Suites récurrentes

L'objectif de ce problème sera d'approfondir l'étude des suites récurrentes, qui, à ce jour, ne sont étudiées qu'en surface au lycée. Si bien que l'on pourra s'accorder à dire que les exercices que les élèves de lycée traitent sont construits sur la base d'une réflexion de fond qu'ils ne connaissent pas. Le concept de suite récurrente reste alors pour eux la base d'exercices un peu magiques où tout se termine bien. Cela n'est pourtant pas évident dans le cas général ou bien dans les cas plus complexes.

Dans toute la suite, $u = (u_n)$ sera une suite de nombres réels définie par son terme initial ainsi qu'une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose en outre que la fonction de récurrence f est une fonction continue sur un intervalle I contenant tous les termes de la suite.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Avant de démarrer la résolution du problème, nous allons rappeler quelques propriétés élémentaires qu'il faut connaître pour faire le travail proposé. S'il le souhaite, le lecteur pourra se convaincre des propriétés indiquées dans cette partie.

Définition 1 : *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Ka fonction f est dite continue en* x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ x \in \ ]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\ \Rightarrow \ f(x) \in \ ]f(x_0) - \varepsilon \ , \ f(x_0) + \varepsilon[\ .$$

Définition 2 : *Une fonction est dite continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout réel de I.*

Définition 3 : *On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite un réel ℓ et on note* $\lim u_n = \ell$ *si* :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ n > N \Rightarrow u_n \in \ ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Propriété 1 : *Soit (u_n) une suite convergente et soit ℓ un réel tel que* $\lim u_n = \ell$. *alors* $\lim u_{n+1} = \ell$.

Propriété 2 : *Soit (u_n) une suite définie à l'aide d'une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que cette suite converge vers un réel ℓ et que f est continue en ℓ. Alors* $\lim f(u_n) = f(\ell)$.

PARTIE 1 : EN FINIR AVEC LES DÉDUCTIONS HÂTIVES

L'objectif est ici de voir s'il existe des analogies entre le comportement de f et celui de (u_n). On introduit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = 0,25u_n + 3 \end{cases} .$$

1) Donner l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2) Rapidement, montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, et qu'elle n'est ni majorée ni minorée.
3) L'objectif est de voir qu'il en est tout autrement pour (u_n).
   a) Montrer par récurrence que tous les termes de (u_n) sont dans l'intervalle $[4, 8]$.
   b) Montrer que (u_n) est strictement décroissante.
   c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Malgré les observations que nous venons de faire, l'étude de f pourra servir de levier pour étudier (u_n). Les parties suivantes ont pour objectif de préciser comment.

PARTIE 2 : ÉTUDIER LES VARIATIONS ET LES BORNES

1) On suppose f croissante sur I.
   a) Rappeler la définition d'une suite croissante et celle d'une suite décroissante.
   b) Montrer que si $u_0 \leq u_1$, alors la suite (u_n) est croissante .
   c) Montrer que si $u_0 \geq u_1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
   d) En déduire ce que la croissance de f assure sur le comportement de (u_n).
2) Que se passe-t-il si f est décroissante sur I ?

3) On considère la suite (a_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \end{array} \right. .$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [3, 5] \ .$$

b) Etudier alors les variations de (a_n).

c) Montrer que (a_n) converge.

Le type d'étude que l'on vient de mener permet de garantir l'existence d'une limite finie dans bien des cas. Il reste à apprendre à la calculer. C'est l'objet de ce qui suit.

PARTIE 3 : LES LIMITES AVEC LES THÉORÈMES DE POINT FIXE

On reprend (u_n), f et I comme au début.

1) **Un premier théorème pour préciser les limites possibles ...**

a) En déduire que si (u_n) converge et si $\lim(u_n) = \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

b) Appliquer ce théorème à l'étude de la limite de la suite (a_n) de la partie 2.

c) L'existence de la limite est-elle assurée dans le cas général ? Pourquoi ? Quels points faibles aurait alors ce théorème ?

