-Correction-
Les équations polynomiales de degré 3

– I – Les équations $x^3 + q = 0$

1. Il suffit de développer le membre de droite.
   Ou alors, si on est en Lycée, on sait calculer la somme des n termes d'une suite géométrique avec la colossale astuce :
   $$\left\{\begin{array}{l} S_n = 1 + x + \cdots + x^n \\ xS_n = x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1} \end{array}\right.$$
   et faisant la différence, il vient :
   $$(1 - x)\, S_n = 1 - x^{n+1}$$
   On peut aussi faire la division euclidienne de $1 - X^{n+1}$ par $1 - X$.
2. Ce qui précède nous dit que l'équation $x^3 - 1 = 0$ équivaut à $x - 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0$, ce qui nous donne la solution réelle $x_1 = 1$ et les deux solutions complexes conjuguées :
   $$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
   On peut aussi utiliser le discriminant.
3. (a) La fonction $P : x \mapsto x^3 + q$ est dérivable strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$) de limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$, elle coupe donc l'axe des abscisses une fois et une seule, ce qui revient à dire que l'équation $x^3 + q = 0$ a unique solution réelle.
   Ou alors écrire que :
   $$P(y) - P(x) = (y - x)\left(y^2 + xy + x\right)$$
   (b) Résulte de $\left(\lambda \sqrt[3]{-q}\right)^3 = \lambda^3 \left(\sqrt[3]{-q}\right)^3 = -q$ pour $\lambda = j$ ou $\lambda = \overline{j}$.

– II – Les équations $x^3 + px + q = 0$, pour p, q réels

1. La fonction $P : x \mapsto x^3 + px + q$ est continue de limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$, elle coupe donc l'axe des abscisses au moins une fois, ce qui revient à dire que l'équation $x^3 + px + q = 0$ a au moins une solution réelle.
2. Pour $b = 0$, c'est clair et pour $b \neq 0$, on écrit :
   $$\begin{aligned} a^3 - b^3 = b^3\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1\right) &= b^3\left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1\right) \\ &= (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \end{aligned}$$
   On peut aussi développer.
   Ou alors, pour $n \geq 2$:
   $$\left\{\begin{array}{l} S_n = a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n \\ aS_n = a^{n+1} + a^n b + \cdots + a^2 b^{n-1} + ab^n \\ bS_n = ba^n + a^{n-1}b^2 + \cdots + ab^n + b^{n+1} \end{array}\right.$$
   donne par soustraction :
   $$(b - a)\, S_n = b^{n+1} - a^{n+1}$$

3. À nouveau, colossale astuce, on retranche les deux égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = x^3 + px + q \\ 0 = P(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q \end{array} \right.$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - \alpha^3 + p(x - \alpha) \\ &= (x - \alpha)\left(x^2 + \alpha x + \alpha^2 + p\right) \end{aligned}$$

4. Pour $\delta = b^2 - 4c = -(3\alpha^2 + 4p) \geq 0$, on a 3 racines distinctes ou confondues.
   Pour $\delta < 0$, α est l'unique racine réelle et on a deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\delta}}{2}$.

– III – Les équations $x^3 + px + q = 0$ avec $p > 0$ et q réel

1. Pour $p > 0$, on a $\delta < 0$ et en conséquence une unique racine réelle.
   Ou alors dire que $P : x \mapsto x^3 + px + q$ est continue strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$.
2. Le binôme de Newton donne :

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

3. Conséquemment :

$$(u + v)^3 - \left(u^3 + v^3\right) = 3u^2v + 3uv^2 = 3uv(u + v)$$

4. Soit (u, v) solution de (**??**) . Posant $\alpha = u + v$, on a :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (u + v)^3 + p(u + v) + q \\ &= (u + v)^3 - 3uv(u + v) - \left(u^3 + v^3\right) = 0 \end{aligned}$$

