Nombres complexes et géométrie

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Un vrai triangle dans le plan $\mathcal{P}$ est la donnée de trois points non alignés A, B, C. Un tel triangle est noté ABC.

On se donne quatre points A, B, C, D du plan deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c, d.

Si $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non nuls, une mesure de l'angle orienté formé par ces vecteurs est notée $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$. Une telle mesure est uniquement déterminée modulo 2π.

On dispose de la relation de Chasles sur les mesures d'angles orientés : $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) + (\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) \equiv (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})\ (2\pi)$.

On rappelle qu'un argument d'un nombre complexe z non nul, noté $\arg(z)$, est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$, où M est le point d'affixe z.

Un point $M(x, y) \in \mathcal{P}$ d'affixe $z = x + iy$ sera noté $M(z)$.

– I – Généralités

1. On suppose que ABC est un vrai triangle. En notant, après avoir justifié son existence, Ω le point d'intersection des médiatrices de $[BC]$ et $[AC]$ du triangle ABC, montrer que Ω est aussi sur la médiatrice de $[AB]$. Les trois médiatrices du triangle ABC sont donc concourantes au point Ω. Montrer que le cercle de centre Ω et de rayon $R = \Omega A$ est circonscrit à ce triangle.
2. Montrer que si Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a alors $2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right)\ (2\pi)$ (figure 1).

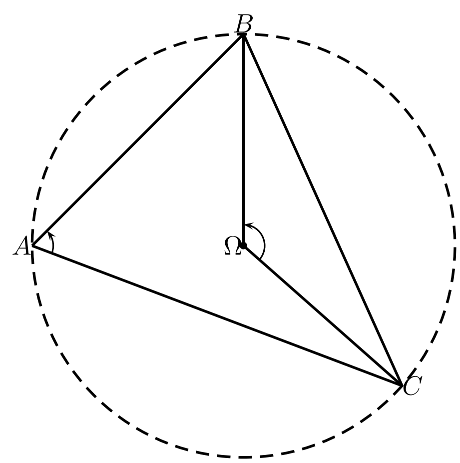

FIGURE 1 – Théorème de l'angle inscrit

3. Montrer que si $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1, z_2, une mesure de l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$.
4. Soient $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1, z_2 et $\theta = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$. Montrer que :
$$\cos(\theta) = \frac{|z_1|}{|z_2|}\operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)}{|z_1||z_2|},\ \sin(\theta) = \frac{|z_1|}{|z_2|}\operatorname{Im}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2)}{|z_1||z_2|}$$
5. Montrer que assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) les points A, B, C sont alignés ;
   (b) $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel.

– II – Lignes de niveau de la fonction $f : z \mapsto \arg\left(\dfrac{a-z}{b-z}\right) \bmod (\pi)$

On se donne deux points $A \neq B$ dans le plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a, b, un réel λ et on s'intéresse à l'ensemble
$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \lambda \bmod (\pi)\right\}$$

1. Dans le cas où λ est congru à 0 modulo π, montrer que $\mathcal{E}_\lambda$ est la droite (AB) privée des points A, B.
   Pour la suite de cette partie, on suppose que $\lambda \in \left]0, \pi\right[$.
2. Étudier le cas où $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Montrer que :
$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \text{ et } \arg\left((a-z)\left(\overline{b} - \overline{z}\right)\right) \equiv \lambda \mod (\pi)\right\}$$
4. Soit $M(z) \in \mathcal{E}_\lambda$.
   (a) En notant $c = \dfrac{a+b}{2}$, $d = \dfrac{b-a}{2}$ et $t = z - c$, montrer que $t \notin \{-d, d\}$ et :
$$(a-z)\left(\overline{b} - \overline{z}\right) = \left(|t|^2 - |d|^2\right) + 2i \operatorname{Im}\left(d\overline{t}\right)$$
      i. Montrer que $\dfrac{|t|^2 - |d|^2}{2 \operatorname{Im}\left(d\overline{t}\right)} = \dfrac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}$.
      ii. En notant $\omega = c - i\dfrac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}d$, montrer que $|z - \omega|^2 = \dfrac{1}{\sin^2(\lambda)} |d|^2$.
      iii. Conclure.
5. On note $\mathcal{C}_\lambda$ le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R.
   (a) Montrer que les points A et B sont sur le cercle $\mathcal{C}_\lambda$.
   (b) Montrer que $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv 2\lambda \mod (2\pi)$.
   (c) En déduire que $\mathcal{C}_\lambda \setminus \{A, B\}$ est contenu dans $\mathcal{E}_\lambda$.

