-Correction-
Irrationalité de e

– I – Intégration par parties

1. Soit $\varphi : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée φ' continue sur $[a\ ;\ b]$.
   φ est une primitive de φ' sur $[a;b]$ donc :
$$\int_a^b \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[\varphi(t)\Big]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$
2. Soient u et v deux fonctions dérivables, à dérivée continue sur $[a;b]$. Alors uv est dérivable, à dérivée continue sur $[a;b]$ et pour tout $t \in [a;b]$:
$$\begin{array}{rcl} \big(uv\big)' &=& u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ \Rightarrow \displaystyle\int_a^b \big(uv\big)'(t)\ \mathrm{d}t &=& \displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \big[u(t)v(t)\big]_a^b &=& \displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t &=& \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

– II – Suites adjacentes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$.
   Puisque (u_n) est croissante alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   Puisque (v_n) est décroissante alors $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
   Alors, $(v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0$ et la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.
2. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$. Puisque la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante alors pour tout entier $n \geqslant N$, $v_n - u_n \leqslant v_N - u_N < 0$.
   Comme la suite $(v_n - u_n)$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) \leqslant v_N - u_N < 0$ ce qui contredit le fait que la suite converge vers 0.
3. On a démontré que pour tout entier n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Ainsi, (u_n) est croissante majorée par v_0 donc converge vers une limite que l'on note ℓ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$. De même, (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc converge vers une limite que l'on note ℓ' et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell' \leqslant v_n$. Alors $(v_n - u_n)$ converge vers $\ell' - \ell$ et vers 0. Par unicité, $\ell' = \ell$ et finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

– III – Irrationalité de e

1. $r_0 = \displaystyle\int_0^1 e^x\ \mathrm{d}x = \big[e^x\big]_0^1 = e - 1$.
2. $r_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)e^x\ \mathrm{d}x$. On note u et v les fonctions définies sur $[0;1]$ par $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = e^x$. Ainsi définies, u et v sont dérivables, à dérivée continue sur $[0;1]$. Par intégration par parties :
$$\begin{array}{rcl} r_1 &=& \big[(1-x)e^x\big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 (-1)e^x\ \mathrm{d}x \\ &=& -1 + \big[e^x\big]_0^1 \\ &=& e - 2 \end{array}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} r_n &= \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right) e^x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}) e^x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1} \end{aligned}$$

$\forall x \in [0;1]$,

$u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$

$v'(x) = \dfrac{(1-x)^n}{n!} \qquad v(x) = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}$

u et v sont dérivables, à dérivée continue sur $[0;1]$.

4. **Initialisation :** $n = 0$

   D'après la question 1., $r_0 = e - 1 \Leftrightarrow e = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} + r_0$

   Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n, on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n && \text{HR} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1} && \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + r_{n+1} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n$.

5. (a) $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & \leqslant & \dfrac{(1-x)^n}{n!} e^x & \leqslant & \dfrac{e}{n!} \\ \Rightarrow & \displaystyle\int_0^1 0 \, \mathrm{d}x & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, \mathrm{d}x & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{e}{n!} \, \mathrm{d}x \\ \Rightarrow & 0 & \leqslant & r_n & \leqslant & \dfrac{e}{n!} \end{array}$$

   (b) Alors, d'après le théorème des gendarmes, la suite (r_n) converge vers 0. De plus, d'après la question 4., $\forall n \in \mathbb{N},\ e = u_n + r_n$.
   De ces deux résultats, on déduit que la suite (u_n) converge vers e.

   (c) •$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

   •$\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= v_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \\ &< 0 \end{aligned}$$

   Alors (v_n) est strictement décroissante.

   •$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

   Finalement, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

6. (a) On sait que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que (u_n) converge vers e. D'après les résultats de la partie -II-, la suite (v_n) converge aussi vers e et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant e \leqslant v_n$.
   De plus, les suites suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < e < v_n$.

(b) En appliquant l'inégalité précédente au rang q, on a :

$$\begin{aligned} & u_q &<& \quad e &<& \quad v_q \\ \Rightarrow\ & q!u_q &<& \quad q!e &<& \quad q!\left(u_q+\frac{1}{q\times q!}\right) \\ \Rightarrow\ & q!u_q &<& \quad q!e &<& \quad q!u_q+\frac{1}{q} \end{aligned}$$

(c) $\bullet q!u_q = q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q}\left[q\times(q-1)\times ...\times(k+1)\right]$ est un nombre entier.

$\bullet q!u_q + \frac{1}{q} < q!u_q + 1 \Rightarrow q!uq < q!e < q!u_q + 1$

$\bullet q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p$ est un nombre entier.

Ainsi $q!u_q$ et $q!uq+1$ sont deux entiers consécutifs et donc $q!e$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs : absurde.

Finalement, l'hypothèse de départ est incorrecte : e est irrationnel.