \|f(z)\|^2 \end{aligned}$$

soit $\|f(x)\| = \|f(y)\| \|f(z)\|$. De même, on a $\|f(y)\| = \|f(x)\| \|f(z)\|$ et $\|f(z)\| = \|f(x)\| \|f(y)\|$, ce qui donne $\|f(y)\| = \|f(x)\|^2 \|f(y)\|$ avec $f(y) \neq 0$, ce qui entraîne $\|f(x)\| = 1$.

(d) La fonction f est linéaire et transforme la base canonique en une base orthonormée (les questions qui précèdent), donc c'est un endomorphisme orthogonal. Avec :

$$\begin{aligned}\det(f) &= \det(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \det(f(e_1), f(e_2), f(e_1 \wedge e_2)) \\ &= \det(f(e_1), f(e_2), f(e_1) \wedge f(e_2)) = \|f(e_1) \wedge f(e_2)\|^2 > 0\end{aligned}$$

on déduit que c'est une rotation.

Exercice 18.5. *Fonction Γ et équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$*

On donne une caractérisation de la fonction Γ d'Euler par l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$. On utilise des résultats sur la convexité et quelques propriétés de la fonction Γ.
On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ telle que :

— $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $f(x+1) = xf(x)$;

— $f(1) = 1$;

— f *est logarithmiquement convexe.*

On note $g = \ln(f)$.

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*
2. *Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$f(n+1) = n! \text{ et } g(n+1+x) - g(n+1) = \ln\left(\frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)$$

3. *Montrer que pour tout réel $x \in]0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

4. *Montrer que pour tout réel $x \in]0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$n^x \leq \frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k) \leq (n+1)^x$$

5. *Montrer que la fonction Γ d'Euler est l'unique fonction qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) (théorème de Bohr-Mollerup). On admettra que, pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.*

Solution.

1. La fonction g étant convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$, elle est continue et il en est de même de la fonction $f = e^g$.

2. De (i), on déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(n+1+x) = f(x) \prod_{k=0}^{n} (x+k)$ ($x \in \mathbb{R}^{+,*}$ étant fixé). En effet, pour $n = 0$, c'est la condition (i) et supposant le résultat acquis pour $n - 1 \geq 0$, on a :

$$f(n+1+x) = (n+x) f(n+x) = (n+x) f(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) = f(x) \prod_{k=0}^{n} (x+k)$$

Prenant $x = 1$, on obtient $f(n+1) = f(1) n! = n!$ (condition (ii)). Il en résulte que :

$$g(n+1+x) - g(n+1) = \ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^{n} (x+k)\right)$$

3. On note, pour tous réels $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$, $p(x,y) = \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y}$. On remarque que $p(x,y) = p(y,x)$ pour tous réels $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$. Dire que g est convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$ équivaut à dire que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{+,*}$, la fonction $x \mapsto p(x,y) = p(y,x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+,*} - \{y\}$. Il en résulte que, pour tout réel $x \in]0,1]$, on a :

$$p(n, n+1) \leq p(n+1, n+1+x) \leq p(n+1, n+2)$$

soit :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) = \ln(n) &\leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \\ &\leq \ln\left(\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\right) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

4. Des deux questions précédents, on déduit que :

$$\ln(n) \leq \frac{1}{x} \ln\left(\frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^{n} (x+k)\right) \leq \ln(n+1)$$

soit :

$$\ln(n^x) \leq \ln\left(\frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^{n} (x+k)\right) \leq \ln(n+1)^x$$

ou encore $n^x \leq \dfrac{f(x)}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (x+k) \leq (n+1)^x$.

