Séance n° 1-2

Thème : Calcul différentiel

---

1 Exercices

1. Étudier l'existence d'une limite en (0,0) des fonctions suivantes :
$\dfrac{xy}{x+y}$; $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$; $\dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$; $\dfrac{x^2}{|x-y|}$; x^y ;
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $g(x,y) = f(y,x)$ et $h(x) = f(x,x)$. Montrer que g et h sont de classe C^1 et calculer leurs dérivées partielles premières.
3. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2$ si $|x| \geqslant y$, $f(x,y) = y^2$ si $|x| < y$, puis l'existence et la continuité des dérivées partielles.
4. Mêmes questions pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$: Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
6. L'énoncé suivant est-il correct ? Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telles que $f(0,0) = (0,0)$ et $g(0,0) = 0$. Si f et g admettent des dérivée partielles en $(0,0)$, alors $g \circ f$ aussi.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$. Montrer que f est de classe C^1.
8. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue, et différentiable sur U. On suppose f sur la frontière de U. Montrer qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df_{x_0} = 0$.
9. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur U. On suppose que U est convexe et qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in U, |||df_x||| \leqslant M$. Montrer que, pour tous $a, b \in U$, $\|f(a) - f(b)\| \leqslant M\|a-b\|$.
10. Soit E un espace euclidien. Montrer que $u \mapsto \|u\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
11. E est un plan euclidien, F et F' deux points distincts de E et $a > ||FF'||/2$. Montrer que l'application $M \mapsto MF + MF'$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle. En déduire que la normale et la tangente à l'ellipse $FM + F'M = 2a$ au point M sont les bissectrices des droites passant par M et dirigées par $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{F'M}$.
12. Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien. On s'intéresse au minimum de la fonction $h : M \mapsto MA + MB + MC$ (point de Fermat).
    (a) Montrer (sans calcul) que h admet un minimum global (c'est-à-dire qu'il existe M_0 tel que $h(M_0) \leqslant h(M)$ pour tout M).
    (b) Montrer que h est différentiable sur le plan privé de $\{A, B, C\}$ et calculer sa différentielle.

(c) Soit $M \notin \{A, B, C\}$. Montrer que si h présente un extremum en M, alors $\frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{\|BM\|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{\|CM\|} = 0$.

(d) Montrer que s'il existe $M \notin \{A, B, C\}$ tel que $\frac{\overrightarrow{AM}}{\|AM\|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{\|BM\|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{\|CM\|} = 0$, alors les angles au sommet du triangle sont strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

(e) Montrer que si l'écart angulaire $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$ est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, alors le minimum de h est atteint en A (et seulement en A).

(f) Montrer que h admet, en A, B et C une "demi-dérivée" dans la direction de chaque vecteur w (c'est-à-dire que, par exemple, $\frac{h(A+tw)-h(A)}{t}$ admet une limite quand $t \to 0^+$). Montrer que si l'écart angulaire $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$ est strictement inférieur à $\frac{2\pi}{3}$, on peut trouver w tel que cette demi-dérivée soit strictement négative. En déduire que le minimum de h n'est pas atteint en A.

(g) Conclure.

13. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite convexe si : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$.

   (a) Montrer qu'une application convexe est continue.

   (b) On suppose f de classe C^1. Montrer que f est convexe si et seulement si , pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$, $f(b) \geqslant f(a) + df_a(b-a)$.

14. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des deux énoncés suivants :
   - f est homogène de degré p : $\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$
   - f satisfait la relation d'Euler : $\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = pf(x)$

15. Déterminer un ouvert maximal U de $\mathbb{R}^2$ tel que l'application $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ définisse un C^1-difféomorphisme de U sur son image.

16. Soit $k \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ |f'(t)| \leqslant k < 1$. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x+f(y), y+f(x))$. Montrer que F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

17. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, où $b^2 - ac \leqslant 0$ (factoriser le polynôme $aX^2 + 2bXY + cY^2$ et en déduire un changement de variables simple permettant de se ramener à $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$).

18. Résoudre les équations suivantes, en passant en coordonnées polaires (on choisira un domaine de définition adéquat) : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$; $\quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

19. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes : $x^2+xy+y^2+2x+3y$; $\quad x^3+y^3-3xy$; $e^{x \sin y}$; $\quad xe^y + ye^x$;

20. Déterminer les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

21. (extrema liées) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f, g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $V = \{(x,y,z); g(x,y,z) = 0\}$ et l'on suppose $V \neq \emptyset$ et que, pour tout $(x,y,z) \in V$, $dg_{(x,y,z)} \neq 0$. Montrer que si (x_0, y_0, z_0) est un extremum local de $f|_V$ (restriction de f à V), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_{(x_0,y_0,z_0)} = \lambda dg_{(x_0,y_0,z_0)}$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$$

22. Retrouver l'inégalité arithmético-géométrique en étudiant les extrema de la fonction $f(x_1, ..., x_n) = x_1 x_2 ... x_n$, définie sur l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$: $\{(x_1, ..., x_n); x_1 + ... + x_n = 1\}$.

