Irrationalité de e

Vous connaissez beaucoup de nombres rationnels : un réel x est dit *rationnel* s'il est de la forme

$$x = \frac{p}{q} \quad \text{pour un certain } p \in \mathbb{Z} \text{ et un certain } q \in \mathbb{N}^*.$$

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit *irrationnel*. Vous avez peut-être déjà démontré que si un entier naturel n n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel [1].

Le but de ce problème est, entre autres, de montrer l'irrationalité du nombre $e = \exp(1)$.

– I – Intégration par parties

Afin de calculer les intégrales de certaines fonctions dont on ne peut pas trouver « mentalement » une primitive, on aura recours à l'intégration par parties, que nous allons étudier dans ce paragraphe.

1. Soit $\varphi : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée φ' continue sur $[a\ ;\ b]$. Justifier que :

$$\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a).$$

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit [2], et en apportant toutes les justifications nécessaires, démontrer le théorème suivant (formule d'intégration par parties) :

   Théorème. *Si u et v sont deux fonctions réelles définies, dérivables et à dérivée continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)'v(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On peut noter la formule ci-dessus plus brièvement (sans la variable) :

$$\int_a^b uv' = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v.$$

– II – Suites adjacentes

On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. On supposera que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Étudier les variations de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'on a : pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

---

1. Ce type de résultat est sans doute au moins aussi ancien que Pythagore : voir https ://fr.wikipedia.org/wiki/Hippase_de_Métaponte.
2. Formule de Leibniz.

– III – Irrationalité de e

Le nombre e est par définition $e = \exp(1)$. Nous allons montrer que e est irrationnel grâce à une méthode due à Nicolas Dominique Marie Janot de Stainville[3].

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer la valeur de r_0.
2. En effectuant une intégration par parties, calculer la valeur de r_1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}.$$
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n.$$
5. (a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, $0 \leq r_n \leq \dfrac{e}{n!}$. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$
   Montrer que u_n tend vers e lorsque n tend vers l'infini.

   (c) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}\,.$$
   Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
6. En raisonnant par l'absurde, on se propose de montrer que le nombre e est irrationnel.
   Pour ce faire, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p, q premiers entre eux tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$u_n < e < v_n.$$
   (b) En déduire que :
$$q!\,u_q < q!\,e < q!\,u_q + \frac{1}{q}\,.$$
   (c) Mettre en évidence une contradiction (noter que $q!\,u_q$ est un nombre entier) et conclure.

3. Au XIXème siècle ; voir http ://bibnum.revues.org/670.