5. Des questions précédents, on déduit que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii), on a alors pour tout $x \in]0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq f(x) \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

et faisant tendre n vers l'infini on déduit que :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x)$$

(relation d'Euler). En utilisant l'équation fonctionnelle (i) vérifiée par les deux fonctions f et Γ, on déduit que $f(x) = \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 18.6. *Fonction théta de Jacobi*

1. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 1-périodique et $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier où $c_k(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi kt}dt$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| < +\infty$, on a alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, e^{2i\pi kx}$.*
2. *Soient $\alpha > 1$ un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue.*
   (a) *On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| \leq \dfrac{\lambda}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout réel x. Montrer qu'en posant $F(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$ pour tout réel x, on définit une fonction continue et 1-périodique.*
   (b) *On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$ est absolument convergente et qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| + \left|\widehat{f}(x)\right| \leq \dfrac{\lambda}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout réel x, où la la transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi xt}dt$. Justifier la définition de la fonction $\widehat{f}$, puis montrer la formule sommatoire de Poisson :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\, e^{2i\pi nx}$$

3. *Pour tout réel $t > 0$, on désigne par g_t la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $g_t(x) = e^{-\pi x^2 t}$.*
   (a) *Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_1(x)\, dx$, puis montrer que la fonction $\widehat{g_1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout réel x, on a $\widehat{g_1}'(x) = -2\pi x \widehat{g_1}(x)$.*
   (b) *En déduire que $\widehat{g_1} = g_1$ et calculer $\widehat{g_t}$ pour tout réel $t > 0$.*
4. *On définit la fonction théta de Jacobi par $\theta(t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que θ vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Solution.

1. Avec $\left|c_k(f)e^{2i\pi kx}\right| = |c_k(f)|$ pour tout entier relatif k et tout réel x, on déduit que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{2i\pi kx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme g est une fonction continue. Pour tout réel x, on a :

$$f(x+1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{2i\pi k(x+1)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{2i\pi kx} = f(x)$$

donc f est 1-périodique. De la convergence uniforme de la série de fonctions définissant g, on déduit que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$c_n(g) = \int_0^1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{2i\pi kt}\right)e^{-2i\pi nt}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\int_0^1 e^{2i\pi(k-n)t}dt = c_n(f)$$

Il en résulte que $g = f$ (deux fonctions continues et 1-périodiques sont égales si, et seulement si, elles ont les mêmes coefficients de Fourier).

2.
   (a) Pour tout réel $R > 0$ et tout $x \in [-R, R]$, on a pour tout entier relatif k, $|x+k| \geq |k| - |x| \geq |k| - R$, donc pour $|k| > R$, on a :

   $$|f(x+k)| \leq \frac{\lambda}{(1+|x+k|)^\alpha} \leq \frac{\lambda}{(1+|k|-R)^\alpha}$$

   avec $\sum_{k\in\mathbb{Z},\ |k|>R} \frac{1}{(1+|k|-R)^\alpha} < +\infty$ pour $\alpha > 1$. La série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$ converge donc normalement sur tout segment et en conséquence, elle définit une fonction F continue sur $\mathbb{R}$ comme f. Le changement d'indice $n = k+1$ nous donne :

   $$F(x+1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = F(x)$$

   ce qui signifie que F est 1-périodique.

   (b) Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} \left|f(t)e^{-2i\pi xt}\right| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < +\infty$, ce qui justifie la définition de $\widehat{f}(x)$. La fonction f vérifiant aussi l'hypothèse de la question précédente, la fonction F est continue, 1-périodique et ses coefficients de Fourier sont donnés par :

   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(F) = \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi nt}dt = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+k)e^{-2i\pi nt}dt$$

avec :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 \left|f(t+k)\,e^{-2i\pi nt}\right|dt &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 \frac{\lambda}{(1+|t+k|)^\alpha}dt \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\int_0^1 \frac{\lambda}{(k+1+t)^\alpha}dt + \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\int_0^1 \frac{\lambda}{(k+1-t)^\alpha}dt \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\lambda}{(1+k)^\alpha} + \sum_{k\geq 1}\frac{\lambda}{k^\alpha} < +\infty
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
c_n(F) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f(t+k)\,e^{-2i\pi nt}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} f(x)\,e^{-2i\pi n(x-k)}dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} f(x)\,e^{-2i\pi nx}dx = \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=-p}^{p}\int_k^{k+1} f(x)\,e^{-2i\pi nx}dx \\
&= \lim_{p\to+\infty}\int_p^{p+1} f(x)\,e^{-2i\pi nx}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-2i\pi nx}dx = \widehat{f}(n)
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(F)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda}{(1+|n|)^\alpha} < +\infty$, on a l'égalité :