23. *Une application des extrema liées à une question de codage.* Supposons que l'on veuille un procédé de codage en binaire un message reçu en français. À chaque lettre e_i $(1 \leqslant i \leqslant N$, on associe un code binaire, comme par exemple $A \to 0110$, $B \to 1001$ etc. Afin de pouvoir décoder aisément le message, on demande que le code d'une lettre ne soit jamais le préfixe (le début) du code d'une autre lettre (un tel code est qualifié de code préfixe). On souhaite choisir le code de manière à ce que, compte tenu de la fréquence moyenne p_i d'apparition de chaque lettre p_i dans un texte en français, la longueur moyenne d'un message soit aussi petite que possible. Plus précisément, si on note ℓ_i la longueur du code de e_i, on souhaite minimiser la quantité

$$M = \sum_{i=1}^{N} p_i \ell_i$$

Une heuristique en terme de quantité d'information permet de deviner la meilleure valeur possible pour C. Considérons qu'apprendre la réalisation d'un événement dont la probabilité est $1/2$ nous apporte un bit d'information. Alors, apprendre que n lancers successifs de pile ou face ont donné tel résultat nous apporte 3 bits d'information. Or un tel événement a pour probabilité $1/2^n$ et $n = -\log_2(1/2^n)$. On est ainsi amené à considérer que connaître la réalisation d'un événement de probabilité p apporte $-\log_2(p)$ bit d'information. Noter que ceci est compatible avec l'idée que la connaissance de la réalisation d'un événement certain n'est pas une information, tandis que savoir qu'un événement extrêmement rare se produit est une information précieuse !
La lecture de la lettre e_i d'un message en français apporte donc une information égale à $-\log_2(p_i)$ et la lecture d'une lettre quelconque apporte, en moyenne, une information égale à

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2(p_i)$$

Cette quantité est appelée entropie et l'idée heuristique est que le codage en binaire ne pourra pas améliorer cette information moyenne, c'est-à-dire que, quelque soit le code préfixe, la longueur moyenne du code d'une lettre sera au moins égale à H :

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \ell_i \geqslant H$$

L'exercice consiste à prouver rigoureusement cette inégalité (se ramener à minimiser $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \sum_{p_i x_i}$ sur $\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_+^*;\ \sum_{i=1}^{N} 2^{x_i} = 1\}$). Montrer ensuite qu'il existe un codage pour lequel

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \ell_i \leqslant H + 1$$

Remarque : le codage de Huffman montre de manière très explicite comment construire un tel codage.

24. *Dans cet exercice, on évitera les calculs longs et pénibles qu'on lit (ou pas) dans de nombreux ouvrages en utilisant les définitions intrinsèques de* grad *et* div *plutôt que leur expressions dans une base orthonormée.*
   (a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose, pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Calculer $\mathrm{grad}(f)$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ (on l'exprimera dans la base "mobile" $u_r = (\cos(\theta), \sin(\theta)$ et $u_\theta = (\sin(\theta), \cos(\theta))$.
   (b) Soit $X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,)\} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. On pose
   $$X(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = A(r,\theta)u_r + B(r,\theta)u_\theta$$
   Calculer $\mathrm{div}X$ en fonction des dérivées partielles de A et B.
   (c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Calculer $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$ en fonction des dérivées partielles secondes de g.
   (d) Faire la même chose en coordonnées sphériques.
25. Soient $\| \ \|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et, pour $r \in \mathbb{R}^+$: $\alpha(r) = \sup\{f(x),\ \|x\| \leqslant r\}$ et $\beta(r) = \inf\{f(x),\ \|x\| \leqslant r\}$. On suppose : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathrm{grad}f(x)\| \geqslant 1$. Montrer, si $r \geqslant 0$: $\alpha(r) - \beta(r) \geqslant 2r$.
26. *(preuve élémentaire du théorème des fonctions implicites pour une fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$*)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^k, $k \geqslant 1$. On suppose $f(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [-\beta,\beta]^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha < \beta$ tel que $\forall x \in]-\alpha,\alpha[$, $f(x,-\beta) < 0$ et $f(x,\beta) > 0$.
   (c) Montrer qu'il existe une unique application $\varphi :]-\alpha,\alpha[\to]-\beta,\beta[$ telle que
   $$\forall (x,y) \in]-\alpha,\alpha[\times]-\beta,\beta[,\ f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$
   (d) Montrer que φ est continue.
   (e) Montrer que φ est C^1 puis C^k.

