XMP 2009-2010

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

a. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbf{R}$ **b.** $f_n(x)=x\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbf{R}^+$ **c.** $f_n(x)=\sin x\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbf{R}^+$

d. $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ **e.** $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$ sur $\mathbf{R}^+$ **f.** $f_n(x)=\sin\dfrac{n+1}{n}x$ sur $\mathbf{R}$, sur $[a,b]$.

2. **a.** Parmi les propriétés suivantes, y en-a-t-il qui passent à la limite simple ?

i. la croissance ;
ii. la monotonie ;
iii. la convexité ;
iv. la périodicité ;

b. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convergeant uniformément vers *f*. Quelle hypothèse raisonnable doit-on faire sur une fonction numérique *g* pour que la suite $(g\circ f_n)$ converge simplement ? uniformément ?

c. Soit une suite de fonctions uniformément continues sur une partie *A* d'un espace vectoriel normé *E*, convergeant uniformément sur *A* vers une fonction *f*. *f* est-elle uniformément continue ?

(**d**).Soit (f_n) une suite de fonctions *k*-lipschitziennes, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction *f*. Prouver que *f* est *k*-lipschitzienne, et que la convergence est uniforme.

3. On définit une suite de polynômes sur $[0,1]$ par :

$$P_0=0\ ;\ P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{x-P_n(x)^2}{2}.$$

a. Prouver que pour tout entier *n* et pour tout *x* de $[0,1]$, on a $0\le P_n(x)\le\sqrt{x}$.

b. En déduire la convergence simple de la suite (P_n) vers une limite que l'on précisera.

c. Prouver que cette convergence est uniforme.

(4). <u>Théorème de Dini</u> : Soit *K* un compact d'un espace vectoriel normé *E*, et (f_n) une suite croissante de fonctions numériques continues sur *K*, convergeant simplement vers une fonction continue *f*. Le théorème de Dini affirme que cette convergence est uniforme.

a. Prouver qu'une intersection décroissante de fermés non vides inclus dans *K* est non vide.

b. On fixe $\varepsilon>0$, et on pose $K_n=\{x\in K\ /\ f_n(x)\le f(x)-\varepsilon\}$. Prouver que la suite (K_n) est une suite décroissante de fermés, d'intersection vide.

c. Conclure.

5. On définit par récurrence sur $I=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ une suite de fonctions en posant $f_0=0$ et pour $n\ge0$,

$$f_{n+1}(x)=\frac{x^3}{3}+\int_0^x f_n^2(t)\mathrm{d}t\ .$$

a. Prouver que $|f_n(x)|\le 5/6$ pour tout *x* de *I*.

b. Prouver que pour tout $n\ge1$, on a $\|f_{n+1}-f_n\|_\infty\le 5/6\|f_n-f_{n-1}\|_\infty$

c. Qu'en déduire concernant la série de fonctions $\sum(f_{n+1}-f_n)$?

Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur *I*. Soit *f* sa limite.

d. Prouver que *f* est une solution sur *I* de l'équation différentielle $y'=x^2+y^2$ satisfaisant à $f(0)=0$.

6. On pose, quand cela a un sens, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n^2x}$.

Étudier la fonction f (définition, régularité de la somme, limite aux bornes).

7. Soit r un réel élément de $[0,1[$ fixé.

a. Prouver la convergence de la série de fonctions (de θ) $\sum r^n \sin n\theta$, et calculer sa somme.

b. Prouver de même la convergence de la série $\sum r^n \frac{\cos n\theta}{n}$. Calculer la somme de cette série.

c. Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)\mathrm{d}\theta$.

d. Prouver que pour $|r|>1$, l'intégrale envisagée à la question **c.** a un sens, et la calculer.

8. Prouver que l'on définit une fonction sur **R** en posant :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\arctan(n+x)-\arctan n\right).$$

Montrer que f est de classe C^1 sur **R**, donner une relation liant $f(x+1)$ et $f(x)$, et déterminer la limite de f en $+\infty$.

9. On pose, quand c'est possible, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f, prouver que f est continue, qu'elle décroît sur $\mathbf{R}^+$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

b. Donner, par comparaison avec une intégrale, un encadrement de $f(x)$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

(10). Pour $x>0$, on pose $\psi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a. Donner une relation reliant $\psi(x)$ et $\zeta(x)$ pour $x>1$.

b. Prouver que ψ est continue sur $\mathbf{R}^{+*}$.

c. Prouver que ψ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^{+*}$ (attention !).
Retrouver l'équivalent de ζ au voisinage de 1.

On pose désormais, pour x élément de $]1,2]$ et $n>0$, $u_n(x)=\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

c. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]1,2]$ et exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ.

d. Déterminer la limite en 1 de la fonction u_n et en déduire $\lim_{x\to1+}\left(\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\right)$.

e. Déterminer la somme de la série $\sum(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

11. **a.** Prouver, pour tout réel x de $]-1,1[$, l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{1-x^p}$ (*indication :* je suis trop gentil !).

b. En déduire la valeur de $\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$.

c. Retrouver la valeur de la limite précédente par comparaison de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ avec une intégrale.