-Correction-
Dénombrement, analyse combinatoire et arithmétique

1 Coefficient binomial

Exercice 1 :

1. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ est :

$$\{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\ \}$$

   Alors, il y a 1 partie à 0 élément, 3 parties à 2 éléments, 3 parties à 2 éléments et 1 partie à 3 éléments.

2. (a) Il y a 6 tirages possibles : {Pique,Coeur},{Pique,Carreau}, {Pique,Trèfle}, {Coeur,Carreau}, {Coeur,Trèfle} et {Carreau,Trèfle}.

   (b) Ce nombre peut s'exprimer avec le coefficient binomial $\binom{4}{2}$.

3. (a) En première S, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ comme le nombre de chemins possédant p succès dans un arbre de probabilités représentant un schéma de Bernoulli à n étapes.

   (b) Cette définition est cohérente avec celle de ce problème car on peut représenter la création d'une partie d'éléments de E comme une répétition de n expériences à 2 issues : pour chaque élément de E, l'élément appartiendra à la partie ou il n'y appartiendra pas. Ainsi, chaque chemin de cet arbre représente une unique partie de E et l'ensemble des chemins à p succès est l'ensemble des parties de E à p éléments.

4. (a) $\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$

   (b) $\binom{n}{p}$ est le nombre de choix de p éléments parmi n. Or choisir p éléments qui constitueront une partie ou choisir les $n - p$ éléments qui n'appartiendront pas à cette même partie revient au même. C'est pourquoi $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

5. Il est cohérent, pour $p > n$, de poser $\binom{n}{p} = 0$ car on ne peut pas constituer une partie à p éléments à partir d'un ensemble à n éléments si $p > n$.

Exercice 2 :

1. (a) Il y a $\binom{n-1}{p-1}$ parties de E à p éléments contenant a.

   (b) Il y a $\binom{n-1}{p}$ parties de E à p éléments contenant a.

(c) Il y a $\binom{n}{p}$ parties de E à n éléments. Cet ensemble peut être partitionner en deux : les parties qui contiennent a et celles qui ne le contiennent pas. D'où la relation :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

2.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Exercice 3 :

1. (a) Il y a n choix possibles pour le premier élément de L, puis $n-1$ pour le deuxième.

   (b) En généralisant ce raisonnement, il y a $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$ p-listes d'éléments de E. On a alors :

$$n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times ... \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2. (a) Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir une telle partie A.

   (b) On peut former $p!$ p-listes d'éléments de A.

   (c) Ainsi, il y a $p! \times \binom{n}{p}$ p-listes d'éléments de E.

3. On a calculé de deux façons différentes p-listes d'éléments de E. On a alors :

$$p! \times \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!} \Leftrightarrow p! = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

4. La probabilité de trouver les six bons numéros est $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,000\,07$

Exercice 4 :

1. Soit $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

3.
$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}+\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}\\
&= \frac{(n-p)\times(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{p\times(n-1)!}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{(n-1)!\times(n-p+p)}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}\\
&= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$
$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\
&= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b)\\
&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)\\
&= a^4+a^3b+3a^3b+3a^2b^2+3a^2b^2+3a^3b+3ab^3+ab^3+b^4\\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

2. **Initialisation :** pour $n=1$
$$\left.\begin{aligned}
&(a+b)^1=a+b\\
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\binom{1}{0}a^0b^1+\binom{1}{1}a^1b^0=a+b
\end{aligned}\right\}\Rightarrow (a+b)^1=\textstyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^kb^{n-k}$$
Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\\
&= \binom{n}{n}a^nb^0+\sum_{k=1}^{n}\left[(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k})\right]a^kb^{n-k+1}+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n-k+1}+\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n-k+1}
\end{aligned}$$
Conclusion : Ainsi, pour tout entier n non nul, $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

De plus, on vérifie que la formule est vraie pour $n=0$.

2 Le problème des anniversaires

Exercice 6 :

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

   (b) $f(1) = 2^n = \sum_{k=0} n \binom{n}{k}$
   Or la somme dans le membre de droite compte le nombre de parties d'un ensemble à n éléments (plus précisément, elle compte le nombre de parties à 0 éléments, puis à 1 éléments, puis à 2 éléments etc...). Ainsi, le nombre de parties d'un ensemble n éléments est 2^n.

