Errata : Éléments d'analyse réelle. Deuxième édition
E. D. P. Sciences. Juin 2019

Page 4. Supprimer les deux dernières lignes, c'est faux !

Page 280..Exercice 9.2. Remplacer g' par h' dans la solution. La version correcte est :

Solution.

1. La fonction h définie sur $[a,b]$ par $h(x) = e^{g(x)} f(x)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $h'(x) = e^{g(x)} (g'(x) f(x) + f'(x))$ et $h(a) = h(b) = 0$. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui équivaut à $g'(c) f(c) + f'(c) = 0$.

2. La fonction h définie sur $[a,b]$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $h'(x) = \dfrac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$ et $h(a) = h(b)$. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui équivaut à $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{g'(c)}{g(c)}$.

Chapitre 4. Ajout d'un exercice 4.25 :

Exercise 1 [1]*Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe et a un réel strictement positif. À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses moyennes d'Euler définie par $v_n = \dfrac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers la la même limite.*
2. *Le résultat précédent est-il valable dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$] ?*
3. *Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum v_n$ converge alors vers $\dfrac{a+1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
4. *On se donne deux réels a et b strictement positif et on associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{(a+b)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [resp. la série $\sum u_n$] converge, il en est alors de même de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [resp. la série $\sum w_n$].*
5. *Partant du développement en série entière $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ pour $x \in]0,1]$ et en utilisant la transformation d'Euler avec $a = \dfrac{1}{x}$, montrer que $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$.*

[1]D'après : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/agregation/pi_integrales_elliptiques.pdf

6. *Partant du développement en série entière* $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *pour* $x \in]0,1]$ *et en utilisant la transformation d'Euler avec* $a = \dfrac{1}{x^2}$*, montrer que :*

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Solution 2

1. *En notant* ℓ *la limite dans* E *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, il existe pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, un entier* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_0$*, ce qui nous donne pour tout* $n > n_0$*, compte tenu de l'égalité* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n$ *:*

$$\begin{aligned} \|v_n - \ell\| &= \frac{1}{(1+a)^n} \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (u_k - \ell) \right\| \\ &\leq \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} a^k \|u_k - \ell\| + \frac{\varepsilon}{(1+a)^n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \binom{n}{k} a^k \\ &\leq \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} a^k \|u_k - \ell\| + \varepsilon \end{aligned}$$

avec $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq n^k$*. En notant* $M = \sup_{0\leq k\leq n_0} \|u_k - \ell\|$*, on en déduit que pour tout* $n > n_1 = \max\left(n_0, \dfrac{2}{a}\right)$ *(de sorte que* $na - 1 > 1$*), on a :*

$$\|v_n - \ell\| \leq \frac{M}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{n_0} (na)^k = \frac{M}{(1+a)^n} \frac{(na)^{n_0+1} - 1}{na - 1} < \varepsilon_n = \frac{M}{(1+a)^n} (na)^{n_0+1}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \dfrac{1}{1+a} \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n_0+1} = \dfrac{1}{1+a} < 1$*, ce qui implique que* $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$*.*

2. *Dans le cas où* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle divergente vers* $-\infty$ *ou* $+\infty$*, quitte à remplacer* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on peut supposer que* $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$*. On a alors :*

$$\forall M > 1,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n > M$$

donc pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}a^k u_k + \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\binom{n}{k}a^k u_k \\
&> \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}a^k u_k + \frac{M}{(1+a)^n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\binom{n}{k}a^k \\
&> \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}a^k u_k + M\left(1-\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}a^k\right) \\
&> M + \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}a^k\left(u_k-1\right) = M+\varepsilon_n
\end{aligned}$$

avec $0 < |\varepsilon_n| \leq \frac{M'}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n_0}(na)^k \leq \frac{M'}{(1+a)^n}(na)^{n_0+1}$ *pour tout entier naturel* $n > n_1 = \max\left(n_0, \frac{2}{a}\right)$ *en notant* $M' = \sup_{0\leq k\leq n_0}|u_k-1|$, *ce qui implique que* $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}v_n = +\infty$.

3. *En désignant par* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite des sommes partielles de la série* $\sum u_n$ *définie par* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}u_k$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *et par* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la transformée d'Euler correspondante, on a pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sigma_n = \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k S_k = \sum_{k=0}^{n-1}w_k$$

où on a noté $\sigma_0 = 0$ *et pour* $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
w_n = \sigma_{n+1}-\sigma_n &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k S_k - (1+a)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k S_k\right) \\
&= \frac{1}{(1+a)^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-(1+a)\binom{n}{k}\right)a^k S_k + a^{n+1}S_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{(1+a)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}\right)a^k S_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}S_k + a^{n+1}S_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

avec $\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$ *pour* k *compris entre* 1 *et* n, *ce qui donne :*

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k S_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}S_k + a^{n+1}S_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{(1+a)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\left(S_{k+1}-S_k\right) = \frac{a}{1+a}\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k u_k \\
&= \frac{a}{1+a}v_n
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \frac{a}{1+a} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

ce qui signifie que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{a+1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

4. *On se ramène au cas où* $b=1$, *en écrivant que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$w_n = \frac{1}{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^k u_k$$

On déduit alors de ce qui précède que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *on a alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ *et que si* $\sum u_n$ *converge, on a alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \frac{a+b}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

5. *Pour tout* $x \in \left]0,1\right]$, *on a* $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, *où* $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ *et prenant* $a = \dfrac{1}{x}$, *on en déduit par transformation d'Euler que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \frac{a+1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = (1+x)\ln(1+x)$$

où :

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k u_k(x) = \frac{x^n}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{x^k}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{x^{n+1}}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{x^{n+1}}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 t^k dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(1+x)^n}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k\right)dt = \frac{x^{n+1}}{(1+x)^n}\int_0^1 (1-t)^n\,dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^n} \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$$

Pour $x=1$, *cela donne* $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}$ *avec une convergence plus rapide que celle de la série* $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

6. *Pour tout* $x \in]0,1]$, *on a* $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, *où* $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *et prenant* $a = \frac{1}{x^2}$, *on en déduit par transformation d'Euler que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \frac{a+1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \left(1+x^2\right)\arctan(x)$$

où :

$$\begin{aligned}
v_n(x) &= \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k u_k(x) = \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{x^{2k}} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\
&= \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^n} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-t^2\right)^k \right) dt \\
&= \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^n} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt = \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\, dt \\
&= \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^n} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^n} \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}
\end{aligned}$$

(intégrales de Wallis), ce qui nous donne :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Pour $x = 1$, *cela donne* $\pi = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$.

Chapitre 7. Solution de l'exercice 7.9. f est à remplacer par f' trois fois en début de démonstration.

Chapitre 10. Fin de page 294, remplacer les $r^2 - st$ par $s^2 - rt$ (3 fois).

Chapitre 12. Fin de démonstration du lemme 12.8. remplacer c_x par d_x (il existe déjà un c_x en début de démonstration).

Chapitre 13. Point 2. du théorème 13.10 "si et seulement" est à remplacer par "si, et seulement si,".

Chapitre 15. Nouvelle version avec une présentation algébrique des polynômes orthogonaux.

Bibliographie. Ajout de :

T. S. Chihara. An introduction to orthogonal polynomials. Gordon and Breach. (1978).