   En conclusion, on a montré que l'ensemble $\mathcal{E}_\lambda = \left\{M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \lambda \mod (\pi)\right\}$ est :
   — la droite (AB) privée des points A, B si λ est congru à 0 modulo π ;
   — le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a+b}{2} - i\dfrac{1}{\tan(\lambda)}\dfrac{b-a}{2}$ et de rayon $R = \dfrac{1}{|\sin(\lambda)|}\left|\dfrac{b-a}{2}\right|$ privé des points A, B si λ n'est pas congru à 0 modulo π.

– III – Alignement et cocyclicité

1. Montrer que assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques ;
   (b) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \mod (\pi)$;
   (c) $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{c-d}{b-d}\right) \mod (\pi)$;
   (d) $\dfrac{c-a}{b-a}\dfrac{b-d}{c-d}$ est réel.
2. Déduire de la question précédente une équation complexe du cercle circonscrit au triangle ABC. On précisera l'affixe du centre Ω et le rayon du cercle.

Solution
– I – Généralités

1. Comme ABC est un vrai triangle, les droites (BC) et (AB) ne sont pas parallèles et en conséquence les médiatrices de $[BC]$ et $[AC]$ sont sécantes un point Ω. On a alors $\Omega B = \Omega C$ et $\Omega A = \Omega B$, donc $\Omega A = \Omega C$, ce qui signifie que Ω est aussi sur la médiatrice de $[AC]$. Le point Ω est donc à l'intersection des trois médiatrices et les sommets du triangle sont sur le cercle de centre Ω et de rayon $R = \Omega A = \Omega B = \Omega C$.
2. En utilisant la relation de Chasles, on a :
$$\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv 0 \ (2\pi)$$
Comme les triangles ΩAB et ΩAC sont isocèles en Ω, on a :
$$2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \pi \ (2\pi)$$
et $2\left(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv \pi \ (2\pi)$, ce qui donne par addition $2\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) + \left(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AC}\right)\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv 0 \ (2\pi)$, soit $2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv 0 \ (2\pi)$, ou encore :
$$2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) \equiv 0 \ (2\pi)$$
3. C'est du cours, parait-il.
4. En notant $\theta = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, on a $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}e^{i\theta}$, ce qui équivaut à $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}\sin(\theta)$.
5. On a :
$$\begin{aligned}(A, B, C \text{ alignés}) &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(\mathrm{Im}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sin\left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv 0 \mod(\pi)\right)\end{aligned}$$

– II – Lignes de niveau de la fonction $f : z \mapsto \arg\left(\dfrac{a-z}{b-z}\right) \mod(\pi)$

1. Facile.
2. $\left(M \in \mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}}\right) \Leftrightarrow \left(M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \text{ et } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \mod(\pi)\right) \Leftrightarrow \left(M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \text{ et } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\right)$, donc $\mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}}$ est le cercle de diamètre $[AB]$, soit le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{|b-a|}{2}$.
3. On a :
$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \text{ et } \arg\left(\frac{a-z}{b-z}\right) \equiv \lambda \mod(\pi)\right\}$$
avec $\arg\left(\dfrac{a-z}{b-z}\right) = \arg\left(\dfrac{(a-z)\left(\overline{b}-\overline{z}\right)}{|b-z|^2}\right) = \arg\left((a-z)\left(\overline{b}-\overline{z}\right)\right)$.
4.
   (a) En posant $z = c + t$, l'égalité $z = a$ ou $z = b$ équivaut à $t = -d$ ou $t = d$ et on a :
$$\begin{aligned}(a-z)\left(\overline{b}-\overline{z}\right) &= \left(a - \frac{a+b}{2} - t\right)\left(\overline{b} - \overline{\frac{a+b}{2}} - \overline{t}\right) = \left(\frac{a-b}{2} - t\right)\left(\overline{\frac{b-a}{2}} - \overline{t}\right) = (d+t)\left(\overline{t} - \overline{d}\right) \\ &= d\overline{t} - \overline{d}t + |t|^2 - |d|^2 = \left(|t|^2 - |d|^2\right) + 2i\,\mathrm{Im}\left(d\overline{t}\right)\end{aligned}$$
   (b)
      i. Si $M(z) \in \mathcal{E}_\lambda$, on a alors $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ et $(a-z)\left(\overline{b}-\overline{z}\right) = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |a-z|\,|b-z|$ et $\theta \equiv \lambda \mod(\pi)$, soit $\theta = \lambda + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui nous donne :
$$\begin{cases} |t|^2 - |d|^2 = \rho\cos(\theta) = \rho\cos(\lambda + k\pi) = (-1)^k \rho\cos(\lambda) \\ 2\,\mathrm{Im}\left(d\overline{t}\right) = \rho\sin(\theta) = \rho\sin(\lambda + k\pi) = (-1)^k \rho\sin(\lambda) \neq 0 \end{cases}$$
      donc $\dfrac{|t|^2 - |d|^2}{2\,\mathrm{Im}\left(d\overline{t}\right)} = \dfrac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}$.

