Les équations polynomiales de degré 3

Le but de ce problème est de résoudre une équation polynomiale de degré 3 de la forme

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

avec p et q des nombres réels donnés (et x l'inconnue).

Nous allons justifier l'existence d'une solution réelle, puis de deux autres, éventuellement complexes, comme racines d'un trinôme du second degré. Nous montrerons que (1) a exactement trois solutions complexes. Ensuite, dans le cas particulier $p > 0$, pour lequel une seule des solutions est réelle, nous répondrons à une question historique, qui était de savoir donner une expression de cette solution « par radicaux » en fonction des coefficients (inutile pour l'instant de savoir ce que cela signifie ; cela sera clarifié par les remarques à la fin de ce texte, à lire plus tard).

Notez bien : Pour tout ce qui suit, on fixe deux réels p et q.

– I – Les équations $x^3 + q = 0$

Pour cette partie, on suppose que $p = 0$. L'équation (1) s'écrit donc

$$x^3 + q = 0. \tag{2}$$

1. Justifier que pour tout nombre complexe x,

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right).$$

2. Donner les racines complexes de l'équation $x^3 - 1 = 0$.
   On peut constater qu'il y a une seule racine réelle et deux racines complexes conjuguées que l'on notera j et $\bar{j}$, la solution j étant celle de partie imaginaire strictement positive.
3. (a) Justifier l'existence d'une unique solution réelle de l'équation (2).
   Cette solution est notée $\sqrt[3]{-q}$ et on dit que c'est la racine cubique réelle de $-q$.

   (b) Montrer que $j\sqrt[3]{-q}$ et $\bar{j}\sqrt[3]{-q}$ sont aussi solutions de l'équation (2).

Nous avons donc montré que, pour $q \neq 0$, l'équation (2) a une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées non réelles. Dans ce qui suit, nous montrons que ce sont les seules solutions, et nous généralisons au cas $p \neq 0$.

– II – Les équations $x^3 + px + q = 0$, pour p, q réels

1. Montrer que l'équation (1) a au moins une solution réelle que l'on notera α.
2. Montrer que, pour tous nombres complexes a, b, on a :

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

3. Montrer qu'il existe des nombres réels b et c tels que, pour tout nombre complexe x, on ait :

$$x^3 + px + q = (x - \alpha)\left(x^2 + bx + c\right),$$

   α étant défini en **II.1.**
4. En déduire que l'équation (1) a soit 3 racines réelles distinctes ou confondues, soit une seule racine réelle et deux racines complexes non réelles conjuguées.

– III – Les équations $x^3 + px + q = 0$ avec $p > 0$ et q réel

Pour cette partie, **on suppose** $p > 0$.

1. Montrer que l'équation (1) a une unique solution réelle que l'on notera α.
2. Développer $(u+v)^3$, pour u, v nombres réels.
3. Montrer que, pour tous nombres réels u, v, on a :
$$(u+v)^3 - 3uv\,(u+v) - \left(u^3+v^3\right) = 0.$$
4. Cela nous conduit à chercher la solution réelle de (1) sous la forme $\alpha = u + v$, le couple de nombres réels (u, v) étant solution du système de deux équations à deux inconnues :
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ 3uv = -p. \end{cases} \tag{3}$$
Justifier qu'effectivement, si (u, v) vérifie (3), alors $u + v$ est solution de (1).
5. Montrer que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est solution de (3), alors le couple (u^3, v^3) vérifie :
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{4}$$
6. Montrer que si le couple (u^3, v^3) vérifie (4), alors u^3 est solution de l'équation de degré 2 :
$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{5}$$
Donner l'expression des deux solutions de cette équation, dont on notera $\delta = \dfrac{4p^3 + 27q^2}{27}$ le discriminant.
7. En désignant par w la racine cubique réelle de $\dfrac{-q+\sqrt{\delta}}{2}$, montrer que $\left(w, -\dfrac{p}{3w}\right)$ est une solution de (3), ce qui donne la solution réelle de (1), à savoir $\alpha = w - \dfrac{p}{3w}$ [1].
8. Comment trouver les deux racines complexes de (1) ?
9. Appliquer ce qui précède à l'équation polynomiale $x^3 + 3x + 1 = 0$.

Remarques :

1. L'idée de chercher x sous la forme d'une somme, $x = u+v$, est souvent attribuée à Tartaglia [2]. Elle permet de « se donner du jeu » en travaillant avec deux inconnues (u et v) au lieu d'une, et d'ajouter une relation entre ces deux inconnues pour obtenir un problème plus simple (du second degré !).
2. On peut reprendre cette étude dans le cas $p < 0$ (où on constate que le nombre de solutions réelles de (1) est fonction du signe du discriminant δ ci-dessus), et aussi dans le cas de p et q complexes.
3. On ramène facilement l'étude des solutions de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à ce qui précède en éliminant le terme x^2, par le changement de variable $x' = x - \lambda$, avec λ choisi judicieusement.
4. En procédant de façon analogue, on peut également résoudre « par radicaux » les équations polynomiales de degré quatre. Par contre, il a été prouvé qu'à partir du degré cinq, une telle résolution par radicaux n'est pas possible : c'est une conséquence de la « théorie de Galois » [3].

---

1. C'est cette écriture qu'on appelle « par radicaux », car α est écrit au moyen de sommes, produits, quotients et racines (carrées et cubiques, ici ; plus généralement, « racines n-ièmes », avec n entier) des coefficients du polynômes.
2. La paternité de la méthode n'est pas facile à établir ; on a un aperçu de la controverse historique qui lui est liée sur la page Wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Cardan.
3. On pourra consulter http://www.galois.ihp.fr/ressources/vie-et-oeuvre-de-galois/les-mathematiques-de-galois/resolution-des-equations-algebriques-de-degre-3-et-4/