L3 A, intégration : M363

– I – Exercices préliminaires

On présente ici quelques méthodes de raisonnement qui seront utilisées en théorie de la mesure.

Exercice 1 *Pour tout entier naturel non nul n, on définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'entier k étant compris entre 0 et n, par :*

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_{n,k}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \text{ si } k \in \{1, \cdots, n\} \end{cases}$$

Soit $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré $n \geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que l'on a $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$ avec :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

Exercice 2 *Soit Ω un ensemble non vide.*
À toute partie A de Ω, on associe la fonction indicatrice (ou caractéristique) de A définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω.

1. *Montrer que l'application qui associe à une partie A de Ω sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $\{0,1\}^{\Omega}$ (ensemble des applications de Ω dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*
2. *Soient A, B deux parties de Ω. Exprimer $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A \cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A \Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
3. *Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de Ω, exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.*
4. *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$ (théorème de Cantor).*
   On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.
5. *Soient $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie de parties de Ω et A une partie de Ω. Montrer que :*

$$\left((A_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une partition de } A \right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \right)$$

Exercice 3 *On dit qu'une série numérique (réelle ou complexe) $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.*
Montrer qu'une série $\sum u_n$ absolument convergente est commutativement convergente et que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ (cela justifie l'écriture $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).

Exercice 4

1. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite de réels positifs ou nuls indexée par* (n,m) *dans* $\mathbb{N}^2$.
On suppose que :
– *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum\limits_{m} u_{n,m}$ *est convergente de somme* S_n *;*
– *la série* $\sum\limits_{n} S_n$ *étant convergente de somme* S.
Montrer alors que dans ces conditions :
– *pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum\limits_{n} u_{n,m}$ *est convergente de somme* T_m *;*
– *la série* $\sum\limits_{m} T_m$ *est convergente de somme* S, *soit :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$
Dans le cas où l'une des sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *ou* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *est finie, on dit que la série double* $\sum u_{n,m}$ *est convergente et on note* $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ *la valeur commune de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$.
Étant donnée une suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *de nombres complexes, on dit que la série double* $\sum u_{n,m}$ *est absolument convergente (ou que la suite* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable) si la série double* $\sum |u_{n,m}|$ *est convergente.*

2. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double telle que la série double* $\sum u_{n,m}$ *soit absolument convergente.*
Montrer alors que dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *[resp. pour tout* $m \in \mathbb{N}$*], la série* $\sum\limits_{m} u_{n,m}$ *[resp.* $\sum\limits_{n} u_{n,m}$*] est absolument convergente et en notant* S_n *[resp.* T_m*] la somme de cette série, la série* $\sum S_n$ *[resp.* $\sum T_m$*] est absolument convergente et on a* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m$, *soit :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

3. *En justifiant la convergence, calculer la somme* $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^m}$.

4. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ *la suite double définie par :*
$$\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ u_{n,m} = \begin{cases} 0 \ \text{si } n = m \\ \dfrac{1}{n^2 - m^2} \ \text{si } n \neq m \end{cases}$$
Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *sont définies et différentes.*

Exercice 5 *Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.*
Une fonction $f : [a,b] \to E$ est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.
On notera $f(x^-)$ [resp. $f(x^+)$] la limite à gauche [resp. à droite] en $x \in]a,b]$ [resp. en $x \in [a,b[$].

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E est réglée.*
3. *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction réglée et $\varepsilon > 0$. On note :*

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a,b] \mid \text{il existe } \varphi \text{ en escaliers sur } [a,x] \text{ telle que } \sup_{t \in [a,x]} \| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon \right\}$$

   Montrer que $E_x \neq \emptyset$, puis que $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to E$ est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Rappeler comment le résultat de la question précédente est utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée $f : [a,b] \to E$.*
6. *Montrer qu'une fonction réglée $f : [a,b] \to E$ est continue sur $[a,b]$ privé d'un ensemble D dénombrable (éventuellement vide).*
7. *La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ est-elle réglée ?*
8. *En désignant par $E(t)$ la partie entière d'un réel t, montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$

   est réglée, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (il s'agit d'une intégrale de Riemann).

Exercice 6 *$[a,b]$ est un intervalle fermé borné fixé avec $a < b$ réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

   où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a,b]$.
2. *Montrer que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a,b]$, alors la fonction $\varphi = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.*
3. *Soit f une fonction réglée définie sur $[a,b]$ et à valeurs positives.*
   (a) *Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

   (b) *On désigne par $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a,b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:*

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

   Monter que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

(c) *Montrer qu'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur* $[a,b]$ *sont exactement les fonctions de la forme :*

$$f=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs ou nuls,* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'intervalles contenus dans* $[a,b]$ *et la série considérée converge uniformément sur* $[a,b]$.

5. *Avec les notations de la question précédente, justifier l'égalité :*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ell(I_n)$$

où $\ell(I_n)$ *est la longueur de l'intervalle* I_n.

Exercice 7 *La longueur d'un intervalle réel* I *est définie par :*

$$\ell(I)=\sup(I)-\inf(I)\in[0,+\infty]=\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$$

1. *Soient* $I=[a,b]$ *un intervalle fermé, borné et* $(I_k)_{1\le k\le n}$ *une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I\subset\bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I)\le\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k)$$

2. *Soient* $I=[a,b]$ *un intervalle fermé, borné et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$$

3. *Soient* I *un intervalle et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$$

4. *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle* I. *Montrer que :*

$$\ell(I)\ge\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$$

Exercice 8 *Pour tous réels* $a<b$, *on désigne par* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$ *(théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.*
2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *si on ne suppose plus l'intervalle* I *compact ?*
3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ *telle que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que :
   $$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$
4. *On désigne par* $\mathcal{A}$ *la famille des parties de* $\mathbb{R}^2$ *de la forme :*
   $$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b]\times\mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
   où f, g *sont dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *telles que* $f \leq g$ *et on note :*
   $$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$$
   Montrer que cette application μ *est* σ*-additive sur* $\mathcal{A}$*, c'est-à-dire que pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints (i. e.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *pour* $n \neq m$ *dans* $\mathbb{N}$*), on a :*
   $$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

– II – Mesures et probabilités élémentaires

X est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.

Définition : Une σ-algèbre (ou tribu) sur X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable).

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X, on dit alors que le couple $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Dans le cadre probabiliste, l'ensemble X est noté Ω et appelé univers, ses éléments sont appelés éventualités, ceux de $\mathcal{A}$ sont appelés événements, les singletons sont les événements élémentaires et on dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.

Deux événements disjoints sont dits incompatibles.

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(σ-additivité de μ).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et $\mu(\Omega) = 1$, on notera $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité μ, on dit que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A.

Pour tout entier $r \geq 1$, on dit que les événements $A_1, \cdots, A_r$ sont mutuellement indépendants dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si, pour toute partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, on dit alors que l'intersection de toutes les σ-algèbres sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. C'est aussi la plus petite σ-algèbre sur X (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$) qui contient $\mathcal{A}$.

On la note $\sigma(\mathcal{A})$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Si $f : X \to X'$ est une application de X dans un ensemble X', alors pour toute tribu $\mathcal{A}'$ sur X', l'image réciproque :

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \left\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\right\}$$

est une tribu sur X.

Pour toute famille $\mathcal{A}'$ de parties de X', on a :

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{A}')\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$$

Définition : Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

On la note $\mathcal{B}(X)$ et ses éléments sont les boréliens de X.

Une mesure de Borel sur X est une mesure sur $\mathcal{B}(X)$.

Pour $X = \mathbb{R}^p$, on peut vérifier que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ est la tribu engendré par les pavés ouverts du type :

$$P = \prod_{k=1}^{p}]a_k, b_k[$$

les $a_k < b_k$, pour k compris entre 1 et p, étant tous rationnels.

La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation, ce qui signifie que pour tout borélien B et tout réel a, on a $\ell(a + I) = l(I)$.

Cette mesure ℓ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 9 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. $X \in \mathcal{A}$ *;*
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Exercice 10 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et E un sous ensemble non vide de X.*
Montrer que la famille :

$$\mathcal{A}_E = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid \exists A \in \mathcal{A}\ ;\ B{=}A \cap E\}$$

est une tribu sur E (tribu trace de $\mathcal{A}$ su E).

Exercice 11 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$.*
Montrer que :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mu_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$:

$$\mu_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

(formule de Poincaré).