2 Problème

EITPE 1981

$n \geqslant 1$ est un entier fixé. On note $(x_1, x_2, ..., x_n)$ les coordonnées dans la base canonique de $x \in \mathbb{R}^n$.
$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ désigne une matrice symétrique.
On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
$D : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ désigne l'application définie par :

$$D(f) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

D est une application linéaire dont on notera $\mathcal{N}$ le noyau.
Le but de ce problème est d'étudier les applications $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 qui conservent $\mathcal{N}$, c'est-à-dire qui vérifient : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{N} \implies f \circ u \in \mathcal{N}$.
Étant donnée $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J_x(u) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice

$$J_x(u) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right]_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

Étant donnée $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}, H_x(g) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice

$$H_x(g) = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

2.1 Première partie

u désigne une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 qui conserve $\mathcal{N}$. On pose $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ (donc $u_k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$).

1. Montrer que chaque u_k est dans $\mathcal{N}$ (on pourra considérer $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x_k$).
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Exprimer $\dfrac{\partial(f \circ u)}{\partial x_i}(x)$ en fonction des $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$, de u et x.

   (b) En appliquant deux fois cette relation, montrer que, pour tous i, j vérifiant $1 \leqslant i, j \leqslant n$:
   $$\frac{\partial^2(f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(u(x))\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))\right]$$
   (c) Interpréter ces égalités comme une identité matricielle qui exprime $H_x(f \circ u)$ en fonction de ${}^tJ_x(u)$, $H_{u(x)}(f)$, $J_x(u)$ et des $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))$ et $H_x(u_k)$.
3. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.
   (a) Montrer que que $(A, B) \mapsto Tr(AB)$ est un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$).
   (b) Soient A_1 et A_2 dans $S_n(\mathbb{R})$. Montrer que si, pour tout $S \in S_n(\mathbb{R}),\ Tr(A_1 S) = 0 \implies Tr(A_2 S) = 0$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A_2 = \lambda A_1$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Montrer que $D(f)(x) = Tr(AH_x(f))$.
   (b) Montrer que $D(f \circ u)(x) = Tr(A^tJ_x(u)H_{u(x)}(f)J_x(u))$.
5. Soit $S = (S_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})$, et $Q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ définie par : $Q(x) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} S_{i,j} x_i x_j$. Calculer $H_x(Q)$.
6. Déduire de ce qui précède l'existence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'un réel $\lambda(x)$ vérifiant : $J_x(u)A^tJ_x(u) = \lambda(x)A$. Montrer alors : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n),\ D(f \circ u)(x) = \lambda(x)D(f)(u(x))$.
7. Résoudre complètement le problème lorsque $n = 2$ et $D(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$.

2.2 Seconde partie

On suppose dans cette partie que la matrice A est inversible et l'on pose $B = A^{-1}$ $(B = (b_{i,j}))$. $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ désigne maintenant une application de classe C^2 telle que :

i. $\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n, D(u_k) = 0$
ii. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \lambda(x);\ J_x(u)A^tJ_x(u) = \lambda(x)A$
iii. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \det(J_x(u)) \neq 0$

1. Montrer, pour chaque x, l'unicité de $\lambda(x)$. Prouver que l'application λ ainsi définie ne s'annule pas et est de classe C^1. Établir ensuite : ${}^tJ_x(u)BJ_x(u) = \lambda(x)B$.

2. Montrer que pour tous i, j, k dans $[1, n]$,

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1^n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}b_{k,i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}b_{i,j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}b_{j,k}\right]$$

Indication : Poser $T_{i,j,k} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}$ *et évaluer la dérivée partielle par rapport à* x_k *de* $\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1^n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_q}{\partial x_j}$

3. Prouver que : $\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ (n-2)\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0$.

   Indication : Calculer $\sum_{i,j}\sum_{p,q} A_{i,j}b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}$.

4. On suppose $n \neq 2$.

   (a) Montrer que λ est constante et déduire de **2.** que, pour tous i,j,q, $\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.

   (b) Prouver alors que u est affine.

5. Donner un exemple lorsque $n = 2$ attestant que la conclusion de **4.** n'est pas valide dans ce cas.