Un calcul de $\zeta(2)$

Le but de ce problème est de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

ce qui peut se traduire par :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

– I – L'intégration par parties

Afin de calculer les intégrales de certaines fonctions dont on ne peut pas trouver « mentalement » une primitive, on aura recours à l'intégration par parties, que nous allons étudier dans ce paragraphe.

1. Soit $\varphi : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée φ' continue sur $[a\ ;\ b]$. Justifier que :

$$\int_a^b \varphi'(t)dt=\varphi(b)-\varphi(a)$$

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit [1], et en apportant toutes les justifications nécessaires, démontrer le théorème suivant (formule d'intégration par parties) :

   Théorème : Si u et v sont deux fonctions réelles définies, dérivables et à dérivée continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)dt$$

   ce que l'on peut noter plus brièvement (sans la variable) :

$$\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv'$$

3. **Applications :**
   Calculer :

$$a)\int_0^1 te^t dt\quad;\quad b)\int_1^x \ln(t)dt\quad;\quad c)\int_1^x t^n\ln(t)dt\quad;\quad d)\int_1^x t^2e^{3t}dt$$

   Pour b) et c), on suppose $x>0$, pour c) on suppose $n\in\mathbb{N}^*$, enfin, pour d), deux intégrations par parties seront nécessaires pour baisser le degré de la partie polynômiale à 0.

Dans toute la suite du problème, on notera $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n\geq 1,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

1. Formule de Leibnitz

– II – Convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$

On se propose, dans cette partie, de prouver de deux manières différentes, la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

1.
   (a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \tag{1}$$

   (b) Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

   (c) En utilisant (1), montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée et justifier sa convergence vers une limite $S \in \left]0, 2\right]$.

2.
   (a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$$

   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée et retrouver la convergence de cette suite.

– III – Suites adjacentes

On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes.

   (a) Étudier les variations de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$.

   (c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

2. On considère la suite $(T_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$\forall n \geq 1,\ T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

   (a) Démontrer que les suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et retrouver le résultat de **II.1c**.

   (b) Déterminer un entier $n \geq 1$ à partir duquel, on a l'encadrement :

$$0 \leq S - S_n \leq 10^{-6}$$

   où $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

– IV – Les intégrales de Wallis

On note $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,dt,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt$$

1. Montrer que :

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ J_0 = \frac{\pi^3}{24}$$

2.

   (a) En utilisant une intégration par parties démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

   $$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

   Indication : on pourra remarquer que pour tout entier $n \geq 1$, et tout réel t, on a :

   $$\cos^{2n}(t) = \cos^{2n-1}(t)\cos(t)$$

   (b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

3. Soit $n \geq 1$.

   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{2n} I_n$$

   (b) Montrer que :

   $$J_{n-1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t^2\sin(t)\right)\left(\cos^{2n-2}(t)\sin(t)\right)dt$$

   (c) En utilisant une intégration par parties, en déduire que :

   $$J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} I_n + J_n\right) \tag{2}$$

   (d) On désigne par $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \frac{J_n}{I_n}$$

   En utilisant (2), montrer que :

   $$\frac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} + K_n\right)$$

   puis en déduire que :

   $$K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2n^2}$$

4. Nous allons montrer que $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$.

(a) Démontrer que, pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$$

(b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)}$$

puis que :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{8\,(n+1)}$$

(c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

(d) Conclure.