Dénombrement, analyse combinatoire et arithmétique

Définitions et notations :

- Si E est un ensemble fini, le cardinal de E est alors le nombre de ses éléments. En particulier, l'ensemble vide est de cardinal nul.
- Pour tout entier n strictement positif, la factorielle de n est le nombre $1 \times 2 \times ... \times n$ et on le note $n!$
  Par convention, $0! = 1$.
- Pour tous entiers a et b avec $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b.

1 Coefficient binomial

Dans ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul et E un ensemble fini de cardinal n.

Pour tout entier p compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties de E à p éléments. Cette notation sera justifiée au cours de l'exercice qui suit.

Exercice 1 :

1. Décrire toutes les parties de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. Combien y a-t-il de parties de E à 0 élément ? à 1élément ? à 2 éléments ? à 3 éléments ?
2. On considère les quatre As d'un jeu de 52 cartes. On tire au hasard et simultanément deux As.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Comment exprimer ce résultat à l'aide d'un coefficient $\binom{n}{p}$ (p et n étant à préciser).
3. (a) Rappeler la définition vue en classe de première S du coefficient binomial $\binom{n}{p}$.
   (b) Cette définition est-elle cohérente avec celle de ce problème ?
4. (a) Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.
   (b) Montrer que pour tout entier p compris entre 0 et n, on a :
   $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$
5. Comment peut-on définir $\binom{n}{p}$ pour $p > n$?

Exercice 2 :
L'objectif de cet exercice est de démontrer la relation de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in [\![1, n]\!],\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

On se fixe un élément a quelconque de E.

1. Soit p un entier compris entre 1 et n.

(a) Combien y a-t-il de parties de E à p éléments contenant a ?

(b) Combien y a-t-il de parties de E à p éléments ne contenant pas a ?

(c) En déduire la relation de Pascal.

2. **Triangle de Pascal.**

En utilisant la relation de Pascal, remplir le tableau suivant avec les valeurs des $\binom{n}{p}$ correspondantes.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3						
4						
5						

Exercice 3 :

L'objectif de cet exercice est de trouver une formule explicite permettant de calculer les coefficients $\binom{n}{p}$, pour p entier compris entre 0 et n.

Pour $p = 0$, on a déjà $\binom{n}{0} = 1$, on suppose donc que p est non nul pour la suite de cet exercice.

Pour tout entier naturel non nul p, on appelle p-liste d'éléments de E toute suite ordonnée de p éléments deux à deux distincts de E.

1. Soit L une p-liste d'éléments de E.

   (a) Combien y a-t-il de choix possibles pour le premier élément de L ? Puis pour le deuxième ?

   (b) En généralisant, combien y a-t-il de p-listes d'éléments E ? On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. Soit A une partie à p éléments de E.

   (a) De combien de façons peut-on choisir une telle partie A ?

   (b) Combien de p-listes d'éléments de A peut-on former ?

   (c) En déduire le nombre de p-listes d'éléments de E.

3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, montrer que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (*)$$

   On constate que cette formule est valable pour $p = 0$.

4. **Application.**
   On considère un jeu de loto qui consiste à choisir 6 nombres entiers compris entre 1 et 49. Quelle est la probabilité de trouver les six bons numéros ?

Exercice 4 : Quelques applications

En utilisant la formule $(*)$, montrer que :

1.

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2. $$\forall p \in [\![1, n-1]\!], \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

3. $$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad \textit{Formule de Pascal}$$

Exercice 5 : Formule du binôme de Newton
Soient a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
2. Plus généralement, montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$
3. La formule précédente est-elle valable pour A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 6 :
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$ (où n est toujours un entier naturel non nul).

1. (a) En utilisant la formule du binôme, écrire $f(x)$ autrement.
   (b) En évaluant la fonction f en 1, déduire de la question précédente que le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est égal à 2^n.
2. (a) En évaluant la fonction f en -1, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.
   (b) Déduire de la question précédente que dans un ensemble E à n éléments, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
3. En utilisant une dérivation, montrer que :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n$.
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$.

2 Le problème des anniversaires

Exercice 7 :
Léonhard fait partie d'un groupe de $n+1$ personnes où n est un entier supérieur ou égal à 1. On étudie la probabilité de l'évènement « une personne du groupe au moins a la même date d'anniversaire (jour et mois) que Léonhard ». On considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables.
On notera q_n cette probabilité.

1. Calculer q_n.
2. Déterminer algébriquement le rang à partir duquel $q_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 8 :
On considère un groupe de n personnes où n est un entier supérieur ou égal à 2.
On étudie la probabilité de l'évènement « deux personnes du groupe au moins ont la même date d'anniversaire (jour et mois) ». On considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables.
On notera p_n cette probabilité.

1. On suppose $n \geqslant 366$. Que vaut p_n ?
2. On suppose désormais que n est compris entre 2 et 365.
   (a) Combien y a-t-il de possibilités pour que les n personnes aient des dates d'anniversaires deux à deux différentes ?
   (b) En déduire la probabilité que les n personnes aient des dates d'anniversaires deux à deux différentes.
   (c) Montrer que $p_n = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \dfrac{k}{365}\right)$.
3. (a) Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) Ecrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel $p_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

3 Le petit théorème de Fermat

On souhaite démontrer le résultat suivant connu sous le nom de petit théorème de Fermat :

Théorème

Soit p un nombre premier et a un entier relatif. Alors

$$a^p \equiv a \ (mod\ p)$$

Soit p un nombre premier et k un entier compris entre 1 et $p-1$.

1. (a) Montrer que p divise $k!\dbinom{p}{k}$.
   (b) En déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.
2. Soient $x,\ y \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \ (mod\ p)$.
3. Montrer par récurrence que :
$$\forall a \in \mathbb{N},\ a^p \equiv a \ (mod\ p)$$
4. En déduire le théorème de Fermat.

Corollaire

Soit p un nombre premier et a un entier relatif non divisible par p.

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

5. Montrer que cet énoncé est équivalent à celui du théorème démontré précédemment.