2) **Un cas où la limite n'existe pas ...**

Soit (b_n) définie par

$$\left\{ \begin{array}{c} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n + 1 \end{array} \right. .$$

a) Si (b_n) converge, alors que vaut sa limite ?

b) Montrer par récurrence que $b_n \geq 1$ pour tout réel n.

c) Conclure.

3) **Un théorème de point fixe garantisant l'existence de la limite ...**

Soit $f : [a, +\infty[\to [a, +\infty[$ une fonction strictement contractante, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda \in [0, 1[$ telle que :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

a) Montrer qu'il existe un réel $b \in]a, +\infty[$ tel que $f(b) < b$.

b) Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in [a, +\infty[$ (*i. e.* $f(\alpha) = \alpha$).

c) Montrer que, pour tout réel $u_0 \in [a, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers le point fixe α de f.

PARTIE 4 : ÉTUDES COMPLÈTE DE SUITES RÉCURRENTES

1) On considère la suite (c_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} c_0 = \alpha \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}(c_n)^3 \end{array} \right. , \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dans chacun des cas suivants :

$$a)\ \ \alpha < -2 \ \ ,\ \ b) -2 < \alpha < 0 \ \ ,\ \ c)\ \ 0 < \alpha < 2 \ \ ,\ \ d)\ \ \alpha > 2 \ \ ,\ \ e)\ \ \alpha \in \{-2, 0, 2\} \ .$$

étudier les variations de (c_n), ses éventuelles bornes, et si elle converge (le cas échéant, déterminer la limite). L'étude du signe de $\frac{1}{4}x^3 - x$ pourra s'avérer très utile pour comparer $c_0 = \alpha$ et $c_1 = \frac{1}{4}\alpha^3$. Plus généralement, dans ce type de situation, il est souvent commode d'étudier le signe de $f(x) - x$ où f est la fonction de récurrence.

PARTIE 5 : POINTS FIXES ATTRACTIFS ET POINTS FIXES RÉPULSIFS

Les travaux précédents nous ont conduit à constater que certains points fixes s'avèrent être la limite d'une suite étudiée, d'autres points fixes semblent au contraire ne pas être "approchables". Ce ne sont pas de simples apparences.

Selon la valeur de f au point fixe, il s'avère que dans certains cas, le point fixe tend à "attirer" les termes de la suite vers lui et dans d'autres cas, au contraire, à les "repousser". Cela aboutit en fait à la classification des points fixes en points fixes attractifs et points fixes répulsifs. L'objet de cette partie est de déterminer les propriétés de f qui soient à même d'assurer qu'un point fixe soit dans un cas ou dans l'autre. Le travail conduit à la fin de la partie 3 apporte déjà un critère d'attractivité, mais il n'a pas encore indiqué de moyen pour démontrer qu'une application soit strictement contractante.

1) **Inégalités des accroissements finis : d'un contrôle sur f' à un contrôle sur f ...**

On suppose que f est dérivable sur I.

a) On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f' \leq M$ sur I. En étudiant les fonctions $g : x \mapsto mx - f'(x)$ et $h : x \mapsto Mx - f'(x)$, montrer que pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \ .$$

b) On suppose maintenant qu'il existe un réel positif M tel que $|f'| \leq M$ sur I. En remarquant que $|f'| \leq M$ équivaut à $-M \leq f' \leq M$, montrer que pour tous réels a et b de I et quel que soit leur ordre cette fois, on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a| \ .$$

c) On suppose enfin qu'il existe un réel positif m tel que $|f'| \geq m$ sur I. Montrer que pour tous réels a et b de I on a :

$$|f(b) - f(a)| \geq m\,|b-a| \ .$$

d) Application directe : montrer que pour tous réels a et b de $\mathbb{R}$, on a :

$$|\sin b - \sin a| \leq |b-a| \ .$$

2) **Attraction et répulsion ...**

On suppose que f est dérivable et de dérivée continue sur I. Soit $\ell \in I$ un point fixe de f.

a) On suppose que $|f'(\ell)| < 1$.En utilisant la continuité de la dérivée, montrer qu'il existe un intervalle ouvert $J_\delta =]\ell - \delta, \ell + \delta[$ (contenant donc ℓ) et un réel $M < 1$ tel que $|f'| \leq M$ sur J_δ.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que s'il existe un rang p tel que $u_p \in J_\delta$, alors pour tout entier naturel $n \geq p$, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M\ \ |u_n - \ell|$$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq p$, on a :

$$|u_n - \ell| \leq M^{n-p}\,|u_p - \ell|$$

d) En déduire que (u_n) converge, et indiquer sa limite.

e) Que se passe-il si on suppose $|f'(\ell)| > 1$? Justifier.