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)\,e^{2i\pi nx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)\,e^{2i\pi nx}$$

pour tout réel x, la convergence de la première série étant uniforme sur tout compact et celle de la seconde uniforme sur $\mathbb{R}$. L'évaluation en $x=0$ nous donne $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)$.

3. Pour $t\in\mathbb{R}^{+,*}$ fixé et $x\in\mathbb{R}$, on a $g_t(x) = e^{-\pi x^2 t} > 0$ avec $g_t(x) = \underset{|x|\to+\infty}{o}\dfrac{1}{1+x^2}$, la fonction g_t étant continue. Il en résulte que g_t est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{g_t}$.

   (a) En notant $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_1(x)\,dx$, on a :

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-\pi y^2}dy = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\pi\left(x^2+y^2\right)}dxdy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{+,*}\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[} e^{-\pi r^2}r\,dr\,d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2}r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

   (théorème de Fubini-Tonelli et changement de variables), donc $g_1\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_1(x)\,dx = 2I = 1$.

La fonction $\varphi : (x,y) \mapsto e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi (x,t) \right| = 2\pi |y| \, e^{-\pi y^2}$$

la fonction $y \mapsto |y| \, e^{-\pi y^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation de Lebesgue nous dit alors que $\widehat{g_1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\widehat{g_1}' (x) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} y e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy} dy$$

et une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} \widehat{g_1}' (x) &= -2i\pi \int_{\mathbb{R}} y e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy} dy \\ &= i \left\{ \left[e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi x \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy} dy \right\} = -2\pi x \widehat{g_1} (x) \end{aligned}$$

(b) Résolvant cette équation différentielle, on obtient $\widehat{g_1} (x) = \widehat{g_1} (0) \, e^{-\pi x^2}$ avec $\widehat{g_1} (0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy = 1$, ce qui nous donne $\widehat{g_1} = g_1$. Pour $t > 0$, le changement de variable $z = \sqrt{t} y$ nous donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \widehat{g_t} (x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2 t} e^{-2i\pi xy} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z^2} e^{-2i\pi \frac{x}{\sqrt{t}} y} \frac{dz}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} g_1 \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} g_{\frac{1}{t}} (x) \end{aligned}$$

4. Pour tout réel $t > 0$, on a $\theta (t) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_t (n)$, g_t vérifiant les hypothèses de **2b**.

En effet, g_t est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ ainsi que $\widehat{g_t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}} g_{\frac{1}{t}}$ et avec :

$$\lim_{|x| \to +\infty} (1 + |x|)^2 \left(|g_t (x)| + \left| g_{\frac{1}{t}} (x) \right| \right) = \lim_{|x| \to +\infty} (1 + |x|)^2 \left(e^{-\pi x^2 t} + e^{-\frac{\pi x^2}{t}} \right) = 0$$

on déduit qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|g_t (x)| + \left| g_{\frac{1}{t}} (x) \right| \leq \dfrac{\lambda}{(1 + |x|)^2}$ pour tout réel x. On peut donc définir la fonction θ et la formule sommatoire de Poisson nous donne :

$$\theta (t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_t (n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g_t} (n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{\frac{1}{t}} (n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta \left(\frac{1}{t} \right)$$

Chapitre 19

Exemples d'applications de la notion de compacité

Exercice 19.1. *Compacité de la boule unité dans un espace normé*

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel, $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité et $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ sa sphère unité. Montrer que B est compacte si, et seulement si, S est compacte.