2. (a) $f(-1) = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$

   (b) En décomposant la somme suivant la parité de l'indice on obtient donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

   Finalement, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$

   $\Rightarrow f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

   (b) $f'(-1) = 0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$

Exercice 7 :

1. On répète n fois, de manière indépendante, une même expérience aléatoire à deux issues. On considère comme succès l'évènement « la personne a la même date d'anniversaire que Léonhard », de probabilité $\frac{1}{365}$. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Alors X suit la loi $\mathscr{B}(n, \frac{1}{365})$.
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$

2. On résout
$$\begin{array}{rrcl} & q_n & \geqslant & \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & 1-\left(\frac{364}{365}\right)^n & \geqslant & \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} & \geqslant & \left(\frac{364}{365}\right)^n \\ \Leftrightarrow & \ln(\frac{1}{2}) & \geqslant & \ln(\left(\frac{364}{365}\right)^n) \\ \Leftrightarrow & \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{364}{365})} & \leqslant & n \end{array}$$
Or $\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{364}{365})} \approx 252,7$, donc $q_n \geqslant \frac{1}{2}$ à partir du rang 253.

Exercice 8 :

1. Si $n \geqslant 366$, comme il n'y a que 365 dates d'anniversaires possibles alors nécessaires deux personnes au moins ont la même date d'anniversaire et donc $p_n = 1$.
2. (a) Pour la première personne, il y a 365 dates possibles , pour la seconde 364, etc... Ainsi, il y a $365 \times 364 \times ... \times 365 - n + 1$ dates possibles deux à deux différentes pour les n personnes.
   (b) On suppose que chaque date est équiprobable, alors la probabilité que les n personnes aient des dates d'anniversaires deux à deux différentes est
$$\begin{array}{rcl} \frac{365 \times 364 \times ... \times 365 - n + 1}{365^n} & = & \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times ... \times \frac{365-(n-1)}{365} \\ & = & \prod_{k=0}^{n-1} \frac{365-k}{365} \\ & = & \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365} \end{array}$$
   (c) p_n est la probabilité de l'évènement contraire à celui étudié précédemment, on a donc : $p_n = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} - p_n & = & 1 - \prod_{k=0}^{n} (1 - \frac{k}{365} - (1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) \\ & = & \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365} - \prod_{k=0}^{n} (1 - \frac{k}{365} \\ & = & (1 - (1 - \frac{n}{365})) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365} \\ & = & \frac{n}{365} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365} \\ & > & 0 \end{array}$$
   Ainsi, la suite (p_n) est croissante.
   (b)
$$\begin{array}{rrcl} p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow & 1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) & \geqslant & \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} & \geqslant & \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) \end{array}$$

Initialisation :	Affecter 1 à n
	Affecter 1 à p
Traitement :	Tant que $p > \frac{1}{2}$
	Affecter $p \times (1 - \frac{k}{365})$ à p
	Affecter $n+1$ à n
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

3 Le petit théorème de Fermat

1. (a) $k!\binom{p}{k} = k!\frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p!}{(p-k)!} = p \times (p-1) \times ... \times (p-k+1)$

   Ainsi p divise $k!\binom{p}{k}$.

   (b) Puisque p est un nombre premier et k est un entier compris entre 1 et $p-1$ alors p est premier avec k. Par application du théorème de Gauss, on a :

   $$\left.\begin{array}{l} p|k!\binom{p}{k} \\ p \wedge k = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p|(k-1)!\binom{p}{k}$$

   En appliquant ce raisonnement de manière itérative, on montre que p divise $\binom{p}{k}$.

2. $(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$

   Or, pour k compris entre 1 et $p-1$, $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$, donc

   $$(x+y)^p \equiv \binom{p}{0} x^0 y^{p-0} + \binom{p}{p} x^p y^{p-p} \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

3. **Initialisation :** pour $a = 0$,

   $$\left.\begin{array}{l} a^p = 0^p = 0 \\ a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$$

   Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang a et on montre qu'elle est vraie au rang $a+1$.

   $$\begin{array}{rcll} (a+1)^p & \equiv & a^p + 1^p \pmod{p} & \text{propriété précédente} \\ & \equiv & a+1 \pmod{p} & \text{hypothèse de récurrence} \end{array}$$

   Conclusion : ainsi, pour tout entier a, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

4. Soit a un entier négatif. p est un nombre premier donc $p = 2$ ou p est impair.
   Si $p = 2$, $a^2 = (-a)^2 \equiv -a \pmod{2} \equiv a \pmod{2}$
   Si p est impair, $a^p = -(-a)^p \equiv -(-a) \pmod{p} \equiv a \pmod{p}$
   Ainsi, le petit théorème de Fermat est démontré.

5. On suppose le corollaire vrai. Soit p un nombre premier et a un entier relatif.
   Si a est divisible par p alors $a \equiv 0 \pmod{p}$ et donc $a^p \equiv a \pmod{p}$.
   Si a n'est pas divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ puis par multiplication par a : $a^p \equiv a \pmod{p}$.
   Ainsi le petit théorème de Fermat est vérifié.

Réciproquement, on suppose que le théorème de Fermat est vérifié. Soit p un nombre premier et a un entier relatif non divisible par p. Alors a et p sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Fermat p divise $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Comme p est premier avec a alors, d'après le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$, c'est-à-dire $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Ainsi le corollaire est démontré.