Exercice 12 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles.*
Montrer que l'ensemble d'indice :

$$D = \{k \in I \mid \mathbb{P}(A_k) \in]0, 1]\}$$

est dénombrable (fini ou infini).
En particulier, l'ensemble :

$$\{x \in X \mid \mathbb{P}(\{x\}) \in]0, 1]\}$$

est dénombrable.

Exercice 13

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*
$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$
est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$ (mesure de Dirac en x).
2. *On suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable.*
Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, l'application :
$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$
est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.
3. *Réciproquement, montrer que toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(X, \mathcal{P}(X))$ peut s'exprimer sous la forme* (1).

Exercice 14 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une application telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$;
- *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*
$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
(inégalité de Boole).

Exercice 15 *On se propose de montrer qu'une tribu dénombrable sur X est nécessairement finie de cardinal égal à une puissance de* 2.
Ce qui revient aussi à dire qu'une tribu infinie est non dénombrable.
Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre dénombrable sur X.
Pour tout $x \in X$, on note :
$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ x\in A}} A$$
(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i \in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Exercice 16 *Soit X un ensemble dénombrable.*
Montrer que la σ-algèbre engendrée par les singletons de X est $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 17 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Montrer que la famille $\mathcal{A}$ formée des parties A de X telles que A ou ou $X \setminus A$ est dénombrable est une σ-algèbre sur X.*
2. *Montrer que $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.*
3. *Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{A} & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 \text{ si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 18 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Montrer que si A, B sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, on a alors :*
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. *Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\mu(A)$ (continuité croissante de μ).*
3. *Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. En supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu(A)$ (continuité décroissante de μ).*

Exercice 19 *Soient $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$$

(fonction de répartition de $\mathbb{P}$).

1. *Montrer que F est croissante avec, pour tout réel x :*
$$\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x),\ \lim_{t \to x^-} F(t) = F(x) - \mathbb{P}(\{x\})$$
et :
$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$$

2. *Montrer que l'ensemble :*
$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\{x\}) > 0\}$$
est dénombrable.

Exercice 20 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Que dire d'un événement* A *qui est indépendant de tout autre événement ?*

Exercice 21 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A_1, \cdots, A_n$*, où* $n \geq 2$*, des événements mutuellement indépendants dans* $\mathcal{A}$*.*

1. *Montrer que* $\Omega \setminus A_1, A_2, \cdots, A_n$ *sont mutuellement indépendants.*
2. *En déduire que pour tout entier* k *compris entre* 1 *et* n*, les événements* $\Omega \setminus A_1, \cdots, \Omega \setminus A_k, A_{k+1}, \cdots, A_n$ *sont mutuellement indépendants.*

Exercice 22 *Soit* $n \geq 2$ *un entier naturel.*
On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$*, où* $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ *et :*
$$\forall k \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$$
ce qui revient à considérer l'expérience aléatoire qui consiste à choisir de manière équiprobable un entier compris entre 1 *et* n*.*
Pour tout diviseur positif d *de* n*, on désigne par* A_d *l'événement :« le nombre choisi est divisible par* d *».*

1. *Calculer* $\mathbb{P}(A_d)$ *pour tout diviseur positif* d *de* n*.*
2. *Montrer que si* $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ *sont tous les diviseurs premiers de* n*, les événements* $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ *sont alors mutuellement indépendants.*
3. *On désigne par* φ *la fonction indicatrice d'Euler définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par*
$$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$
Montrer que
$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$
4. *Soit* d *un diviseur positif* d *de* n*. Calculer la probabilité de l'événement* B_d *: « le nombre* a *choisi est tel que* $a \wedge n = d$ *».*
5. *En déduire que :*
$$n = \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Exercice 23 *On munit l'ensemble* $\mathbb{N}^*$ *de la tribu* $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$*.*
On rappelle que la fonction dzéta de Riemann est définie par :
$$\forall \alpha > 1,\ \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
On note :
$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$$
la suite infinie des nombres premiers rangée dans l'ordre strictement croissant.

1. *Montrer que l'on définit une probabilité sur* $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ *en posant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{n^\alpha}$$

2. *Montrer que :*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$$

où on a noté $p\mathbb{N}^*$ *l'ensemble de tous les multiples positifs de* p.

3. *Montrer que :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

4. *En déduire que :*

$$\forall \alpha > 1,\ \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

5.
   (a) *Montrer que* $\lim_{\alpha \to 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.

   (b) *Déduire de la question précédente que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

Exercice 24 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle strictement décroissante et de limite nulle.*
Déterminer un réel λ *pour lequel il existe une mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathbb{N} \cap [n, +\infty[) = \lambda u_n$$

Exercice 25 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*
Pour tous A, B *dans* $\mathcal{A}$, *on note :*

$$d(A, B) = \mathbb{P}(A \triangle B)$$

1. *Montrer que, pour tous* A, B, C *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

2. *En déduire que, pour tous* A, B *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*

$$|\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$$

Exercice 26 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Montrer que, pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux incompatibles, on a* $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

Exercice 27 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Montrer que, pour toute suite finie* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *d'événements, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + (n-1)$$

Exercice 28 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements.*
On note :

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

$\limsup_{n\to+\infty} A_n$ *est l'ensemble des* $x \in \Omega$ *qui appartiennent à une infinité de* A_n *et* $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ *est l'ensemble des* $x \in \Omega$ *qui appartiennent à tous les* A_n *sauf au plus un nombre fini.*

1. *Montrer que :*

$$\Omega \setminus \limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

$$\Omega \setminus \liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

$$\left(x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = +\infty\right)$$

$$\left(x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\Omega\setminus A_n}(x) < +\infty\right)$$

2. *Montrer que :*

   (a) *si la série* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *converge, on a alors* $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$ *;*

   (b) *si les événements* A_n *sont mutuellement indépendants et la série* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *diverge, on a alors* $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$ *(loi du zéro-un de Kolmogorov).*

3. *Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(n \cdot \mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$$

– III – Fonctions mesurables

Définition : Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Dans le cas où X, Y sont deux espaces topologiques et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont les tribus de Borel, une fonction mesurable de X dans Y est dite borélienne.

Une fonction continue est mesurable (i. e. borélienne).

Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si, et seulement si, on a $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$ pour tout réel a.

La composée, la somme, le produit et une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Les fonctions réglées de $[a, b]$ dans un espace de Banach E sont boréliennes (c'est le cas par exemples, pour les fonctions monotones et les fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$).

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire réelle toute fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et variable aléatoire vectorielle (ou vecteur aléatoire) toute fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$.

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, on note pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(X \in B)$ l'événement $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, soit :

$$(X \in B) = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

Dans le cas particulier des intervalles, on note respectivement $(X = x)$, $(X < a)$, $(a \leq X < b)$, $\cdots$, les événements $X^{-1}(\{x\})$, $X^{-1}(]-\infty, a[)$, $X^{-1}([a, b[)$, $\cdots$

La loi d'une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

(mesure image de $\mathbb{P}$ par X).

On dit qu'une partie N d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est négligeable si elle est contenue dans une partie $A \in \mathcal{A}$ de mesure nulle.

On dit que deux fonctions f, g de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont égales μ-presque partout si l'ensemble :

$$N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable, ce qui équivaut à dire qu'il existe une partie $A \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X \setminus A$.

Dans le cas où f et g sont mesurables, l'ensemble $N = (f - g)^{-1}\{\mathbb{R}^*\}$ est mesurable et $f = g$ presque partout si, et seulement si, $\mu(N) = 0$.

Dans le cas de deux variables aléatoires réelles X et Y sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que $X = Y$ presque sûrement si $X = Y$ presque partout, ce qui équivaut à dire que $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ ou encore que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Si $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ est mesurable, il existe alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telles que $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n) \leq +\infty$$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable (ou sommable) si elle est mesurable et $\displaystyle\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.

L'ensemble des fonctions intégrables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive avec :

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu < +\infty$$

Exercice 29 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f, g deux fonctions mesurables de X dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les fonctions $|f|$, $f+g$ et fg sont mesurables.*

Exercice 30 *On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soient f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
Montrer que f est égale à g presque partout si, et seulement si, $f = g$ partout.