On vient ainsi de montrer que si $|f'(\ell)| < 1$, alors une suite récurrente définie à l'aide de f et dont les termes s'approchent suffisamment de ℓ converge vers vers ℓ. On dit que ℓ est un point fixe attractif.
De même, si $|f'(\ell)| > 1$, alors une suite récurrente définie à l'aide de f et dont les termes s'approchent suffisamment de ℓ ne converge pas vers ℓ mais au contraire, s'en écarte spontanément. On dit que ℓ est un point fixe répulsif.
On peut grâce à cela réduire l'ensemble des limites finies possibles pour une suite récurrente afin cibler l'étude de son comportement asymptotique.

La partie suivante s'intéressera aux points fixes attractifs ℓ tels que $f'(\ell) = 0$ en raison de la vitesse de convergence qui en découle.

PARTIE 6 : SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

On considère la suite (d_n) définie par

$$\begin{matrix} d_0 = \lambda \\ d_{n+1} = ad_n + b \end{matrix} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \ .$$

1) Etudier les variations de (d_n). On distinguera selon les valeurs de a, b et λ.
2) Déterminer si (d_n) converge ou diverge et préciser, s'il y a lieu, la limite.
3) On suppose $a \neq 1$. Soit ℓ tel que $\ell = a\ell + b$. Montrer que la suite (e_n) définie par $e_n = d_n - \ell$ est géométrique, préciser sa raison, son terme général et en déduire le terme général de (d_n).
4) En déduire une formule pour calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} d_i$.

PARTIE 7 : NEWTON ET LA SUPERATTRACTION

L'objectif est de résoudre des équations du type $f(x) = 0$ en les transformant en un problème de point fixe dans lequel s'invite une suite qui sera construite de manière à converger vers une solution de l'équation $f(x) = 0$. Sous certaines hypothèses que nous verrons, cette convergence pourra s'avérer très rapide. Une méthode d'approximation des racines carrées appelée méthode de Héron sera étudiée comme application.

Dans cette partie, on considère :
- Une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I = [c, d]$ avec dérivée seconde continue sur $[c, d]$. On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et que f' ne s'annule pas sur $[c, d]$.
- Un réel u_0 proche de la solution α de l'équation $f(x) = 0$ prise dans l'intervalle $]c, d[$.S'il le souhaite, le lecteur pourra se convaincre de l'existence et de l'unicité de la solution α.
- Des réels u_n définis de sorte que pour tout entier naturel n, u_{n+1} soit l'abscisse du point d'intersection de la tangenté T_n à C_f au point d'abscisse u_n avec l'axe des abscisses.

1) Déterminer pour tout entier naturel n une équation de la tangente T_n. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} .$$

2) Soit $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que $f(x) = 0$ équivaut à $F(x) = x$.

3) En utilisant la continuité de f'' sur $[c, d]$, la continuité de $\frac{1}{f'}$ et le fait que que $f'(\alpha) \neq 0$,montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que :

$$x \in \;]\alpha - \delta_1 \; , \; \alpha + \delta_1[\implies f"(x) \in \;]f''(\alpha) - \varepsilon \; , \; f''(\alpha) + \varepsilon[$$

et $\delta_2 > 0$

$$x \in \;]\alpha - \delta_2 \; , \; \alpha + \delta_2[\implies \frac{1}{f'(x)} \in \;]\frac{1}{f'(\alpha)} - \varepsilon \; , \; \frac{1}{f'(\alpha)} + \varepsilon[\; .$$

