

L3 A, M363, contrôle 1
Février 2014

Exercice 1 Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie de parties d'un ensemble non vide X . Montrer que :

$$\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

et :

$$((A_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une partition de } A) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \right)$$

où A est une partie de X .

Exercice 2 On rappelle que la mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On désigne par \mathcal{C} le groupe quotient \mathbb{R}/\mathbb{Q} .

1. Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.

Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c .

2. Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :

$$[0, 1] \subset \bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$

3. En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (on pourra raisonner par l'absurde).

4. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non mesurable (\mathbb{R} étant muni de la tribu de Borel) telle que $|f|$ soit mesurable.

Exercice 3 $[a, b]$ est un intervalle fermé borné fixé avec $a < b$ réels.

1. Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a, b]$ sont exactement les fonctions du type :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a, b]$.

2. Montrer que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a, b]$, alors la fonction $\varphi = \max_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.

3. Soit f une fonction réglée définie sur $[a, b]$ et à valeurs positives.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \varphi_n(x) \leq f(x)$$

(b) On désigne par $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a, b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

Montrer que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

(c) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4. Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur $[a, b]$ sont exactement les fonctions de la forme :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles contenus dans $[a, b]$ et la série considérée converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 4 Soit X un ensemble non vide. Quelle est la σ -algèbre engendrée par les singletons de X ? (Distinguer les cas X dénombrable et X non dénombrable).

Exercice 5 Soient f, g deux fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (\mathbb{R} étant muni de la tribu borélienne). Montrer que f est égale à g presque partout si, et seulement si, $f = g$.

Exercice 6 On se place sur $(X, \mathcal{P}(X))$ muni d'une mesure de Dirac $\mu = \delta_x$, où $x \in X$ est fixé.

Calculer $\int_X f d\mu$ pour toute fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$.