Exercice 31 *La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.*
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c.
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*
$$[0, 1] \subset \bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$
3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Exercice 32 *On propose de retrouver le résultat de l'exercice précédent sans utiliser les groupes quotients.*
Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, on désigne par H un supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{Q} \cdot 1$ (axiome du choix), soit :
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cdot 1 \oplus H$$

1. *Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $[0, 1[$ tel que tout réel x puisse s'écrire de façon unique $x = r + a$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in A$.*
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*
$$B = \bigcup_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [0, 2[$$
3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Exercice 33 *Donner un exemple de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurables telles que les fonctions $|f|$, $f + g$ et fg soient mesurables ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel.*

Exercice 34 $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est mesurable si, et seulement si, la restriction de* f *à tout segment* $[a, b]$ *est mesurable.*

Exercice 35 *Soient* E *un espace vectoriel normé complet et* $a < b$ *deux réels.*
Montrer qu'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$ *est borélienne.*

Exercice 36 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée* f' *est borélienne.*

Exercice 37

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *L'ensemble des réels* x *tels que la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*
2. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *(*$\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu borélienne).*
   Montrer que l'ensemble des éléments x *de* X *tels que la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente [resp. divergente] est mesurable.*

Exercice 38 *Soient* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables et* f *une application de* X *vers* Y.

1. *Montrer que la famille :*
$$\mathcal{C} = \left\{B \in \mathcal{B} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$
   est une σ*-algèbre.*
2. *On suppose que* $\mathcal{B}$ *est engendrée par une famille* $\mathcal{F}$ *de parties de* Y *(*$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$*).*
   Montrer que f *est mesurable si, et seulement si,* $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ *pour tout* $F \in \mathcal{F}$.
   On en déduit en particulier qu'une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable si, et seulement si, on a* $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$ *pour tout réel* a.

Exercice 39 *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable.*

1. *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de mesures sur* X *telle que pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
   (a) *Montrer que, pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un élément* $\mu(A)$ *de* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
   (b) *Montrer que l'application :*
$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ A & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) \end{array}$$
   définit une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
2. *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de mesures sur* X.
   (a) *Montrer que l'application :*
$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ A & \mapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A) \end{array}$$
   définit une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

(b) *On suppose que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, μ_n *est une probabilité sur* $(X, \mathcal{A})$ *et on se donne une suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs ou nuls telle que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$.

Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mu_n (A) \end{array}$$

définit une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 40 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$ *et* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *converge en mesure vers une fonction mesurable* $f : X \to \mathbb{R}$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mu (|f - f_n| > \varepsilon) = 0$$

où on a noté :

$$(|f - f_n| > \varepsilon) = \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$$

Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge en mesure vers les fonctions mesurables* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $g : X \to \mathbb{R}$, *on a alors* $f = g$ *presque partout.*

Exercice 41 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé et* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *converge en probabilité vers une variable aléatoire* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P} (|X - X_n| > \varepsilon) = 0$$

où on a noté :

$$(|X - X_n| > \varepsilon) = \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega) - X_n(\omega)| > \varepsilon\}$$

1. *Montrer que si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui converge en probabilité vers les variables aléatoires* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, *on a alors* $X = Y$ *presque sûrement.*
2. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* X *une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   Montrer que s'il existe une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires de* Ω *dans* $\mathbb{R}^+$ *qui converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle et telle que* $|X - X_n| \leq Y_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors en probabilité vers* Y.
3. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui convergent en probabilité vers les variables aléatoires* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *respectivement.*
   Montrer que la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* $X + Y$.
4. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui convergent en probabilité vers la variable aléatoire nulle.*
   Montrer que la suite $(X_n Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.*
5. *Montrer que, pour toute variable aléatoire* $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *on a :*
   $$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P} (|X| > k) = 0$$
6. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui convergent en probabilité vers les variables aléatoires* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *respectivement.*

(a) *Montrer que les suites de variables aléatoires* $(X(Y-Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $((X-X_n)Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent en probabilité vers la variable aléatoire nulle.*

(b) *Montrer que la suite* $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* XY.

Exercice 42 $(X,\mathcal{A},\mu)$ *est un espace mesuré, la mesure* μ *étant finie,* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *et* f *est une fonction mesurable* f *de* X *dans* $\mathbb{R}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* f *sur* X *si pour tout réel* $\alpha>0$, *il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A)<\alpha$ *et la convergence de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* f *est uniforme sur* $X\setminus A$.

1. *Montrer que si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* f *sur* X, *elle converge alors presque partout vers* f.
2. *On suppose que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque partout sur* X *vers* f.
Pour tout réel $\lambda>0$ *et tout entier* $k\in\mathbb{N}$, *on note :*

$$(|f-f_k|\geq\lambda)=\{x\in X\mid |f(x)-f_k(x)|\geq\lambda\}$$

(a) *Montrer que, pour tout entier* $n\in\mathbb{N}$ *et tout réel* $\lambda>0$, *l'ensemble :*

$$A_{\lambda,n}=\bigcup_{k=n}^{+\infty}(|f-f_k|\geq\lambda)$$

est mesurable et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_{\lambda,n})=0$.

(b) *Montrer que pour tout réel* $\alpha>0$ *et tout réel* $\lambda>0$, *il existe un entier* n_0 *tel que* $\mu(A_{\lambda,n_0})<\alpha$ *et :*

$$\forall x\in\setminus A_{\lambda,n_0},\ \forall k\geq n_0,\ |f(x)-f_k(x)|<\lambda$$

(c) *Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* f *sur* X *(théorème d'Egorov).*
Indication : on pourra utiliser la question précédente avec les réels $\lambda_p=\dfrac{1}{p}$, *où* p *décrit* $\mathbb{N}^*$.

(d) *Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers* f *sur* X.

3. *Donner un exemple de suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge presque partout sur* X *vers* f *et pour laquelle il n'est pas possible de trouver* A *de mesure nulle telle la convergence de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* f *soit uniforme sur* $X\setminus A$ *(on ne peut pas prendre* $\alpha=0$ *dans le théorème d'Egorov).*
4. *Montrer que le théorème d'Egorov n'est plus valable pour* $\mu(X)=+\infty$.

Exercice 43 *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *un espace mesuré, la mesure* μ *étant finie, et* f *une fonction mesurable de* X *dans* $\mathbb{R}^+$ *(*$\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel).*
On définit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties mesurables de* X *par :*

$$A_n=f^{-1}([n,+\infty[)\,,\ B_n=f^{-1}([n,n+1[)$$

et g *est la fonction définie sur* X *par :*

$$g=\sum_{n=1}^{+\infty}n\mathbf{1}_{B_n}$$

1. *Montrer que, pour tout entier* $n\in\mathbb{N}$, *on a :*

$$\mu(A_n)=\sum_{k=n}^{+\infty}\mu(B_k)$$

2. *Montrer que g est la partie entière de f.*
3. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n\mu(B_n)$ est convergente.*
4. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1})$$

5. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \mu(A_n)$ est convergente.*
6. *Le résultat précédent est-il valable dan le cas où $\mu(X) = +\infty$?*

– IV – Intégration

Exercice 44 *On se place sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \operatorname{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par δ_n la mesure de Dirac en n (pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $\delta_n(A) = \mathbf{1}_A(n)$).

1. *Montrer que :*
$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$$
2. *Montrer que pour toute suite réelle positive $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :*
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite numérique $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit sommable.*

Exercice 45 *On se place sur $(X, \mathcal{P}(X))$ muni d'une mesure de Dirac $\mu = \delta_x$, où $x \in X$ est fixé.*
Calculer $\displaystyle\int_X f d\mu$ pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$.

Exercice 46 *Soient X, Y deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne respective.*
Montrer qu'une fonction $f : X \to Y$ qui est continue sur X privé d'un ensemble D dénombrable est borélienne.

Exercice 47 *On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.*

1. *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$ (on peut utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).*
2. *Montrer qu'une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}$ est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer qu'une partie mesurable de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie mesurable A de $[0,1]$ de mesure égale à 1 est dense dans $[0,1]$. Réciproquement un ouvert dense de $[0,1]$ est-il de mesure égale à 1 ?*

Exercice 48 *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec $\mu \neq 0$, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.*

1. *Montrer que si f, g sont deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$, les fonctions $f + g$ et fg sont mesurables.*
2. *Montrer que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.*
3. *Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
4. *La composée de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
5. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon$$
6. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour tous x, y dans A (on peut utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).*

7. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a :*

$$\mu\left(f^{-1}\left([\alpha, +\infty[\right)\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f d\mu$$

   (inégalité de Markov).

8. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$ si, et seulement si, f est nulle presque partout.*
9. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable positive. Montrer que si $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty$, on a alors $f(x) < +\infty$ presque partout.*
10. *Soient f, g deux fonctions mesurables positives sur X. Montrer que si $f = g$ presque partout, alors $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*
11. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et f est bornée sur A.*
12. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f \neq 0$ presque partout. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.*
13. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que si $\displaystyle\int_A f d\mu = 0$ pour toute partie A mesurable dans X, alors la fonction f est nulle presque partout.*

– V – Convergence monotone, dominée

Les théorèmes importants sont les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Théorème 49 (Convergence monotone) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$.*
Dans ces conditions, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ et on a :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

On en déduit que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge alors simplement vers une fonction mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ et on a :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$$

On en déduit également le lemme de Fatou :
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on a alors :

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} (f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

On rappelle que :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{p\geq n} u_p \right) \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{p\geq n} u_p \right)$$

Théorème 50 (Convergence dominée) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ et qui converge simplement presque partout sur X vers une fonction f.*
S'il existe une fonction intégrable $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ telle que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout tout $x \in I$ alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et on a :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Dans le cadre des séries de fonctions, on en déduit le résultat suivant.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$, telle la série numérique $\sum \int_X |f_n|\, d\mu$ soit convergente, alors toutes les fonctions f_n sont intégrables, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement presque partout vers une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{C}$ et on a :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Exercice 51 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
   Montrer que s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\int_X f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\int_X f d\mu \leq M$.

2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
   Montrer que si f_0 est intégrable, il en est alors de même de toutes les fonctions f_n ainsi que de f et qu'on a :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$
   Le résultat subsiste-t-il si $\displaystyle\int_X f_0 d\mu = +\infty$?
3. *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :*
$$A_n = |f|^{-1}\left([n, +\infty]\right)$$
   (a) *Montrer que f est finie presque partout et que :*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} |f|\, d\mu = 0$$
   (b) *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$$
   (c) *En prenant $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue, montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :*
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$
   est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ désigne l'intégrale de f sur l'intervalle d'extrémités 0 et x).

Exercice 52 *On se place sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage :*
$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \mathrm{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par δ_n la mesure de Dirac en n.

1. *Montrer que :*
$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$$
2. *Montrer que pour toute suite réelle positive $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :*
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes soit sommable.*
4. *Soit $(x_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes telle que :*
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} x_{n,k} = \ell_k \in \mathbb{C}$$
   On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que la série $\sum \alpha_k$ soit convergente et :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n,k}| \leq \alpha_k$$
   Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k$$

5. *Calculer :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n}{k}\sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

6. *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que la série $\sum a_k$ soit absolument convergente et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite numérique bornée.*
Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\left(1+\frac{b_k}{n}\right)^n$$

Exercice 53 *Soit $f:]0,1[\,\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=0$ si x est irrationnel et par $f(x)=\dfrac{1}{q}$ si $x=\dfrac{p}{q}$ est rationnel où p,q sont entiers naturels non nuls premiers entre eux.*

1. *Justifier le fait que f est Lebesgue-intégrable et calculer son intégrale de Lebesgue.*
2. *Justifier le fait que f est Riemann-intégrable et calculer son intégrale de Riemann.*

Exercice 54 *Soient $a<b$ deux réels et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée.*
Pour tout réel $x\in[a,b]$ et tout réel $\eta>0$, on note :

$$\mathcal{V}_{x,\eta}=\,]x-\eta,x+\eta[\,\cap[a,b]$$

et le diamètre de $f(\mathcal{V}_{x,\eta})$ est le réel :

$$\delta\left(f\left(\mathcal{V}_{x,\eta}\right)\right)=\sup_{(y,z)\in\left(\mathcal{V}_{x,\eta}\right)^2}\left|f(y)-f(z)\right|$$

L'oscillation de f en $x\in[a,b]$ est le réel défini par :

$$\omega(x)=\inf_{\eta>0}\delta\left(f\left(\mathcal{V}_{x,\eta}\right)\right)$$

On note D l'ensemble des points de discontinuité de f et G l'ensemble des points de $]a,b]$ où f a une limite à gauche. On notera $f(x^-)$ la limite à gauche en un point x de $]a,b]$ quand cette dernière existe.

1. *Montrer que :*

$$D=\{x\in[a,b]\mid\omega(x)>0\}$$

2. *Montrer que, pour tout entier $n\geq1$, l'ensemble :*

$$G_n=\left\{x\in G\mid\omega(x)>\frac{1}{n}\right\}$$

est dénombrable.

3. *En déduire que $D\cap G$ est dénombrable.*
4. *Montrer que la fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, l'ensemble $[a,b]\setminus G$ est négligeable (on suppose connu le fait que D est mesurable et le critère de Riemann-intégrabilité de Lebesgue : une fonction bornée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, elle est presque partout continue).*

Exercice 55 *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2x\left(1-x\right)^n dx$$

et conclure.

Exercice 56 *Soient a, b deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ f(x) = \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$$

Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}$$

Exercice 57 *Pour tout réel $\alpha > 0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_0^{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{x^\alpha}{n}\right)^n dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 58 *Pour tout réel $\alpha > 0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2} dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 59

1. *Montrer que :*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$$
2. *Montrer que :*
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$.

Exercice 60 *En justifiant l'égalité :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 t^{n-1}\sin(nx)\,dt = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\sin(nx)\right)dt$$

et en calculant la dernière intégrale, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

pour tout réel $x \in \left]0, 2\pi\right[$.

1. *Montrer que, tout couple de réels (x,t) dans $\mathbb{R}\times\left]-1,1\right[$, la série $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ est convergente et calculer sa somme.*
On notera $f(x,t)$ cette somme.
2. *Montrer que, pour tout réel $x \in \left]0,\pi\right[$, on a :*
$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$$

3. *Monter que, pour tout réel* $x \in \left]0, 2\pi\right[$, *on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

4. *Montrer que la convergence de la série de fonctions* $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ *est uniforme sur tout segment* $[a, b] \subset \left]0, \pi\right[$ *et en déduire que, pour tout réel* $x \in [0, 2\pi]$, *on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x(2\pi - x)}{4}$$

Exercice 61 *Soient* $a < b$ *deux réels et* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *deux suites réelles telles que :*

$$\forall x \in \left]a, b\right[, \lim_{n\to+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ *(lemme de Cantor).*
On peut raisonner par l'absurde en utilisant une suite de fonctions définie par :

$$f_k(x) = \frac{(a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$$

où la suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ *est judicieusement choisie.*

Exercice 62 ***Transformation de Laplace***

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{C}$ *une fonction Lebesgue-intégrable.*
   Montrer que la fonction :

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt} dt$$

   est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ *et de limite nulle à l'infini.*

2. *Soit* $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{C}$ *une fonction Lebesgue-mesurable et bornée.*
   Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ *est définie, de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *et de limite nulle à l'infini.*

3. *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction continue telle que* $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ *soit convergente (ce qui ne signifie pas nécessairement que* f *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$*).*
   Nous allons montrer de deux manières différentes la continuité de la transformée de Laplace sur $\mathbb{R}^+$.

   (a) *On désigne par* R *la fonction définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$$

   i. *Montrer que pour tous réels* $x \geq 0$ *et* $v > u > 0$, *on a :*

$$\left| \int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt \right| \leq 3 \sup_{t\geq u} |R(t)|$$

   ii. *En déduire que la fonction* $\mathcal{L}(f)$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}^+$.

iii. *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction :*

$$F_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^n f(t)\, e^{-xt} dt$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $\mathcal{L}(f)$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b) *Montrer que pour tous réels $x \geq 0$ et $v > u > 0$, il existe un réel $c_x \in [u, v]$ tel que :*

$$\int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt = e^{-xu} \int_u^{c_x} f(t)\, dt$$

puis en déduire que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 63 ***L'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

On propose ici plusieurs méthodes pour calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. *On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, \ G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

(a) *Montrer que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' + G' = 0$.*

(b) *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*}, \ f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

(a) *Montrer que la transformée de Laplace de f :*

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt} dt$$

est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$.

(b) *Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et solution d'une équation différentielle de la forme $y' - y = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$, où λ est une constante réelle.*

(c) *Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

(a) *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

(b) *Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

4. *Pour tout réel $R > 0$, on note :*

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2} dt$$

(a) *Montrer que :*
$$I_R^2 = 2\iint_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$$
où :
$$T_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq R\right\}$$

(b) *Montrer que :*
$$I_R^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta$$
et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

5.