Solution. Supposons que la boule unité B soit compacte. La sphère unité S est alors un fermé dans le compact B (comme image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $x \mapsto \|x\|$), elle est donc compacte (un fermé dans un compact est compact). Réciproquement, supposons que la sphère unité S soit compacte. On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de B et il s'agit de vérifier qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point de B. Si on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0, c'est alors terminé. Sinon, il existe un entier n_0 tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n > n_0$ (sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $m > n$ tel que $x_m = 0$, ce qui permet de construire par récurrence une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et de la suite $(y_n)_{n>n_0} = \left(\dfrac{1}{\|x_n\|} x_n\right)_{n>n_0}$ dans le compact S, on peut extraire une sous suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n>n_0}$ convergente vers un élément y de S. La suite réelle $\left(\left\|x_{\varphi(n)}\right\|\right)_{n>n_0}$ étant à valeurs dans le compact $[0,1]$, on peut en extraire une sous-suite $\left(\left\|x_{\psi(n)}\right\|\right)_{n>n_0}$ qui converge vers $\lambda \in [0,1]$. Il en résulte que la suite $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n>n_0} = \left(\left\|x_{\psi(n)}\right\| x_{\psi(n)}\right)_{n>n_0}$ converge vers $\lambda y \in B$. L'ensemble B est donc compact.

Exercice 19.2. *Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ le polynôme défini par $B_{n,k}(X) = \dbinom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$ et à toute *fonction* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, *on associe la suite* $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des polynômes de Bernstein définie par* $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$B_n(xf) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))' + xB_n(f)$$

2. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on note* e_k *le polynôme définie par* $e_k(X) = X^k$.
   (a) *Calculer* $B_n(e_k)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \{0,1,2\}$.
   (b) *Montrer que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout réel* x, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)B_{n,k}(x) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

3.
   (a) *Montrer que pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et tout* $x \in [0,1]$, *on a* $\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$ *(la somme étant nulle quand l'ensemble des entiers* k *compris entre* 0 *et* n *tels que* $\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \alpha$ *est vide).*
   (b) *Montrer que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, *la suite* $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

4. *Montrer le théorème de Weierstrass : si* f *est continue sur* $[a,b]$, *alors* f *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de polynômes.*

5. *Montrer que, si une fonction* f *est limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'une suite de fonctions polynomiales, c'est alors une fonction polynomiale (le théorème de Weierstrass n'est pas valable sur* $\mathbb{R}$*).*

6. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *telle que* $\int_0^1 f(x)P(x)\,dx = 0$ *pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$. *Montrer que* $f = 0$.

7. *Montrer que toute fonction convexe et continue sur* $[0,1]$ *(ou sur un segment) est limite uniforme d'une suite de fonctions convexes de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Solution. $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, on a :

$$B'_{n,k}(x) = \begin{cases} -n(1-x)^{n-1} \text{ si } k = 0 \\ \dbinom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx) \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ nx^{n-1} \text{ si } k = n \end{cases}$$

donc $x(1-x)B'_{n,k}(x) = (k-nx)B_{n,k}(x)$. Il en résulte que pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a :

$$\frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))' = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) - x\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) = B_n(xf) - xB_n(f)$$

2.

(a) Pour tout réel x, on a :

$$B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

soit $B_n(e_0) = e_0$. Il en résulte que :

$$B_n(e_1)(x) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(e_0))'(x) + xB_n(e_0)(x) = x$$

soit $B_n(e_1) = e_1$ et :

$$B_n(e_2)(x) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(e_1))'(x) + xB_n(e_1)(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$$

soit $B_n(e_2) = \dfrac{1}{n}e_1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)e_2$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_{n,k}(x) - x\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) \\ &= B_n(e_1)(x) - xB_n(e_0)(x) = x - x = 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) &= B_n(e_2)(x) - 2xB_n(e_1)(x) + x^2 B_n(e_0)(x) \\ &= \frac{x(1-x)}{n} + x^2 - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

3.

(a) Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \geq \alpha$, on a $1 \leq \dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} B_{n,k}(x) &\leq \frac{1}{\alpha^2}\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}\end{aligned}$$

(la fonction $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $\dfrac{1}{2}$).

