Examen

Questions de cours.

– Énoncer le théorème de convergence dominée.
– Énoncer la propriété d'intégration par parties.
– Énoncer le théorème de Fubini-Tonelli.
– Citer deux exemples d'espaces de fonctions denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < +\infty$.

Exercice 1. 1. Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-1/x^n}\right) dt.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, bornée avec une limite à droite en 0. calculer les limites

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tx} f(x)dx \quad et \quad \lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{tf(x)}{1+t^2x^2}dx.$$

Exercice 2. Soit $f :]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0).$$

1. Montrer que f est borélienne et calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy \qquad J = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dydx.$$

2. f est elle intégrable sur $]-1,1[^2$. Justifier.

Exercice 3. On note $*$ la convolution. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée. Pour $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit $T_h(f) = \int_{\mathbb{R}} h(x)f(x)dx$.

1. Vérifier que si $h(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$ alors pour f et g dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ on a $T_h(f*g) = T_h(f)T_h(g)$.

   On suppose dans la suite que h est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout f et g dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ on a $T_h(f*g) = T_h(f)T_h(g)$.

2. Montrer que si A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}$ alors

$$\int_{A\times B} h(x+y)dxdy = \int_{A\times B} h(x)h(y)dxdy.$$

   En déduire que $h(x,y) = h(x)h(y)$ p.p.

3. On définit $H(t) = \int_0^t h(x)dx$. Montrer que H est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tous s, t dans $\mathbb{R}$

$$H(s)H(t) = \int_0^s (H(x+t) - H(x))dx.$$

4. Montrer que H est $C^{+\infty}$, que $H' = h$ p.p. et que

$$H'(s+t) = H'(s)H'(t).$$

5. Si H' n'est pas identiquement nulle prouver que $H'(0) = 1$ et que pour tout x $|H'(x)| = 1$.
6. Montrer que $H''(x) = H''(0)H'(x)$ et en déduire une propriété de h.
7. Que peut on en déduire quant à la transformée de Fourier ?

Problème. Soit $I =]a, b[$ et $\bar{I}$ son adhérence. On note $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans I.

1. Montrer que $\mathbb{L}^2(I) \subset \mathbb{L}^1(I)$ et que : $\forall f \in \mathbb{L}^2(I)$, $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_2$
2. Soient $f \in \mathbb{L}^2(I)$. On note $F : \bar{I} \to \mathbb{R}$ sa primitive généralisée en a définie par :

$$\forall x \in \bar{I},\ F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

   Montrer que F est uniformément continue sur $\bar{I}$ avec $\|F\|_\infty \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_2$ et que $F = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout sur I.
3. Soit $f \in \mathbb{L}^2(I)$. Montrer que

$$(f = 0\ p.p.) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(I),\ \int_a^b f(t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \right)$$
$$(\exists c \in \mathbb{R} \mid f = c\ p.p.) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(I),\ \int_a^b f(t)\, \varphi'(t)\, dt = 0 \right)$$

   Dans la suite, si on se donne $f, g \in \mathbb{L}^2(I)$ et F, G leurs primitive généralisée en a, on suppose démontrée la formule d'intégration par parties $\int_a^x F(t)\, g(t)\, dt = F(x)\, G(x) - \int_a^x f(t)\, G(t)\, dt$ et on désigne par $\mathbb{H}^1(I)$ l'espace des (classes de) fonctions $f \in \mathbb{L}^2(I)$ pour lesquelles il existe un réel α et une fonction $g \in \mathbb{L}^2(I)$ tels que :

$$f(x) = \alpha + \int_a^x g(t)\, dt \ \ (p.p.) \tag{1}$$

4. Montrer que pour $f \in \mathbb{H}^1(I)$, le couple (α, g) vérifiant (1) est unique. On note $g = f'$ et on dit que g est la dérivée généralisée de f.
5. Montrer que tout élément $f \in \mathbb{H}^1(I)$ admet un unique représentant continu sur $\bar{I}$. On identifiera f à ce représentant encore noté f.

6. Montrer que $f \in \mathbb{H}^1(I)$ si, et seulement si, $f \in \mathbb{L}^2(I)$ et il existe une unique fonction $g \in \mathbb{L}^2(I)$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

On précisera le lien entre g et la dérivée généralisée de f.

7. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(|t| + t)$ est dans $\mathbb{H}^1(]-1,1[)$ et que $f' \notin \mathbb{H}^1(]-1,1[)$.

8. Montrer que $f \in \mathbb{H}^1(I)$ si, et seulement si, $f \in \mathbb{L}^2(I)$ et il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \left|\int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt\right| \leqslant \beta \|\varphi\|_2 \tag{3}$$