Dichotomie et théorème de Rolle

– I – Le théorème des valeurs intermédiaires

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. *On propose une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.*
   Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle $f(a) < 0 < f(b)$.
   On construit, par récurrence, les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :
   $a_0 = a$, $b_0 = b$;
   pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{cases} \text{si } f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0, \text{ alors } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ \text{sinon } a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$$

   (b) Montrer que la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in [a, b]$.
   (d) Montrer que $f(\ell) = 0$.

– II – Le théorème de Rolle

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle $f(a) f(b) = 0$.

1. *Pour cette question, un logiciel de géométrie dynamique peut être utile.*
   (a) En dessinant la courbe representative d'une telle fonction f, placer approximativement sur l'axe des abscisses deux réels $\alpha_1 < \beta_1$ dans $]a, b[$ tels que :

$$\begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 \leq \dfrac{b-a}{2} \\ f(\alpha_1) = f(\beta_1) \end{cases} \tag{1}$$

   (b) En itérant ce procédé, que peut-on conjecturer ?
2. *L'objectif de cette question est de prouver l'existence d'un couple de réels* (α_1, β_1) *vérifiant* (1) *avec la condition* $a < \alpha_1 < \beta_1 < b$.
   (a) En désignant par g la fonction définie par :

$$\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \ g(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) - f(x)$$

   montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $\beta \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ tel que $\beta - \alpha = \dfrac{b-a}{2}$ et $f(\beta) = f(\alpha)$.

(c) Déduire de ce qui précède l'existence de deux réels $\alpha_1 < \beta_1$ dans $]a, b[$ tels que :

$$\begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 \leq \dfrac{b-a}{2} \\ f(\alpha_1) = f(\beta_1) \end{cases}$$

Il est conseillé de faire des dessins.

3. *Itération du procédé.*
Justifier l'existence de deux suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} \alpha_0 = a,\ \beta_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} [\alpha_n, \beta_n] \subset \left]\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}\right[\\ \beta_n - \alpha_n \leq \dfrac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{2} \\ f(\alpha_n) = f(\beta_n) \end{cases} \end{cases}$$

4. *Convergence du procédé.*
Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in]a, b[$.
5. On suppose pour cette question que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = \dfrac{f(\ell) - f(\alpha_n)}{\ell - \alpha_n} \\ v_n = \dfrac{f(\beta_n) - f(\ell)}{\beta_n - \ell} \end{cases}$$

(a) Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = f'(\ell)$$

(c) Montrer que $f'(\ell) = 0$.
En définitive, nous avons montré le théorème de Rolle :
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle fermé, borné $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, il existe alors un réel $\ell \in]a, b[$ tel que $f'(\ell) = 0$.

– III – Applications

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction numérique continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1.

(a) Déterminer l'expression réduite de la fonction affine h qui coïncide avec f en a et b.
(b) En appliquant le théorème de Rolle à une fonction judicieusement choisie, montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ telle que :

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

Ce résultat est le *théorème des accroissements finis.*

2. Montrer (enfin) les théorèmes admis en classe de première :

(a) La fonction f est croissante sur $[a, b]$ si, et seulement si, sa dérivée f' est positive sur $]a, b[$.
(b) La fonction f est constante sur $[a, b]$ si, et seulement si, sa dérivée f' est nulle sur $]a, b[$.
(c) Si f' est strictement positive sur $]a, b[$, la fonction f est alors strictement croissante sur $[a, b]$.
(d) Qu'en est-il de la réciproque du résultat précédent ?