ii. On a :

$$\begin{aligned}
|z-\omega|^2 &= \left|z-c+i\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}d\right|^2 = \left|t+i\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}d\right|^2 \\
&= \left(t+i\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}d\right)\left(\bar{t}-i\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}\bar{d}\right) = |t|^2+\frac{\cos^2(\lambda)}{\sin^2(\lambda)}|d|^2+i\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}\left(d\bar{t}-\bar{d}t\right) \\
&= |t|^2-|d|^2+\frac{1}{\sin^2(\lambda)}|d|^2-2\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}\operatorname{Im}\left(d\bar{t}\right) \\
&= 2\operatorname{Im}\left(d\bar{t}\right)\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}+\frac{1}{\sin^2(\lambda)}|d|^2-2\frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda)}\operatorname{Im}\left(d\bar{t}\right)=\frac{1}{\sin^2(\lambda)}|d|^2
\end{aligned}$$

iii. En conclusion, le point M est sur le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $R=\dfrac{1}{|\sin(\lambda)|}\left|\dfrac{b-a}{2}\right|$ privé des points A et B.

5.

(a) On a $|a-\omega|=|b-\omega|=R$.

(b) C'est le théorème de l'angle inscrit.

(c) Il parait que c'est facile.

En conclusion, on a montré que l'ensemble $\mathcal{E}_\lambda=\left\{M\in\mathcal{P}\setminus\{A,B\}\mid\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\lambda \mod(\pi)\right\}$ est :

— la droite (AB) privée des points A, B si λ est congru à 0 modulo π ;

— le cercle de centre Ω d'affixe $\omega=\dfrac{a+b}{2}-i\dfrac{1}{\tan(\lambda)}\dfrac{b-a}{2}$ et de rayon $R=\dfrac{1}{|\sin(\lambda)|}\left|\dfrac{b-a}{2}\right|$ privé des points A, B si λ n'est pas congru à 0 modulo π.

– III – Alignement et cocyclicité

1. Si A,B,C,D sont alignés, on a alors $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\mod(\pi)$. Si A,B,C,D sont cocycliques, on a alors

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}\right)}{2}\equiv\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\ (\pi)$$

(figure **??**). Faire une figure.
Si $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\mod(\pi)$, le point D appartient à $\mathcal{E}_\lambda=\left\{M\in\mathcal{P}\setminus\{A,B\}\mid\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\lambda\mod(\pi)\right\}$, où $\lambda=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ (on prend la détermination principale de la mesure de l'angle) et il est maintenant connu que cet ensemble est une droite.ou un cercle.
$(b)\Leftrightarrow(c)$ résulte de $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{c-z}{b-z}\right)\mod(2\pi)$ pour tout point M (et que ceux qui croient à une truanderie le démontre).
$(c)\Leftrightarrow(d)$ On a :

$$\begin{aligned}
\left(\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right)\mod(\pi)\right) &\Leftrightarrow\left(\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\frac{b-d}{c-d}\right)\equiv 0\mod(\pi)\right) \\
&\Leftrightarrow\left(\frac{c-a}{b-a}\frac{b-d}{c-d}\in\mathbb{R}\right)
\end{aligned}$$

2. Au boulot.