19 mai 2015 **Mat363**

Examen

Questions de cours.

– Donner la définition de tribu et de mesure.
– Énoncer le théorème de convergence monotone.
– Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
– Énoncer le théorème de Fubini-Lebesgue.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes en justifiant et en faisant référence précisément aux théorèmes que vous employez :

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{t}{\tan^2 t}\,dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt.$$

Exercice 2. Soit $p\in]1,+\infty[$ et q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On se donne $f\in L^p([0,+\infty],\mathbb{R})$ et F définie par $F(t)=\int 0^t f(x)dx$.

1. Montrer que F est bien définie.
2. Énoncer l'inégalité de Hölder.
3. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-1/q}F(t)=0$.
4. Montrer que $\lim\limits_{t\to +\infty} t^{-1/q}F(t)=0$ (*Indication : on pourra utiliser que* $F(t)=F(A)+(F(t)-F(A))$).

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ impaire et intégrable.

1. Montrer que $t\mapsto\frac{\hat{f}(t)}{t}$ est intégrable sur $[\frac{1}{n},n]$.
2. Montrer que $\hat{f}(t)=-2i\int_0^{+\infty}\sin(tx)f(x)dx$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=-2i\int_0^{+\infty}\phi_n(x)f(x)dx$ où
$$\phi_n(x)=\int_{x/n}^{nx}\frac{\sin(u)}{u}du.$$
4. On rappelle que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du=\frac{\pi}{2}$. Montrer que ϕ_n est bornée sur $]0,+\infty[$ et démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=-i\pi\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

Problème

A – Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit la fonction $Af : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $Af(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$ par :

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt.$$

1. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $Af(x)$ est bien définie pour $x \in [0,1[$ et que : $\lim_{x \to 1^-} Af(x) = 0$.
2. Pour $x \in [0,1[$, montrer que $Af(x) = \sqrt{1-x} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} du.$
3. En déduire que Af appartient à $\mathcal{C}^0([0,1])$ et que $A : f \mapsto Af$ est un opérateur de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui même dont on déterminera la norme.
4. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent de $Af(x)$ au voisinage de 1. Af est-elle dérivable en 1 ?
5. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
   (b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

B – La formule d'inversion.

1. Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrer que :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi.$$

   Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit la fonction Vf de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$V(f)(x) = \int_x^1 f(t)\, dt.$$

2. Montrer que $V : f \mapsto Vf$ est un opérateur de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui même et calculer sa norme.
3. Montrer l'égalité d'opérateurs de $\mathcal{C}^0([0,1])$: $A \circ A = \pi V$ (*indication : on pourra utiliser* **B.1.**).
4. En déduire que l'opérateur A est injectif sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.
5. (a) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(V)$ de l'opérateur V de $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(A) = A^{-1}\left(\mathcal{C}^1([0,1])\right)$.
   (c) Montrer que toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $g(1) = 0$ appartient à $\mathrm{Im}(A)$.
6. Soit $g \in \mathrm{Im}(A)$. Montrer que l'unique fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $Af = g$ est donnée par $f = -\dfrac{1}{\pi}(Ag)'$.