5. On va dire que c'est clair.
   Réciproquement (qui n'est pas demandé) si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est solution de (**??**) , uv est alors la racine cubique réelle de $-\dfrac{p^3}{27}$, à savoir $-\dfrac{p}{3}$ et (u, v) est solution de (**??**) .
6. Notant $x_1 = u^3$, $x_2 = v^3$, on a $x_1x_2 = -\dfrac{p^3}{27} = -\gamma < 0$, donc $x_2 = -\dfrac{\gamma}{x_1}$ ($x_1 \neq 0$ car $3uv = -p \neq 0$) et $-q = x_1 + x_2 = x_1 - \dfrac{\gamma}{x_1} = \dfrac{x_1^2 - \gamma}{x_1}$, soit $x_1^2 + qx_1 - \dfrac{p^3}{27} = 0$.
   Le discriminant de ce trinôme étant :

$$\delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27} > 0$$

   ce qui nous donne :

$$x_1 = \frac{-q \pm \sqrt{\delta}}{2} \text{ et } x_2 = -\frac{p^3}{27x_1}$$

7. Notant $(u, v) = \left(w, -\dfrac{p}{3w}\right)$, on a $uv = -\dfrac{p}{3}$ et :

$$\left(u^3\right)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

   (u^3 est solution de $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$), soit en divisant par u^3 :

$$0 = u^3 + q - \frac{p^3}{27}\frac{1}{u^3} = u^3 + v^3 + q$$

   et $\alpha = u + v = u - \dfrac{p}{3u}$ (c'est l'unique réelle solution).

8. Il suffit de les chercher. Ce sont les racines de $x^2+\alpha x+\alpha^2+p$ de discriminant $\delta = -\left(3\alpha^2+4p\right) < 0$, mais c'est un peu compliqué.
   En notant β et $\overline{\beta}$ ces racines, de l'égalité :

$$\begin{aligned} x^3+px+q &= (x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\overline{\beta}\right) \\ &= x^3-\left(\alpha+\beta+\overline{\beta}\right)x^2+\left(\alpha\left(\beta+\overline{\beta}\right)+\beta\overline{\beta}\right)x-\alpha\beta\overline{\beta} \end{aligned}$$

   on déduit que :

$$2\Re(\beta) = \beta+\overline{\beta} = -\alpha \text{ et } |\beta|^2 = -\frac{q}{\alpha}$$

   donc $\beta = -\frac{\alpha}{2}+ib$ avec :

$$b^2 = -\frac{q}{\alpha}-\frac{\alpha^2}{4} = -\frac{4q+\alpha^3}{4\alpha} = -\frac{3q-p\alpha}{4\alpha} = \frac{p}{4}-\frac{3q}{4\alpha}$$

   et $\beta = -\frac{\alpha}{2}+i\sqrt{\frac{p}{4}-\frac{3q}{4\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{p}{3}-\frac{q}{\alpha}}$ (prenant $-\sqrt{\ }$ on obtient $\overline{\beta}$).
   Les racines complexes sont donc :

$$-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{p}{3}-\frac{q}{\alpha}}$$

9. On a $\delta = \frac{4p^3+27q^2}{27} = \frac{4\cdot 3^3+27}{27} = 5$, $u = \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$, $v = -\frac{p}{3u} = -\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et :

$$\alpha = u+v = \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \backsimeq -0.322\,19$$

   Les racines complexes sont :

$$-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{p}{3}-\frac{q}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\alpha}}$$

   avec :

$$1-\frac{1}{\alpha} = 4+\alpha^2 > 0$$

   donc :

$$\beta = -\frac{\alpha}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{4+\alpha^2} = \ldots \backsimeq 0.161\,09\pm 1.754\,4\cdot i$$

   Mais pourquoi qu'on se fatigue avec tout ça ? Il suffit de demander à la machine qui nous dit que :

$$roots: \begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}\right) \\ \frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}\right) \\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}} \end{array}$$