(a) *Montrer que :*
$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2$$

(b) *Calculer* $\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$ *en utilisant les coordonnées polaires et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

6. *On désigne par* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des intégrales de Wallis définies par :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$$

(a) *Montrer que :*
$$W_n \underset{\alpha \to +\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
(on vérifiera que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$*, que la suite* $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est constante, puis que* $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$*).*

(b) *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout réel* $t \in [0, \sqrt{n}]$*, on a :*
$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

(c) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$*, on a :*
$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2(n-1)}$$

(d) *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

(e) *Pour tout entier* $n \geq 1$*, on désigne par* p_n *la probabilité d'obtenir* n *fois pile et* n *fois face sur* $2n$ *lancés indépendants d'une pièce équilibrée.*
Montrer que :

i.
$$\forall n \geq 1,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

ii.
$$\forall n \geq 1,\ p_n^2 = \frac{1}{2n+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{1}{2n+1} \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \frac{2}{\pi}$$

iii.

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

7. *En munissant, pour tout entier* $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique, calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx$.

Exercice 64 ***L'intégrale de Dirichlet***

On propose plusieurs méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1.
   (a) *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$ *les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ *sont convergentes.*

   (b) *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ *est semi-convergente.*

2.
   (a) *Montrer que la transformée de Laplace* $\mathcal{L}(f)$ *de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

   $$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = \begin{cases} 1 \ si\ t = 0 \\ \dfrac{\sin(t)}{t} \ \ si\ t > 0 \end{cases}$$

   est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$, *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *et de limite nulle nulle à l'infini.*

   (b) *Calculer* $\mathcal{L}(f)(x)$ *pour tout réel* $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

3.
   (a) *Montrer que, pour tout réel* $x \geq 0$, *les intégrales généralisées* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} dt$ *sont convergentes et que l'on a :*

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} dt$$

   (b) *En déduire que la fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^{+,*}$.

   (c) *Pour* $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$, *montrer que la fonction* $\mathcal{L}(f)$ *est solution de l'équation différentielle* $y'' + y = \dfrac{1}{x}$, *résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

4.
   (a) *Montrer que pour toute fonction* f *de classe* $\mathbb{C}^1$ *de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\, dx = 0$.

(b) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \frac{\pi}{2}$$

(c) *Après avoir justifié que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}\right) dt$$

montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 65 ***La méthode de Laplace***

1. *Soit* $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ *une fonction Lebesgue intégrable qui admet une limite finie* ℓ *en* 1^-.
   On se propose de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = \ell \tag{2}$$

   soit que $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\ell}{n}$ *si* $\ell \neq 0$ *ou* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$ *si* $\ell = 0$.

   (a) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0.$

   (b) *Montrer* (2) *dans le cas où la fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur le segment* $[0,1]$.

   (c) *Montrer* (2) *dans le cas général.*

Exercice 66 *Soient* I, *un intervalle réel d'intérieur non vide,* a *un point de* I *et* f, g *deux fonctions intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}$.
Montrer $f = g$ *presque partout si, et seulement si,* $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = \int_a^x g(t)\, dt$ *pour tout* $x \in I$.

Exercice 67

1. *Soient* I *un intervalle réel non réduit à un point et* $a \in I$.
   On se donne une fonction mesurable bornée, $f : I \to \mathbb{R}$ *et on désigne par* F *la fonction définie sur* I *par :*

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

   Montrer que F *est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur* I *et qu'elle est dérivable en tout point* $x_0 \in I$ *où la fonction* f *est continue avec* $F'(x_0) = f(x_0)$.

2. *Montrer que si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors* f' *est intégrable sur* $[a,b]$ *et :*

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$$

3. *En considérant la fonction* f *définie sur* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *par* $f(0) = 0$ *et :*

$$f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   pour $x \neq 0$, *vérifier que le résultat précédent n'est plus valable pour* f *dérivable de dérivée non bornée.*

Exercice 68 *On désigne par $\mathcal{H}$ le demi-plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Montrer que, pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.*
2. *Soit z un nombre complexe. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.*

   La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

3. *Montrer que :*

$$\Gamma(1) = 1 \ \text{et}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. *Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{3}$$

5. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(n+1) = n! \ \text{et}\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

6.
   (a) *Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $(z, \alpha) \in \mathcal{H}^2$.*

   (b) *Montrer que :*

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}dt = \Gamma(z+1)\zeta(z+1, \alpha)$$

   où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \zeta(z+1, \alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

   En particulier, pour $\alpha = 1$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1}dt = \Gamma(z+1)\zeta(z+1)$$

   où ζ est la fonction dzéta de Riemann.

7. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :*

$$I_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

   (a) *Montrer que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = I_n(z)$$

(b) *En déduire que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(formule d'Euler).

8. *Montrer que :*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

(formule de Wallis).

9.

(a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1}\left(1 + \frac{z}{2n+1}\right) \frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

(formule de Legendre).

10. *On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R},\ f(x,u) = \begin{cases} 0 \ si\ u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \ si\ u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

(a) *Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\, du$$

(b) *Montrer que, pour tout réel u, on a :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(c) *Montrer que pour tout $(x,u) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a :*

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \ si\ u \leq 0 \\ (1+u)\, e^{-u} \ si\ u > 0 \end{cases}$$

(d) *En déduire la formule de Stirling :*

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

11. *Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

12. *En utilisant l'équation fonctionnelle (3), montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.*
13. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

14. ***La formule des compléments.***
On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

(a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(c) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

(e) *Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on a :*

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

(f) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

(h) *En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

– VII – Théorèmes de changement de variables et de Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Rappelons les théorèmes de Fubini et de changement de variables.

Pour les fonctions mesurables positives, on dispose du théorème de Fubini-Tonelli utile pour justifier l'intégrabilité d'une fonction de plusieurs variables.

On place sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ muni de la mesure de Lebesgue.

Théorème (Fubini-Tonelli) : Pour $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^+$ mesurable, toutes les intégrales considérées ci-dessous ont un sens et on a l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Théorème (Fubini-Lebesgue) : Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ est intégrable si, et seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy < +\infty$$

les rôles de x et y pouvant être permutés.
Dans ce cas, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Théorème (changement de variables) : Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \to U$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
En notant $J_\varphi : x \in V \mapsto \det(d\varphi(x))$ le déterminant jacobien de φ, une fonction mesurable $f : U \to \mathbb{C}$ est intégrable sur U si, et seulement si, la fonction $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur V et dans ce cas, on a :

$$\int_U f(y)\,dy = \int_V f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|\,dx$$

Exercice 69 *Quelle est l'image de $\mathcal{U} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ par l'application qui à (x,y) associe $(x+y, y)$? Montrer que cette application est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{U}} e^{-(x+y)^2} dx\,dy$.*

Exercice 70

1. *Montrer que la fonction $f : (x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ est intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+^\star$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)\,e^{-y}}{y}\,dy$.*

Exercice 71 *Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$.*

1. *Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto y^x$ est intégrable sur le rectangle $[a,b] \times [0,1]$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\,dy$.*

Exercice 72 *La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-xy}\sin(x)\sin(y)$ est-elle intégrable sur $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$?*

Exercice 73 *Soit f la fonction définie sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1. *La fonction f est-elle intégrable sur R ?*
2. *Calculer une primitive de* $\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Calculer, pour tout* $y \in]0,1[$ *:*
$$\varphi(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$
4. *Montrer que :*
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$$

Exercice 74 *Soient f, g les fonctions définies sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ et } g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

1. *Montrer que f est intégrable sur R et calculer* $\int_R f(x,y)\,dxdy$.
2.
   (a) *Calculer, pour tout* $y \in]0,1[$ *:*
   $$\varphi(y) = \int_0^1 g(x,y)\,dx$$
   (b) *Calculer :*
   $$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx \right) dy \text{ et } \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy \right) dx$$
   et conclure.