(b) En utilisant l'égalité $B_n(e_0) = 1$, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)B_{n,k}(x)$$

La fonction f étant continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\left((x,y) \in [0,1]^2 \text{ et } |x-y| < \alpha\right) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}&|B_n(f)(x) - f(x)| \\ &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|B_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|B_{n,k}(x) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha} B_{n,k}(x) + \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha} B_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{4\alpha^2 n} + \varepsilon\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \varepsilon\end{aligned}$$

soit $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \varepsilon$. Désignant par n_0 un entier non nul tel que $\dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, on déduit que $\|B_n(f) - f\|_\infty < 2\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, donc $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(a + t(b-a))$ est continue, donc la suite de fonctions polynomiales $(B_n(g))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$ et la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_n(x) = B_n(g)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$ sur $[a,b]$.

5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales, cette suite vérifie alors le critère de Cauchy uniforme, c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n > m \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

En particulier, on a :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_{n_0}(x)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq n_0$ la fonction polynomiale $P_n - P_{n_0}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, elle est donc constante. Il existe donc une suite de réels $(c_n)_{n\geq n_0}$ telle que $P_n = P_{n_0} + c_n$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers $f(0)$, on déduit que la suite $(c_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $f(0) - P_{n_0}(0)$ et pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} P_n(x) = P_{n_0}(x) + \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} c_n = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0)$$

La fonction f est donc polynomiale.

6. En écrivant que la fonction f est limite uniforme sur le compact $[0,1]$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes, on peut écrire que :

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\,P_n(x)\,dx = 0$$

et avec la continuité et la positivité de f^2, il en résulte que f est identiquement nulle.

7. On vérifie que, pour f convexe sur $[0,1]$, toutes les fonctions $B_n(f)$ sont convexes (en tant que fonctions polynomiales, elles sont $\mathcal{C}^\infty$). Pour $n = 1$, la fonction $B_1(f)$ est affine donc convexe. Pour $n = 2$, on a $B_2(f)''(x) = 2\left(f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right)$ avec $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$ pour f, ce qui donne $B_2(f)'' \geq 0$ et la convexité de $B_2(f)$. Pour $n \geq 3$, on a :

$$B_n(f)'' = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-2,k}$$

et pour f convexe on a :

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\frac{k+2}{n} + \frac{1}{2}\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

ce qui donne $B_n(f)'' \geq 0$ et la convexité de $B_n(f)$.

Exercice 19.3. *Un théorème de Dini*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *qui converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la convergence est uniforme sur* $[0,1]$.
2. *Le résultat de la question précédente est-il encore vrai pour une suite croissante dans* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *avec* I *non compact ?*

Solution. L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).

1. Pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. De la continuité des f_n, on déduit alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [0,1] \mid \|f - f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\|f - f_{n+1}\|_\infty = f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f - f_n\|_\infty$$
c'est-à-dire que la suite $(\|f - f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers un réel $\lambda \geq 0$ et il s'agit de montrer que $\lambda = 0$. Dans le compact $[0,1]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [0,1]$. Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:
$$0 \leq \lambda \leq \left\|f - f_{\varphi(n)}\right\|_\infty = f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right)$$
En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x)$$
Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-1}{2}$.

Exercice 19.4. *Théorème de d'Alembert-Gauss*

En utilisant le fait qu'une fonction continue sur un compact de $\mathbb{C}$ *est bornée et atteint ses bornes, on démontre le théorème de d'Alembert-Gauss. Supposons qu'il existe un polynôme non constant* P *sans racine complexe.*

1. *Soit* $\varphi :]0,1[\to \mathbb{C}$ *telle que* $\varphi(t) = 1 - t^p + \underset{t\to 0^+}{o}(t^p)$. *Montrer qu'il existe un réel* $t_0 \in]0,1[$ *tel que* $|\varphi(t_0)| < 1$.
2. *Soit* Q *un polynôme non constant tel que* $Q(0) = 1$. *Montrer qu'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $|Q(z_0)| < 1$.
3. *Montrer que, pour tout* $z_1 \in \mathbb{C}$, *il existe* $t_1 \in \mathbb{C}$ *tel que* $|P(t_1)| < |P(z_1)|$.
4. *Montrer qu'il existe un réel* $R > 0$ *tel que :*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0,R),\ \frac{|z|^n}{2} \leq |P(z)| \leq 3\frac{|z|^n}{2}$$

où $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$.

