**-Correction-**
**Dichotomie et théorème de Rolle**

## – I – Le théorème des valeurs intermédiaires

1. Si $I = [a, b]$ est un intervalle réel fermé borné et $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)\,f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \,]a, b[\,$.

2. (a) **Initialisation :** pour $n = 0$.
   $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$ est le milieu de $[a_0; b_0]$.
   Si $f\left(\dfrac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0$ alors $a_1 = a_0$, $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, donc $a \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant b$.
   Sinon, $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = b_0$, donc $a \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant b$.
   **Hérédité :** on suppose la propriété vraie au rang $n$. En utilisant le même raisonnement que dans l'initialisation, on montre que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant b$.

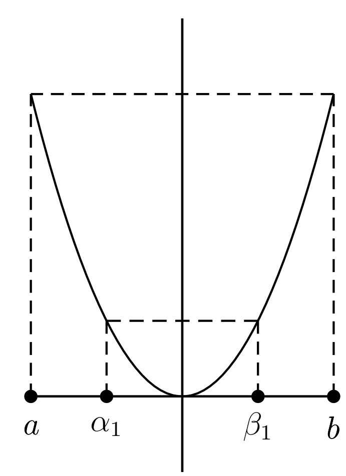
   (b) Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ont été construites en utilisant le principe de dichotomie donc à chaque étape, la longueur du segment $[a_n; b_n]$ est divisée par 2. Alors, pour tout entier $n$, $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$. Ainsi, la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0.

   (c) D'après le résultat démontré à la question 2.(a), la suite $(a_n)$ est croissante majorée par $b$, donc elle converge : on note $\ell$ sa limite. De même, $(b_n)$ est décroissante minorée par $a$, donc elle converge : on note $\ell'$ sa limite. Alors la suite suite $(b_n - a_n)$ converge vers $\ell' - \ell$. D'après la question précédente, $\ell' - \ell = 0$ et finalement, $\ell = \ell'$.

   (d) Par construction, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \leqslant 0$.
   De plus, par continuité de la fonction $f$ en $\ell$, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(\ell)$.
   En utilisant les deux résultats, on a : $f(\ell) \leqslant 0$.
   Par un raisonnement analogue avec la suite $(b_n)$, on démontrer que $f(\ell) \geqslant 0$.
   Finalement, $f(\ell) = 0$.

## – II – Le théorème de Rolle

1. (a)




   (b) Il semble que les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ convergent vers un réel où la fonction change de sens de variation.

2. (a) Pour $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, on a $x + \frac{b-a}{2} \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, donc la fonction $g$ est bien définie et continue sur $[a,b]$.

Comme :

$$\begin{aligned} g(a)\, g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right)\left(f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \\ &= \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right)\left(f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \\ &= -\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel $\alpha \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

(b) Prenant $\beta = \alpha + \frac{b-a}{2} \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on a $\beta - \alpha = \frac{b-a}{2}$ et :

$$f(\beta) - f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{b-a}{2}\right) - f(\alpha) = g(\alpha) = 0$$

soit :

$$f(\beta) = f(\alpha)$$

(c) Si $\alpha \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[$, on a alors $\beta \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[$ et il suffit de poser $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha, \beta)$.

Si $\alpha = a$, on a alors $\beta = \frac{a+b}{2}$, donc la fonction continue $f : [a, \beta] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \to \mathbb{R}$ est telle que $f(a) = f(\beta)$ et en conséquence il existe $\gamma < \delta$ dans $[a, \beta]$ tels que $\delta - \gamma = \frac{\beta - a}{2} = \frac{b-a}{4}$ et $f(\gamma) = f(\delta)$.

Si $a < \gamma$, on a alors $a < \gamma < \delta < b$, $f(\gamma) = f(\delta)$ et $\delta - \gamma = \frac{b-a}{4} < \frac{b-a}{2}$, donc $(\alpha_1, \beta_1) = (\gamma, \delta)$ convient.