Exercice 75 ***Fonction Béta.***
On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :

$$\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0 \}$$

1. *Soient u, v deux nombres complexes. Montrer que la fonction* $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{v-1}$ *est intégrable sur* $]0,1[$ *si, et seulement si,* $(u,v) \in \mathcal{H}^2$.
   Définition : *la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :*
   $$\forall (u,v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$
2. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*
   $$B(u,v) = B(v,u) \text{ et } B(u+1,v) = \frac{u}{u+v} B(u,v)$$
3. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*
   $$\lim_{n \to +\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$$
4. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a* $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.
5. *Calculer* $B(n+1, m+1)$, *pour n, m entiers naturels.*

– VII – Variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Une variable aléatoire réelle est une fonction mesurable X de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

La loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

(mesure image de $\mathbb{P}$ par X).

Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi μ, si $\mathbb{P}_X = \mu$ et on note alors $X \hookrightarrow \mu$.

Une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite intégrable si $\displaystyle\int_\Omega |X| \, d\mathbb{P} < +\infty$ et dans ce cas son espérance est le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

Pour X à valeurs positives, on peut définir $\mathbb{E}(X)$ qui est éventuellement infini.

Cette espérance dépend de $\mathbb{P}$ et devrait être notée $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$.

Le théorème de transfert nous dit que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X$$

où $\mathbb{P}_X$ est la loi de X, c'est-à-dire la mesure de probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

(mesure image de $\mathbb{P}$ par X).

On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

C'est un espace vectoriel et l'espérance $\mathbb{E}$ est linéaire.

Une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite de carré intégrable si $\displaystyle\int_\Omega X^2 d\mathbb{P} < +\infty$ (ce qui revient à dire que $X^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$).

On note $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires réelles de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X, Y sont dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors XY est dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ce qui résulte de $|XY| \leq \dfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)$) et on a :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

Il en résulte que $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ($Y = 1 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donc $X = X \cdot 1 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$).

La covariance de X et Y dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est le réel :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et la variance de $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Pour $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on peut définir $\mathbb{V}(X)$ qui est éventuellement infini.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les espérances, on déduit que :

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il existe un réel $a > 0$ et un réel b tels que $Y = aX + b$ presque sûrement (i. e. $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est la fonction de répartition de sa loi $\mathbb{P}_X$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Deux variables aléatoires ont la même loi si, et seulement si, elles ont la même fonction de répartition puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$.

La fonction de répartition F_X est croissante avec, pour tout réel x :

$$\lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x),\ \lim_{t \to x^-} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}(\{x\})$$

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$$

et l'ensemble $\mathcal{D}_X = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\{x\}) > 0\}$ de ses points de discontinuité est dénombrable.(exercice 19).

Une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est indépendante si, et seulement si, pour tout famille $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ de boréliens, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \in B_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in B_k)$$

Une variable aléatoire réelle X est dite à densité si sa loi $\mathbb{P}_X$ est à densité, c'est-à-dire qu'il existe une fonction mesurable $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x) f_X(x)\, dx = \int_B f_X(x)\, dx$$

(intégrale de Lebesgue).

Cette densité est uniquement déterminée modulo l'égalité presque partout.

En particulier, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$$

donc f_X est Lebesgue-intégrable.

Pour tous réels $a < b$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \int_a^b f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(a \leq X) = \mathbb{P}(a < X) = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx$$

et :

$$F_X(a) = \mathbb{P}(a \geq X) = \mathbb{P}(a > X) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, la variable aléatoire $X + Y$ est alors de densité h définie par :

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, f(x-t)\, dt$$

La fonction h est le produit de convolution de f et g et est notée $f * g$.

Exercice 76 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*
Montrer que :

1. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}$$
(inégalité de Markov) ;
2. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$(\mathbb{P}(X \geq \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) \geq \alpha)$$
$$(\mathbb{P}(X \leq \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) \leq \alpha)$$
$$(\mathbb{P}(X = \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) = \alpha)$$
3. *pour toute fonction strictement croissante* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi \circ |X|)}{\varphi(\alpha)}$$
4. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$
(inégalité de Tchebychev) ;
5. *pour toutes variables aléatoires* X, Y *dans* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $X > 0$, $Y > 0$ *et* $XY \geq 1$ *presque sûrement, on a :*
$$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \geq 1$$
6. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $X > 0$ *presque sûrement, on a :*
$$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$$

Exercice 77 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Montrer que, pour tous* A, B *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*
   (a)
$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A),\ \operatorname{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B),\ \mathbb{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$
   (b)
$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$
   (c)
$$|\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$$
2. *Soit* $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$.
En utilisant la formule de Poincaré pour les fonctions indicatrices, montrer que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$
(formule de Poincaré).

Exercice 78 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements.*
On rappelle que :

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k$$

Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)$$

Exercice 79 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements mutuellement indépendants.*

1. *En notant* $\mathbb{P}(A)$ *la probabilité qu'aucun des événements* A_n *ne soit réalisé, montrer que :*

$$\mathbb{P}(A) \leq \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\right)$$

2. *En déduire que :*

$$\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) = -\infty\right)$$

Exercice 80 *Soit* X *une variable aléatoire réelle de densité* f *sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Montrer que, pour tout $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme* $\varphi : \mathbb{R} \to]a, b[$ *avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, *la variable aléatoire* $\varphi(X)$ *a pour densité la fonction* $g = f \circ \varphi^{-1} \left|(\varphi^{-1})'\right| \mathbf{1}_{]a,b[}$.
Préciser le cas où φ *est une fonction affine.*

Exercice 81 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ *une famille finie de variables aléatoires indépendantes sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $(F_k)_{1\leq k\leq n}$ *la suite des fonctions de répartition correspondantes.*

1. *Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire* $X = \min\limits_{1\leq k\leq n} X_k$ *est :*

$$F_X = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_k)$$

et que celle de la variable aléatoire $Y = \max\limits_{1\leq k\leq n} X_k$ *est :*

$$F_Y = \prod_{k=1}^{n} F_k$$

2. *Montrer que, pour tous réels* $x < y$, *on a :*

$$\mathbb{P}(x < X \leq Y \leq y) = \prod_{k=1}^{n} (F_k(y) - F_k(x))$$

Exercice 82 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Montrer que pour toute variable aléatoire réelle* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \begin{cases} \mathbf{1}_B(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(B)} \\ \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X)) = \mathbb{P}(X \in B) \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{]-\infty,x]}(X)\right)$$

2. *Montrer que pour toute variable aléatoire réelle* X *sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *admettant une densité* f*, on a :*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X)) = \int_B f(x)\, dx$$

3. *Soient* X *une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbf{1}_{B_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *une fonction borélienne positive (les* b_n *sont des réels positifs et les* B_n *des boréliens).*
Montrer que :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbb{P}(X \in B_n)$$

dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

4. *Soient* X *une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *admettant une densité* f *et* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne telle que* $\varphi(X)$ *soit intégrable.*
Montrer que :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx$$

(théorème de transfert).
Pour $\varphi(x) = x^\alpha$*, où* $\alpha > 0$*, la quantité :*

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \int_{\mathbb{R}} x^\alpha f(x)\, dx$$

est le moment d'ordre α *de* X.
Pour $\alpha > 1$ *et* $\varphi(x) = (x - \mathbb{E}(X))^\alpha$*, la quantité :*

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^\alpha) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^\alpha f(x)\, dx$$

est le moment centré d'ordre α *de* X.

5. *Soit* $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ *une famille finie de variables aléatoire réelle indépendantes sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   (a) *Montrer que, pour toute famille finie* $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ *de boréliens, on a l'égalité dans* $\mathbb{R}^+$ *:*

   $$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k}(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_k}(X_k))$$

   (b) *Montrer que, pour toute famille finie* $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ *de fonctions étagées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$*, on a l'égalité dans* $\mathbb{R}^+$ *:*

   $$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$

   (c) *Montrer que, pour toute famille finie* $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ *de fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$*, on a l'égalité dans* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *:*

   $$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$

   (d) *Montrer que, pour toute famille finie* $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ *de fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que chaque variable aléatoire* $\varphi_k(X_k)$ *soit intégrable, on a l'égalité dans* $\mathbb{R}$ *:*

   $$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$

6. *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que pour toute fonction borélienne bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\varphi(X)$ est intégrable.*
7. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie de variables aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*
Montrer que cette famille est indépendante si, et seulement si, pour toute famille finie $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$

Exercice 83 *Soit X une variable aléatoire réelle positive sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

1. *Montrer que, pour tout réel $\alpha \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^{\alpha} \mathbb{P}(X > x)$ est Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*
2. *Montrer que, pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout $\omega \in \Omega$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha} \mathbf{1}_{(X>x)}(\omega)\, dx = \frac{(X(\omega))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

