-Correction-
Un calcul de $\zeta(2)$

– I – L'intégration par parties

1. φ est une primitive de φ' et φ' est continue sur $[a\ ;\ b]$, donc $\displaystyle\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$.
2. De $(uv)' = u'v + uv'$ et de la question précédente, on déduit que :

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

3.

– II – Convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$

1. (a) Pour $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

(b) Avec $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, on déduit que $(S_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

(c) Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante majorée par 2 et en conséquence convergente de limite $S \in]0, 2]$.

2.

(a) La fonction $t \to \dfrac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

(b) On en déduit que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée et en conséquence convergente.

– III – Suites adjacentes

1. (a) Décroissante comme somme de deux décroissante.

(b) Supposons qu'il existe un indice n_0 tels que $u_{n_0} > v_{n_0}$.
Comme $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a alors pour tout $n \geq n_0$, $v_n - u_n \leq v_{n_0} - u_{n_0} < 0$ et $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) \leq v_{n_0} - u_{n_0} < 0$, ce qui est impossible.

(c) En utilisant la question précédente et la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0$$

c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par u_0, ces deux suites sont donc convergentes et avec :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Elles convergent donc vers la même limite :

$$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n)$$

2. (a) On sait déjà que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

ce qui signifie que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
Puis avec :

$$\lim_{n\to+\infty} (T_n - S_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et en conséquence convergentes vers une même limite S.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n \leq S \leq T_n$$

donc :

$$0 \leq S - S_n \leq T_n - S_n = \frac{1}{n}$$

et $n = 10^6$ convient.

– IV – Les intégrales de Wallis

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$

2. (a) Les fonctions définies sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $u(t) = \cos^{2n-1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$ sont dérivables, de dérivées continues. On a donc, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{array}{rrcl}
 & I_n & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\ dt \\
\Leftrightarrow & I_n & = & \left[\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\ dt \\
\Leftrightarrow & I_n & = & (2n-1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{2n-2}(t)\ dt \\
\Leftrightarrow & I_n & = & (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n \\
\Leftrightarrow & 2nI_n & = & (2n-1)I_{n-1} \\
\Leftrightarrow & I_n & = & \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}
\end{array}$$

(b)
$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n-1}{2n}\ I_{n-1} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2}\ I_{n-2} \\
&\vdots \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2}\ I_0 \\
&= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \ldots \times 2 \times 1}{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times \cdots \times 2^2}\ \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\ \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. (a) Les fonctions définies sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $u(t) = t$ et $v(t) = -\dfrac{\cos^{2n}(t)}{2n}$ sont dérivables, de dérivées continues. On a donc, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^{2n-1}(t) \sin(t)\ dt &= \left[-\frac{t\cos^{2n}(t)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n}(t)}{2n}\ dt \\
&= \frac{I_n}{2n}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
J_{n-1} - J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n-2}(t)\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n-2}(t)(1 - \cos^2(t))\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n-2}(t) \sin^2(t)\ dt
\end{aligned}$$

(c) Les fonctions définies sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $u(t) = t^2 \sin(t)$ et $v(t) = -\dfrac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}$ sont dérivables, de dérivées continues. On a donc, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(t^2 \sin(t)\big)\big(\cos^{2n-2}(t)\sin(t)\big)\ dt &= \left[-t^2 \sin(t)\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(2t\sin(t) + t^2\cos(t)\big)\Big(\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}\Big)\ dt \\
&= \frac{2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t)\cos^{2n-1}(t)\ dt + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} I_n + J_n\right)
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
& J_{n-1}-J_n &=& \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}I_n+J_n\right)\\
\Rightarrow\quad & \frac{J_{n-1}}{I_n}-K_n &=& \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}+K_n\right)\\
\Rightarrow\quad & \frac{J_{n-1}}{\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}}-K_n &=& \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}+K_n\right)\\
\Rightarrow\quad & \frac{2n}{2n-1}K_{n-1}-K_n &=& \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}+K_n\right)\\
\Rightarrow\quad & \frac{2n}{2n-1}K_{n-1}-K_n &=& \frac{1}{n(2n-1)}+\frac{1}{2n-1}K_n\\
\Rightarrow\quad & \frac{2n}{2n-1}K_{n-1}-\frac{2n}{2n-1}K_n &=& \frac{1}{n(2n-1)}\\
\Rightarrow\quad & 2nK_{n-1}-2nK_n &=& \frac{1}{n}\\
\Rightarrow\quad & K_{n-1}-K_n &=& \frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

4. (a) On note f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t)=\frac{\pi}{2}\sin(t)-t$. f est deux fois dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(t)=\frac{\pi}{2}\cos(t)-1$$

$$f''(t)=-\frac{\pi}{2}\sin(t)$$

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
f''		$-$		$-$	
f'	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Ainsi, f est positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a donc $t\leqslant\frac{\pi}{2}\sin(t)$.

(b) Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{array}{rcccl} & & t & \leqslant & \frac{\pi}{2}\sin(t) \\ \Rightarrow & 0 \leqslant & t^2 & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t) \\ \Rightarrow & 0 \leqslant & t^2\cos^{2n}(t) & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t) \\ \Rightarrow & 0 \leqslant & \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\ dt & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2n}(t)\ dt \\ \Rightarrow & 0 \leqslant & J_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}) \\ \Rightarrow & 0 \leqslant & J_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2}I_n \\ \Rightarrow & 0 \leqslant & J_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{8}\frac{I_n}{n+1} \\ \Rightarrow & 0 \leqslant & K_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{n+1} \end{array}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, la suite (K_n) converge vers 0.

(c)
$$\begin{array}{rcl} S_n & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ & = & \sum_{k=1}^{n} 2(K_{k-1} - K_k) \\ & = & 2(K_0 - K_n) \end{array}$$

Puisque (K_n) converge vers 0 alors la suite (S_n) converge vers $2K_0 = 2 \times \frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$