5. *Montrer que* $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^k} = +\infty$ *pour tout entier* k *compris entre* 0 *et* $n-1$.
6. *Montrer qu'il existe* $z_1 \in \mathbb{C}$ *tel que* $|P(z_1)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$ *et conclure.*

Solution. Le polynôme P est identifié à la fonction polynomiale $z \mapsto P(z)$.

1. Pour tout réel $t \in]0,1[$, on a $|\varphi(t)| \leq 1 - t^p + t^p|\varepsilon(t)|$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Il existe donc un réel $t_0 \in]0,1[$ tel que $|\varepsilon(t_0)| < \frac{1}{2}$, ce qui nous donne $|\varphi(t_0)| \leq 1 - t_0^p + \frac{t_0^p}{2} = 1 - \frac{t_0^p}{2} < 1$.
2. Dire que Q est un polynôme non constant tel que $Q(0) = 1$, revient à dire qu'il est de la forme $Q(X) = 1 - \alpha X^p(1 + R(X))$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et R est un polynôme nul en 0. En désignant par $\omega \in \mathbb{C}^*$ une racine p-ième de α, on a pour tout réel t :

$$Q\left(\frac{t}{\omega}\right) = 1 - \alpha\left(\frac{t}{\omega}\right)^p\left(1 + R\left(\frac{t}{\omega}\right)\right) = 1 - t^p + \underset{t\to+\infty}{o}(t^p)$$

d'où l'existence de $t_0 \in]0,1[$ tel que $\left|Q\left(\frac{t_0}{\omega}\right)\right| < 1$.

3. Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ fixé, le polynôme Q défini par $Q(X) = \frac{P(z_1 + X)}{P(z_1)}$ (P ne s'annule jamais) est non constant tel que $Q(0) = 1$, donc il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(z_0)| < 1$, ce qui se traduit par $|P(z_1 + z_0)| < |P(z_1)|$.
4. Pour tout z dans $\mathbb{C}^*$, on a $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^n} = \lim_{|z|\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z^{n-k}}\right| = 1$, donc il existe un réel $R > 0$ tel que $\frac{1}{2} \leq \frac{|P(z)|}{|z|^n} \leq \frac{3}{2}$ pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$, ce qui nous donne le résultat annoncé.

5. On en déduit que $\frac{|z|^{n-k}}{2} \leq \frac{|P(z)|}{|z|^k} \leq 3\frac{|z|^{n-k}}{2}$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et en conséquence $\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^k} = +\infty$.

6. Comme $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, il existe $R_1 > 0$ tel que $|P(z)| > |P(0)|$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D(0,R_1)$. D'autre part, sur le disque fermé $D(0,R_1)$, la fonction continue $|P|$ est minorée et atteint sa borne inférieure, ce qui signifie qu'il existe $z_1 \in D(0,R_1)$ tel que $|P(z_1)| = \inf_{z\in D(0,R_1)} |P(z)|$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, soit $z \in D(0,R_1)$ et $|P(z)| \geq |P(z_1)|$, soit $z \notin D(0,R_1)$ et $|P(z)| > |P(0)| \geq |P(z_1)|$. Dans tous les cas, on a $|P(z)| \geq |P(z_1)|$, donc $|P(z_1)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$. Mais le résultat de la question **3** appliqué à z_1 nous conduit à l'existence de $t_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(t_1)| < |P(z_1)|$, ce qui est impossible. Le polynôme P admet donc une racine complexe et par récurrence sur le degré de P, on en déduit qu'il en admet n.