3. *Montrer que X admet un moment d'ordre $\alpha \geq 1$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > x)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et dans ce cas, on a :*

$$\mathbb{E}(X^{\alpha}) = \alpha \int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > x)\, dx$$

Exercice 84 *Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*
On dit que X est sans mémoire si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+},\ \mathbb{P}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x)\, \mathbb{P}(X > x)$$

1. *Montrer qu'une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est sans mémoire.*
2. *On se donne une variable aléatoire sans mémoire X de fonction de répartition F_X.*
   (a) *Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) = 0$ si, et seulement si, $\mathbb{P}(X > x) = 0$ pour tout réel $x > 0$.*
   (b) *En supposant que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, montrer que X suit une loi exponentielle.*

Exercice 85

1. *Soit $P(X) = aX^2 - 2bX + c$ un polynôme réel de degré 2 avec $a > 0$.*
Calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-P(t)} dt$$

2. *Montrer que si X_1, X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales de paramètres respectifs (μ_1, σ_1) et (μ_2, σ_2), alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale de paramètres $\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.*
3. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi normale de paramètres $(\mu_k, \sigma_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$.*
Montrer que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi normale de paramètres $\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\right)$.
En particulier, dans le cas où les X_k suivent toutes une même loi normale de paramètres $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$, la variable aléatoire :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$$

suit une loi normale centrée réduite.

Exercice 86 *On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ si elle possède une densité définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{a,\lambda}(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On note $X \hookrightarrow \Gamma(a, \lambda)$.

1. *Montrer qu'une variable aléatoire réelle X qui suit une loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet une espérance et une variance données par :*
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$$
2. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi gamma de paramètres $a_k > 0$ et $\lambda > 0$.*
Montrer que la variable aléatoire $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi gamma de paramètres $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ et λ.
3. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.*
Montrer que la variable aléatoire $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi gamma de paramètres n et λ.
4. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi normale centrée réduite.*
Montrer que la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$ suit une loi gamma de paramètres $\frac{n}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 87

1. *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x < a$ et $f(x) = f(b)$ pour tout $x > b$.*
On suppose que, pour tout réel $x \in [a, b]$, on dispose d'une suite $(Y_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes de carrées intégrables et telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{n,x}) = x$$
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(Y_{n,x}) = 0$$
la convergence étant uniforme sur $[a, b]$.
Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(Y_{n,x})) = f(x)$$
la convergence étant uniforme sur $[a, b]$.
2. *On se donne une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et on lui associe la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des polynômes de Bernstein définie par :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$
Montrer, en utilisant le résultat de la question précédente, que la suite de fonctions polynomiales $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3. *On se donne un réel $a > 0$ et une fonction continue $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ que l'on prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x > a$.*
   On lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, a],\ u_n(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k$$

   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bien définie et continue sur $[0, a]$.*
   (b) *Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.*

– IX – Espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski (qui se déduit de l'inégalité de Hölder), on vérifie que $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel des fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une fonction mesurable bornée et d'une fonction nulle presque partout.

Une fonction $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est de la forme $f = g + h$ où g est mesurable bornée et $h = 0$ presque partout.

On a donc $|f| \leq \|g\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ presque partout.

Réciproquement s'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X \setminus A$ où A est une mesurable de X de mesure nulle, on peut écrire que $f = g + h$ avec $g = f \cdot \mathbf{1}_{X\setminus A}$ mesurable bornée et $h = \mathbf{1}_A$ est nulle presque partout.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient $\dfrac{\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)}{\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)}$ où $\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ formé des fonctions nulles presque partout.

Une fonction $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est identifiée à sa classe d'équivalence $\overline{f} \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Pour $f = g + h \in \mathcal{L}^\infty$ où g est mesurable bornée et h est nulle presque partout, on a $\overline{f} = \overline{g}$ dans L^∞ et $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |g(x)|$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'application :

$$f \in L^p \mapsto \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme et l'espace $\left(L^p, \|\cdot\|_p\right)$ est complet.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ est la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on désigne par $\mathrm{Supp}(f)$ l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels x tels que $f(x) \neq 0$, soit :

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{C}^*)}$$

On dit que f est à support compact si $\mathrm{Supp}(f)$ est compact.

Exercice 88

1. *Soient p, q deux réels strictement positifs tels que* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.
   Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2,\ xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

2. *Soient r un entier naturel non nul, $p_1, \cdots, p_r$ une suite d'éléments de $[1,+\infty]$ telle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{p_k} = 1$ *et, pour tout k compris entre 1 et r, f_k une fonction dans $\mathcal{L}^{p_k}(\mathbb{R})$.*
   Montrer que la fonction $f = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} f_k$ *est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que* $\|f\|_1 \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{r}\|f_k\|_{p_k}$.

Exercice 89 *On se donne $p \in [1,\infty]$.*

1. *Montrer que, si f, g sont à valeurs réelles et dans $\mathcal{L}^p$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont aussi dans $\mathcal{L}^p$.*
2. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de L^p à valeurs réelles qui convergent dans L^p vers f et g respectivement.*
   Montrer que les suites $(\max(f_n,g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\min(f_n,g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans L^p vers $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ respectivement.
3. *Soient $q \in [1,\infty]$ tel que* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} \leq 1$ *et $r \in [1,\infty]$ défini par* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$.
   (a) *Montrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a alors $fg \in L^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
   (b) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de L^p qui convergent dans L^p vers f et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^q qui convergent dans L^q vers g montrer alors que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^r.*
4. *On suppose que p est fini. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p et si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans L^∞ qui converge vers g presque partout, montrer alors que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^p.*

Exercice 90 *$(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré avec $0 < \mu(X) < +\infty$.*

1. *Montrer que pour $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$ et que :*
$$\forall f \in \mathcal{L}^q,\ \|f\|_p \leq \|f\|_q (\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

2. *Soit $f \in \mathcal{L}^\infty$ non identiquement nulle.*
   (a) *Montrer que :*
$$\limsup_{p\to+\infty}\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$
   (b) *Montrer que :*
$$\forall \alpha \in \left]0, \|f\|_\infty\right[,\ \liminf_{p\to+\infty}\|f\|_p \geq \alpha$$
   (on pourra utiliser l'ensemble $A_\alpha = |f|^{-1}([\alpha,+\infty[))$ et en déduire que :
$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$$

3. *Montrer que :*
$$\mathcal{L}^\infty = \left\{ f \in \bigcap_{p\geq 1}\mathcal{L}^p \mid \sup_{p\geq 1}\|f\|_p < \infty \right\}$$

4. Donner un exemple de fonction $f \in \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{L}^p$ *telle que* $f \notin \mathcal{L}^\infty$.

Exercice 91 $\mathbb{R}^{+,*}$ *est muni de la tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue.*
On se donne un réel $p \in]1, \infty[$ *et* $q = \dfrac{p}{p-1}$ *est l'exposant conjugué de* p *(on a* $q \in]1, \infty[$ *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*).*

1. *Montrer que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{R})$, *on peut définir la fonction* F *sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \end{cases}$$

et que cette fonction est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
À toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{R})$, *on associe la fonction* $\Phi(f)$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \Phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

2. *On se propose de montrer ici que* Φ *est une application linéaire continue de* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{R})$ *avec, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{R})$, $\|\Phi(f)\|_p \leq q\|f\|_p$, *ce qui revient à dire que :*

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} \frac{1}{x^p}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx \leq q^p \int_{\mathbb{R}^{+,*}} |f(x)|^p\,dx \tag{4}$$

(inégalité de Hardy).

   (a) *Montrer que, si* $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}$ *est continue, à valeurs positive et à support compact dans* $\mathbb{R}^{+,*}$, *la fonction* $\Phi(f)$ *est alors dans* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{R})$ *avec :*

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} (\Phi(f)(x))^p\,dx = q\int_{\mathbb{R}^{+,*}} (\Phi(f)(x))^{p-1} f(x)\,dx$$

   En déduire que, dans ce cas, l'inégalité (4) *est vérifiée.*

   (b) *Montrer que l'inégalité* (4) *est vérifiée pour* $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}$ *continue et à support compact dans* $\mathbb{R}_+^\star$.

   (c) *Montrer que l'inégalité* (4) *est vérifiée pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{R})$.