4) En déduire l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$x \in \;]\alpha - \delta \; , \; \alpha + \delta[\implies \begin{cases} f"(x) \in \;]f''(\alpha) - \varepsilon \; , \; f''(\alpha) + \varepsilon[\\ \frac{1}{f'(x)} \in \;]\frac{1}{f'(\alpha)} - \varepsilon \; , \; \frac{1}{f'(\alpha)} + \varepsilon[\end{cases} .$$

On vient de montrer que la dérivée seconde et l'inverse de la dérivée première sont bornées sur un voisinage de α. Quitte à modifier c et d de sorte que, tout à la fois, on ait $[c, d] \subset \;]\alpha - \delta \; , \; \alpha + \delta[$ et donc à choisir u_0 suffisamment proche de α, peut donc supposer que la dérivée seconde et l'inverse de la dérivée première sont bornées sur $[c, d]$.

Partant de là, est assurée l"existence de deux réels M et M' tels que

$$\forall x \in [c, d] \; , \; |f''(x)| \leq M \quad \text{et} \quad \left| \frac{1}{f'(x)} \right| \leq M' \; .$$

5) Démontrer les proposition suivantes :

PROPOSITION 1 : *Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle* I contenant deux réels a et b tels que $a < b$, *et s'il existe deux réels* m et M tel que :

$$m \leq f''(x) \leq M \quad \forall x \in I \; ,$$

alors :

$$\forall a, b \in I, \; \frac{1}{2} m(b - a)^2 \leq \; f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) \leq \frac{1}{2} M(b - a)^2 \; .$$

Indication : On pourra étudier à l'aide de deux dérivations, les fonctions ϕ et ψ définies sur I par :

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}m(x-a)^2 \ ,$$
$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}M(x-a)^2 \ .$$

PROPOSITION 2 : *Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I* contenant deux réels a et b, *et s'il existe un réel M* tel que :

$$|f''(x)| \leq M \quad \forall x \in I \ ,$$

alors :

$$\forall a, b \in I \ , \ |f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)| \leq \frac{1}{2}M\,|b-a|^2 \ .$$

Indication : on

6) Montrer que pour $x \in [c,d]$, on a :

$$F(x) - \alpha = \frac{f(\alpha) - f(x) - (a-x)f'^(x)}{f'(x)} \ .$$

7) En utilisant les quatre questions précédentes, déduire l'existence d'un réel positif C tel que :

$$\forall x \in [c,d] \ , \ |F(x) - \alpha| \leq C\,|x-\alpha|^2 .$$

8) Quitte à prendre u_0 suffisamment proche de la solution α, on peut supposer que u_0 appartienne un intervalle de la forme de la forme $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\ \subset [c,d]$ avec $\delta > 0$ assez petit pour que $C\delta < 1$ (prendre $\delta = \frac{1}{2C}$ par exemple) . Montrer qu'alors :

$$\forall x \in [c,d] \ , \ |F(x) - \alpha| \leq C\,|x-\alpha|^2 \leq C\delta^2 < \delta \ .$$

9) On considère (u_n) définie par une relation du type $u_{n+1} = F(u_n)$ et on suppose que $u_0 \in I_\delta = \ ]\alpha-\delta, \alpha+\delta[$ avec δ assez patit pour que $C\delta < 1$.

a) Montrer que :

$$f(I_\delta) \subset I_\delta$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in I_\delta \ .$$

b) Montrer enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leq C\,|u_n - \alpha|^2$$

et après avoir obtenu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ C\,|u_n - \alpha| \leq (C\delta)^{2^n}$$

conclure sur la convergence de la suite (u_n).

PARTIE 8 : APPROXIMATION DES RACINES CARRÉES

Soit k un réel strictement positif. Afin de déterminer $\sqrt{k}$, nous allons chercher la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[1,2]$ avec $f(x) = x^2 - k$.

On introduit donc $F : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1) Montrer que pour tout réel x de $[1,2]$, $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)$ et que $F(x) - \sqrt{k} = \frac{\left(x-\sqrt{k}\right)^2}{2x}$.

2) On considère (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases} .$$

Calculer quelques termes et commenter.