L3 A, M363, contrôle 2
Avril 2014

Exercice 1 *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que si f est Riemann-intégrable sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, elle l'est alors sur $[a, b]$.*

Exercice 2 *Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et par $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ est rationnel où p, q sont entiers naturels non nuls premiers entre eux.*

1. *Justifier le fait que f est Lebesgue-intégrable et calculer son intégrale de Lebesgue.*
2. *Justifier le fait que f est Riemann-intégrable et calculer son intégrale de Riemann.*

Exercice 3 *Soient f, g les fonctions définies sur $R =]0, 1[^2$ par :*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ et } g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

1. *Montrer que f est intégrable sur R et calculer $\int_R f(x, y)\, dxdy$.*
2.
   (a) *Calculer, pour tout $y \in]0, 1[$:*

   $$\varphi(y) = \int_0^1 g(x, y)\, dx$$

   (b) *Calculer :*

   $$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y)\, dx \right) dy \text{ et } \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y)\, dy \right) dx$$

   et conclure.

Exercice 4 *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.*
Pour tout réel $x \in [a, b]$ et tout réel $\eta > 0$, on note :

$$\mathcal{V}_{x,\eta} =]x - \eta, x + \eta[\cap [a, b]$$

et le diamètre de $f(\mathcal{V}_{x,\eta})$ est le réel :

$$\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) = \sup_{(y,z) \in (\mathcal{V}_{x,\eta})^2} |f(y) - f(z)|$$

L'oscillation de f en $x \in [a, b]$ est le réel défini par :

$$\omega(x) = \inf_{\eta > 0} \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta}))$$

On note D l'ensemble des points de discontinuité de f et G l'ensemble des points de $]a, b]$ où f a une limite à gauche. On notera $f(x^-)$ la limite à gauche en un point x de $]a, b]$ quand cette dernière existe.

1. *Montrer que :*

$$D = \{x \in [a, b] \mid \omega(x) > 0\}$$

2. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :*

$$G_n = \left\{ x \in G \mid \omega(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

est dénombrable.

3. *En déduire que $D \cap G$ est dénombrable.*

4. *Montrer que la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, l'ensemble $[a,b] \setminus G$ est négligeable (on suppose connu le fait que D est mesurable et le critère de Riemann-intégrabilité de Lebesgue : une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, elle est presque partout continue).*

Exercice 5 *$\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue λ et on se donne deux réels $a < b$.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f.*
   Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on définit la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de $[a,b]$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A_p = \{x \in [a,b] \mid \exists k \geq p\ ;\ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}$$

   (a) *Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_p est mesurable de mesure finie et que $\lim\limits_{p\to+\infty} \lambda(A_p) = 0$ (on pourra utiliser l'intersection $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} A_p$).*

   (b) *Montrer qu'il existe une partie mesurable E_ε de $[a,b]$ telle que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f soit uniforme sur E_ε et $\lambda([a,b] \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ (théorème faible d'Egoroff).*

2.

   (a) *Soient $(A_j)_{1\leq j\leq p}$ une suite finie de parties mesurables de $[a,b]$ deux à deux disjointes telle que $[a,b] = \bigcup\limits_{j=1}^{p} A_j$, $(\alpha_j)_{1\leq j\leq p}$ une suite de réels et $f = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$.*
   Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact K_ε contenu dans $[a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ et f soit continue sur K_ε.

   (b) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.*
   Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver une partie mesurable F_ε de $[a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ et f soit continue sur F_ε (théorème de Lusin).

3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

   (a) *En notant $\alpha = f(1)$, montrer que :*

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = \alpha \cdot r$$

   (b) *Justifier l'existence d'un compact $K \subset [0,1]$ tel que $\lambda(K) > \dfrac{2}{3}$ et f soit continue sur K.*

   (c) *En déduire que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha \cdot x$$