   (d) *Soit* $(f_n)_{n\geq 2}$ *la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}}\mathbf{1}_{]1,n[}(t)$$

      i. *Calculer* $\|f_n\|_p$ *pour tout entier* $n \geq 2$.

      ii. *Vérifier que, pour tout entier* $n \geq 2$, *on peut écrire* $\|\Phi(f_n)\|_p^p$ *sous la forme :*

$$\|\Phi(f_n)\|_p^p = q^p(u_n + \ln(n) + v_n)$$

      où :

$$u_n = \int_1^n \left(\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p - \frac{1}{x}\right)dx$$

      et :

$$v_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)^p$$

iii. Montrer que l'application Φ est linéaire continue de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ avec :

$$\|\Phi\| = q = \frac{p}{p-1}$$

Exercice 92

1. *Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ où $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que :*
   - *pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;*
   - *la fonction $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$;*
   - $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

   La fonction $f*g$ est le produit de convolution de f et g.
2. *Montrer que $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}),+,*)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative non unitaire.*

Exercice 93 *Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R},\mathbb{C})$ où $1 \leq p,q \leq +\infty$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$.*

1. *Justifier l'existence de $r \in [1,+\infty]$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$.*
2. *Pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, montrer que le produit de convolution $f*g$ est bien défini et que $f*g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ avec $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
3. *On suppose que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > 1$.*
   (a) *Vérifier que $1 \leq p,q \leq r < +\infty$ et $p' = \frac{pr}{r-p}$, $q' = \frac{qr}{r-q}$ sont dans $[1,+\infty]$ avec $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}+\frac{1}{r} = 1$.*
   (b) *Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto |f(x-t)|^{\frac{p}{r}} |g(t)|^{\frac{q}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, la fonction $t \mapsto |f(x-t)|^{1-\frac{p}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ et la fonction $t \mapsto |g(t)|^{1-\frac{q}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.*
   (c) *En déduire que le produit de convolution $f*g$ est bien défini et que $f*g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R},\mathbb{C})$ avec $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (inégalité de Young).*

Exercice 94 *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel a, on désigne par $\tau_a f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_a f(x) = f(a+x)$.*

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support compact.*
   (a) *Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $h \in [-1,1]$, on a $|\tau_h f - f| \leq 2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-\alpha,\alpha]}$.*
   (b) *Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, on a $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.*
2. *Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$ (théorème de continuité en moyenne dans $\mathcal{L}^p$).*

Exercice 95 *On appelle suite régularisante toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que :*

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t)\,dt = 1$;
- *la suite $(\|\alpha_n\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ;*

– *pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} |\alpha_n(t)|\, dt = 0$$

1. *On se donne une fonction* $\alpha \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ *telle* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\, dt = 1$ *et on lui associe la suite de fonctions* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha_n(t) = n\alpha(nt)$$

   Montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite régularisante.*

2. *Soit* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite régularisante dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

   (a) *Montrer que pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $f * \alpha_n$ *est dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

   (b) *Montrer que si de plus toutes les fonctions* α_n *sont continues à support compact, alors pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *toutes les fonctions* $f * \alpha_n$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

   (c) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue et à support compact.*

      i. *Montrer que la suite* $(f * \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$.

      ii. *Montrer que la suite* $(f * \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$.

   (d) *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Montrer que la suite* $(f * \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$.

Exercice 96

1. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

   (a) *Montrer qu'on peut définir la fonction* $\widehat{f}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt} dt$$

   Cette fonction $\widehat{f}$ *est la transformée de Fourier de* f.

   (b) *Montrer que cette fonction* $\widehat{f}$ *est continue et bornée sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$ *(ce qui se traduit en disant que l'application* $f \mapsto \widehat{f}$ *est linéaire continue de* $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ *dans* $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, *où* $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est l'espace des fonctions continues et bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$*).*

2. *Montrer que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *on a :*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \widehat{f}(x) = 0$$

   (théorème de Riemann-Lebesgue).

3. *Soient* f, g *dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Montrer que* $f \cdot \widehat{g}$ *et* $\widehat{f} \cdot g$ *sont dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *avec :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx$$

4. *Soient* f, g *dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Montrer que* $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

5. *Calculer, pour tout réel* $a > 0$, *la transformée de Fourier de la fonction* $\varphi_a : t \mapsto e^{-at^2}$.

6. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(a) *Montrer que, pour tout réel t, on a :*

$$\lim_{a\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-\left(ax^2-ixt\right)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{ixt}dx$$

(b) *En supposant de plus que la fonction f est bornée et que sa transformére de Fourier $\widehat{f}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, montrer que pour tout réel x, on a :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-x)$$

(formule d'inversion de Fourier).

7. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\ a_n(t) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{|t|}{n}}$$

(a) *Calculer, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, la transformée de Fourier $\alpha_n = \widehat{a_n}$ de a_n.*

(b) *Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante.*

(c) *Montrer que, pour toute fonction $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a :*

$$(f*\alpha_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t)\,\widehat{f}(t)\, e^{ixt}dt$$

(d) *En déduire la formule d'inversion de Fourier.*

– X – Séries de Fourier

À toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier exponentiels définis par :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi nt}dt$$

Comme f est 1-périodique, elle est intégrable sur tout intervalle $]a,a+1[$ et on a :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_a^{a+1} f(t)\, e^{-2i\pi nt}dt$$

En particulier, pour $a=-\dfrac{1}{2}$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\, e^{-2i\pi nt}dt$$

ce qui est intéressant pour f paire ou impaire.

On note $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{2i\pi kx}$$

et $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des moyennes de Cesàro des $S_k(f)$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ T_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$$

Le produit de convolution de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 qui est dans $\mathcal{L}^1(]0,1[,\mathbb{C})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 qui est dans $\mathcal{L}^p(]0,1[,\mathbb{C})$ où $1 \leq p \leq +\infty$ est la fonction :

$$f * g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 f(x-t)\, g(t)\, dt$$

Tenant compte de la 1-périodicité de f et g, le changement de variable $y = x - t$ donne :

$$f * g(x) = \int_{x-1}^{x} f(y)\, g(x-y)\, dy = g * f(x)$$

Cette fonction est périodique de période 1 et dans $\mathcal{L}^p(]0,1[,\mathbb{C})$ (voir l'exercice 92).

On note $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des noyaux de Dirichlet définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2i\pi kx}$$

et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des noyaux de Fejèr définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k$$

Exercice 97

1. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$. Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^{n\alpha} \varphi(t)\, dt = \alpha \int_0^1 \varphi(t)\, dt$$

2. *Soient $1 < p \leq +\infty$, $1 \leq q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 qui est dans $\mathcal{L}^p(]0,1[,\mathbb{C})$.*
En utilisant la densité de l'ensemble des fonctions en escaliers dans $\left(\mathcal{L}^q(]0,1[,\mathbb{C}), \|\cdot\|_q\right)$, montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^q(]0,1[,\mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(nt)\, f(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t)\, dt \int_0^1 f(t)\, dt$$

3. *Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on a :*

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$$

(théorème de Riemann-Lebesgue).

4. *Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin^2(\pi nt)\, f(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)\, dt$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\sin(\pi nt)|\, f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(t)\, dt$$

Exercice 98 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$.*

1. *Montrer que, pour tout entier naturel k, la fonction θ_k définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par :*

$$x \mapsto \frac{\sin(k\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

   se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. *Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :*

$$D_n(x) = \theta_{2n+1}(x)$$

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) = (f * D_n)(x) &= \int_0^1 f(t) \frac{\sin((2n+1)\pi(x-t))}{\sin(\pi(x-t))} dt \\ &= \int_0^1 f(x-t) \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt \end{aligned}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \theta_n^2(x)$$

$$\begin{aligned} T_n(f)(x) = (f * F_n)(x) &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(t) \frac{\sin^2((n+1)\pi(x-t))}{\sin^2(\pi(x-t))} dt \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x-t) \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt \end{aligned}$$

3. *Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :*

$$S_n(f)(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt$$

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

4. *Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi(x-t))}{\sin(\pi(x-t))} dt = \frac{1}{2}$$

   et :

$$\frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2((n+1)\pi(x-t))}{\sin^2(\pi(x-t))} dt = \frac{1}{2}$$

5. *Montrer que si f admet une limite à gauche et à droite en tout point, on a alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

6. *On dit qu'un réel x est un point de Lebesgue si $f(x)$ est fini et :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt = 0$$

   Montrer que, pour un tel point, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(f)(x) = f(x)$.

7. *Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*