L3 A, M363, contrôle 1
10 Mars 2015

Exercice 1 *Soient* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables et* f *une application de* X *vers* Y.

1. *Montrer que la famille :*
$$\mathcal{C} = \left\{B \in \mathcal{B} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$
est une σ*-algèbre.*
2. *On suppose que* $\mathcal{B}$ *est engendrée par une famille* $\mathcal{F}$ *de parties de* Y $(\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F}))$.
Montrer que f *est mesurable si, et seulement si,* $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ *pour tout* $F \in \mathcal{F}$.

Exercice 2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application continue et bijective,* $\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la famille :*
$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$
est une σ*-algèbre qui contient tous les intervalles fermés bornés.*
2. *Montrer que l'image par* f *de tout borélien de* $\mathbb{R}$ *est un borélien.*

Exercice 3 *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de mesures sur* X *telle que pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

1. *Montrer que, pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un élément* $\mu(A)$ *de* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
2. *Montrer que l'application :*
$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ A & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) \end{array}$$
définit une mesure sur X.

Exercice 4 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$ *et* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*

1. *Montrer que si* f *est une fonction mesurable de* X *dans* $\mathbb{R}$, *la fonction* $|f|$ *est alors mesurable.*
2. *En supposant qu'il existe des parties non mesurables dans* X, *donner un exemple de fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *non mesurable telle que* $|f|$ *soit mesurable.*
3. *En supposant qu'il existe des parties non mesurables dans* X, *donner un exemple de fonctions* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $g : X \to \mathbb{R}$ *non mesurables telles que* $f + g$ *et* fg *soient mesurables.*
4. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers une fonction mesurable* $f : X \to \mathbb{R}$ *si :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$$
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers les fonctions mesurables* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $g : X \to \mathbb{R}$.
   (a) *Montrer que :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mu\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} = 0$$
   (b) *Montrer que* $f = g$ *presque partout.*

Exercice 5 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, la mesure* μ *étant finie, et* f *une fonction mesurable de* X *dans* $\mathbb{R}^+$ *(*$\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu de Borel).*
On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties mesurables de* X *par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = f^{-1}\left([n, +\infty[\right)$$

et g *est la fonction définie sur* X *par :*

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n}$$

1. *Montrer que* g *est la partie entière de* f.
2. *Montrer que* f *est intégrable si, et seulement si, la série* $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ *est convergente.*

Exercice 6 *Soient* a, b *deux réels strictement positifs et* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ f(x) = \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}}$$

Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + nb)^2}$$

Exercice 7

1. *Soit* $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double de nombres complexes telle que :*

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} u_{n,k} = \ell_k \in \mathbb{C}$$

   On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs telle que la série* $\sum \alpha_k$ *soit convergente et :*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n,k}| \leq \alpha_k$$

   Montrer que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k$$

2. *Soit* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle telle que la série* $\sum a_k$ *soit absolument convergente et* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle bornée.*
   Calculer :

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)^n$$