Exercice 19.5. *Meilleure approximation polynomiale uniforme d'une fonction continue sur un segment*

L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $\overline{B}(0,2\|f\|_\infty)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\|f\|_\infty$. Montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X] \cap \overline{B}(0,2\|f\|_\infty)$ tel que $\|f-P\|_\infty = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|f-Q\|_\infty$.

Solution. L'ensemble $\mathcal{B}_{n,f} = \mathbb{R}_n[X] \cap \overline{B}(0,2\|f\|_\infty)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\|f\|_\infty$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cet espace vectoriel étant de dimension finie (égale à $n+1$), cette boule est compacte. L'application $Q \mapsto \|f-Q\|_\infty$ étant continue sur le compact $\mathcal{B}_{n,f}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est minorée et atteint sa borne inférieure, ce qui signifie qu'il existe un polynôme P dans $\mathcal{B}_{n,f}$ tel que $\delta = \inf_{Q\in\mathcal{B}_{n,f}} \|f-Q\|_\infty = \|f-P\|_\infty$. Pour tout polynôme Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ on a soit $Q \in \mathcal{B}_{n,f}$ et alors $\|f-Q\|_\infty \geq \delta$, soit $Q \notin \mathcal{B}_{n,f}$ et alors $\|f-Q\|_\infty \geq \|Q\|_\infty - \|f\|_\infty > 2\|f\|_\infty - \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Remarquant que $0 \in \mathcal{B}_{n,f}$, on déduit que $\|f\|_\infty = \|f-0\|_\infty \geq \delta$. En définitive on a bien $\|f-Q\|_\infty \geq \delta$ pour tout Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\delta = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|f-Q\|_\infty = \|f-P\|_\infty$.

Exercice 19.6. *Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*

Pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on note $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

2. Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, la fonction g étant à valeurs strictement positives. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \left\| f g^{\frac{1}{p}} \right\|_p$.

3. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on note $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_1$.

(a) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, puis que $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$ est un espace de Banach.

(b) Montrer que l'ensemble $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$.

(c) Montrer que $\|1-f\| > 1$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, puis que $d(1,F) = \inf\limits_{f\in F} \|1-f\| = 1$, cette distance n'étant pas atteinte.

Solution.

1. On suppose f non identiquement nulle. Pour tout réel $p \geq 1$, on a :

$$(\forall x \in [a,b],\ 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty) \Rightarrow \left(0 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}\right)$$

La fonction f étant continue sur le compact $[a,b]$, il existe un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $0 \leq |f(x_0)| - |f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I_0 = [a,b] \cap [x_0-\eta, x_0+\eta]$. On a alors, en notant α la longueur de l'intervalle I_0 :

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx \geq \int_{I_0} |f(x)|^p\, dx \geq \int_{I_0} (|f(x_0)| - \varepsilon)^p\, dx \geq \alpha (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p$$

Ce qui donne pour tout réel $\varepsilon > 0$, $(\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \alpha^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$. Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} (\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \alpha^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$, on déduit qu'il existe un entier p_0 tel que :

$$\forall p \geq p_0,\ \|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + 2\varepsilon$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\|f\|_p\right) = \|f\|_\infty$.

2. La fonction g étant continue à valeurs strictement positives sur le compact $[a,b]$, on a $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x) \geq m = \inf\limits_{x\in[a,b]} g(x) > 0$ et avec $m|f|^p \leq g|f|^p \leq M|f|^p$, on en déduit que $m^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \left\| g^{\frac{1}{p}} f \right\|_p \leq M^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$, puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient $\lim\limits_{p\to+\infty} \left\| f g^{\frac{1}{p}} \right\|_p = \|f\|_\infty$.

3.

(a) Il est clair que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Avec $\|f\|_\infty \leq \|f\| \leq 2\|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on déduit que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Enfin, sachant que $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ est complet, on en déduit que $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$ est un espace de Banach.

(b) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a $|f(0)| \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|$, donc la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$ est continue et $F = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}\{0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$.