Si $\gamma = a$, on a alors $\delta = a + \frac{b-a}{4}$ et $f(a) = f(\delta) = f\left(a + \frac{b-a}{4}\right)$ avec $f(a) = f(\beta) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, donc $f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et considérant la fonction continue $f : \left[a + \frac{b-a}{4}, \frac{a+b}{2}\right] \to \mathbb{R}$, on trouve $[\alpha_1, \beta_1] \subset \left[a + \frac{b-a}{4}, \frac{a+b}{2}\right] \subset ]a, b[$ tel que $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{b-a}{8} < \frac{b-a}{2}$ tel que $f(\alpha_1) = f(\beta_1)$.

On procède de manière analogue dans le cas où $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et $\beta = b$.

3. On procède par récurrence sur $n \geq 0$.Les intervalles $[\alpha_0, \beta_0] = [a, b]$ et $[\alpha_1, \beta_1]$ sont construits. Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1 \geq 1$, la question précédente appliquée à la fonction continue $f : [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}] \to \mathbb{R}$ nous assure de l'existence de $[\alpha_n, \beta_n] \subset ]\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}[$ répondant à la question.

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a < \alpha_{n-1} < \alpha_n < \beta_n < \beta_{n-1} < b$$

donc les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones et bornées. Il en résulte qu'elles convergent vers $\ell$ et $\ell'$ dans $]a, b[$ respectivement (de $a < \alpha_1 < \alpha_n < \beta_n < \beta_1 < b$ pour $n \geq 2$,

on déduit que $a < \alpha_1 \leq \ell \leq \ell' \leq \beta_1 < b$).
Faisant tendre $n$ vers l'infini dans les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \beta_n - \alpha_n \leq \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{2}$$

on obtient $0 \leq \ell' - \ell \leq \dfrac{\ell - \ell'}{2}$, soit $\ell - \ell' = 0$ et $\ell = \ell'$.

5. (a) Par stricte monotonie, on a $a < \alpha_n < \ell < \beta_n < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Par définition du nombre dérivé.
   (c) En se rappelant que $f(\alpha_n) = f(\beta_n)$, on a :

$$u_n v_n = \frac{f(\ell) - f(\alpha_n)}{\ell - \alpha_n} \frac{f(\beta_n) - f(\ell)}{\beta_n - \ell} = -\frac{(f(\ell) - f(\alpha_n))^2}{(\ell - \alpha_n)(\beta_n - \ell)} < 0$$

   donc :

$$0 \leq (f'(\ell))^2 = \lim_{n \to +\infty} u_n v_n \leq 0$$

   soit $(f'(\ell))^2 = 0$ et $f'(\ell) = 0$.

## – III – Applications

1. (a) On note $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Alors $h$ est une fonction affine qui coïncide avec $f$ en $a$ et $b$.
   (b) On note $g$ la fonction définie sur $[a;b]$ par $g(x) = f(x) - h(x)$. Ainsi définie, $g$ est une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $g(a) = g(b) = 0$.
   D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.
   Or $\forall x \in ]a;b[,\ g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
   Ainsi, $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
2. (a) On suppose que $f$ est croissante sur $[a;b]$. Soit $c \in ]a;b[$ et $x \in ]c;b[$. Puisque $f$ est croissante sur $[a;b]$ alors

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) - f(c) & \geqslant & 0 \\ \Rightarrow & \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \geqslant & 0 \\ \Rightarrow & \displaystyle\lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \geqslant & 0 \\ \Rightarrow & f'(c) & \geqslant & 0 \end{array}$$

   Réciproquement, on suppose $f'$ positive sur $]a;b[$. Soient $\alpha,\ \beta \in [a;b]$ avec $\alpha < \beta$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]\alpha;\beta[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(c)$.
   Or $f'(c) \geqslant 0$ donc $f(\beta) - f(\alpha) \geqslant 0$ et finalement $f(\beta) \geqslant f(\alpha)$.
   (b) Raisonnement identique à celui de la question précédente.
   (c) Soient $\alpha,\ \beta \in [a;b]$ tels que $\alpha < \beta$. $f$ est continue sur $[\alpha;\beta]$, dérivable sur $]\alpha;\beta[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]\alpha;\beta[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(c)$.
   Or $f'(c) > 0$ et $\beta - \alpha > 0$, donc $f(\beta) > f(\alpha)$.
   Ainsi $f$ est strictement croissante sur $[a;b]$.
   (d) La réciproque du résultat précédent est fausse. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.