(c) Pour toute fonction $f \in F$, on a $|1-f| \neq 0$ (puisque $f(0)=0$) la fonction $|1-f|$ étant continue, donc $\|1-f\|_1 = \int_0^1 |1-f(t)|\,dt > 0$ et :

$$\begin{aligned}\|1-f\| &= \sup_{t\in[0,1]} |1-f(t)| + \int_0^1 |1-f(t)|\,dt \\ &> \sup_{t\in[0,1]} |1-f(t)| \geq |1-f(0)| = 1\end{aligned}$$

Il en résulte que $d(1,F) = \inf_{f\in F} \|1-f\| \geq 1$. Pour tout réel $\varepsilon \in]0,1[$, on désigne par f_ε la fonction affine par morceau et continue définie par :

$$f_\varepsilon(0) = 0,\ f_\varepsilon \text{ est affine sur } [0,\varepsilon],\ f_\varepsilon(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [\varepsilon, 1]$$

On a $f_\varepsilon \in F$ et $\|1-f_\varepsilon\| = 1 + \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}t\right) dt = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \geq d(1,F)$. Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $d(1,F) \leq 1$ et $d(1,F) = 1$. Comme $\|1-f\| > 1$ pour tout $f \in F$, cette distance n'est pas atteinte.

Exercice 19.7. *Théorème de point fixe sur un compact*

1. *Soient K un compact dans un espace métrique (E,d) et $f : K \to K$ telle que :*
$$\forall (x,y) \in K^2,\ (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y))$$
Montrer que la fonction f admet un unique point fixe dans K.
2. *Soient K un compact convexe dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ et $f : K \to K$ telle que :*
$$\forall (x,y) \in K^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\|$$
Montrer que la fonction f admet un point fixe dans K.

Solution.

1. La fonction f qui est 1-lipschitzienne est en particulier continue. L'application $x \mapsto d(f(x), x)$ étant continue sur le compact K et à valeurs réelles, il existe $\alpha \in K$ tel que $d(f(\alpha), \alpha) = \inf_{x\in K} d(f(x), x)$. Si $f(\alpha) \neq \alpha$, on a alors $d(f(\alpha), f(f(\alpha))) < d(\alpha, f(\alpha))$ avec $f(\alpha) \in K$, ce qui est contradictoire avec

la définition de α. On a donc $f(\alpha) = \alpha$. Si $\beta \neq \alpha$ est un autre point fixe de f, on a alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta)$, ce qui est impossible. En conclusion, f admet un unique point fixe dans K.

2. On se fixe $a \in K$ et on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur K par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in K,\ f_n(x) = f\left(\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right)$$

Cette suite est bien définie du fait la convexité de K, chaque fonction f_n est à valeurs dans K et pour x, y dans K, on a :

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|$$

donc f_n est strictement contractante de K dans K avec K fermé dans l'espace de Banach E, ce qui implique qu'elle admet un unique point fixe $x_n \in K$. De cette suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans le compact K on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $\alpha \in K$. En notant $g_n = f_{\varphi(n)}$, et $y_n = x_{\varphi(n)}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f(\alpha) - g_n(y_n)\| \leq \|f(\alpha) - g_n(\alpha)\| + \|g_n(\alpha) - g_n(y_n)\|$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} \|f(\alpha) - g_n(\alpha)\| = \left\|f(\alpha) - f\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}a + \left(1 - \dfrac{1}{\varphi(n)}\right)\alpha\right)\right\| \leq \dfrac{1}{\varphi(n)}\|\alpha - a\| \\ \|g_n(\alpha) - g_n(y_n)\| = \left\|f_{\varphi(n)}(\alpha) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left\|\alpha - x_{\varphi(n)}\right\| \end{array}\right.$$

ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(\alpha)$. Tenant compte du fait que $x_{\varphi(n)}$ est point fixe de $f_{\varphi(n)}$, on a $f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) = x_{\varphi(n)}$ et $f(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$, c'est-à-dire que α est point fixe de f.