Banque <<Agro -Véto>>
A - 0510

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE B

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les parties B et C utilisent le résultat de la question A.5.b. La question C.1 ne dépend pas des questions B.1, B.2, B.3.

Le but de ce problème est la modélisation du passage des bus à un arrêt.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
λ désignera dans tout le problème un réel strictement positif.

On rappelle qu'une variable aléatoire à densité X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si une de ses densités est la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

A. Loi gamma

A.1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

a) En utilisant $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t/2}$, montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que, pour $t > A$,

$$0 \leq t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t/2} \leq 1.$$

En déduire que $\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

b) En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge.

A.2. a) Calculer $\Gamma(1)$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$

A.3. Soit U une variable aléatoire réelle, et soit n un entier naturel strictement positif (on rappelle que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). On dit que U **suit la loi gamma de paramètres** n **et** λ si et seulement si U est une variable aléatoire dont une densité est donnée par la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ définie par :

$$\varphi_{n,\lambda} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

On note alors $U \sim \gamma(n, \lambda)$

a) Vérifier que la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ ainsi définie est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
b) Soit U une variable aléatoire de loi $\gamma(n, \lambda)$.
Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

A.4. Soit un réel $x > 0$. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls, on pose

$$I(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (x - t)^{q-1} \mathrm{d}t.$$

a) Calculer $I(1, q)$.
b) Pour $p \geqslant 2$, calculer $I(p, q)$ en fonction de p, q et $I(p - 1, q + 1)$.
c) En déduire que $I(p, q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} x^{p+q-1}$.

A.5. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.
On considère deux variables aléatoires réelles X_p et X_q indépendantes de lois respectives $\gamma(p, \lambda)$ et $\gamma(q, \lambda)$.
On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et de densités de probabilité respectives g et h définies sur $\mathbb{R}$, alors $X + Y$ admet pour densité la fonction θ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\theta : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) g(x - t) \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que $X_p + X_q \sim \gamma(p + q, \lambda)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n variables aléatoires mutuellement indépendantes $(U_1, \ldots, U_n)$ de même loi exponentielle de paramètre λ.

i) Vérifier que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi gamma dont on précisera les paramètres.

ii) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$ est une variable aléatoire de loi $\gamma(n, \lambda)$.

On rappelle que le résultat de cette question sera utilisé dans la suite du problème.

B. Modélisation du passage des bus

On s'intéresse aux instants de passage successifs des bus à un arrêt donné. Dans cette modélisation, le passage d'un bus à un arrêt est considéré comme instantané (le bus arrive et repart au même instant).

Le service commence à l'instant T_0. Le premier bus du matin passe à l'instant T_1. On pose $U_1 = T_1 - T_0$ qui représente donc le temps entre l'ouverture du service et le passage du premier bus de la journée. Le temps écoulé entre les passages du premier et du second bus de la journée est modélisé par une variable aléatoire U_2. T_2 désigne l'instant auquel ce second bus arrive ; on a donc $U_2 = T_2 - T_1$. Le bus suivant passe ensuite à l'instant T_3 au bout d'un temps U_3, et ainsi de suite ...
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, T_n désigne l'instant ou le n-ième bus arrive à l'arrêt et U_{n+1} le temps écoulé entre les passages du n-ième et du $(n+1)$-ième bus de la journée.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

Dans cette partie et la suivante, on suppose les variables T_n et U_n définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que les variables aléatoires $(U_n)_{n \geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes. On suppose de plus qu'elles suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose $T_0 = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.

On définit enfin la fonction de comptage N de la façon suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, N_t est le nombre de bus qui sont passés à l'arrêt dans l'intervalle $[0, t]$.

B.1. On cherche tout d'abord à se faire une idée des propriétés élémentaires du modèle.

a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que
   i) $N_t = 0$ si et seulement si $t < T_1$,
   ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_t = n$ si et seulement si $T_n \leqslant t < T_{n+1}$.

b) Tracer le graphe de $t \mapsto N_t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 3,5$ et des valeurs $U_1 = 1$; $U_2 = 0,5$; $U_3 = 1,5$; $U_4 = 0,25$; $U_5 = 1$.

B.2. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra que N_t est une variable aléatoire réelle discrète et on s'intéresse ici à sa loi.

a) Donner la loi de T_n.

b) Montrer que $N_t \geqslant n$ si et seulement si $T_n \leqslant t$. En déduire une expression de $P[N_t \geqslant n]$ utilisant une intégrale.

c) En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt (on pourra dériver la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda x}$).

B.3. On suppose que les bus de la ligne passant à l'arrêt considéré peuvent avoir deux terminus A et B différents. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note A_t (respectivement B_t) le nombre de bus allant au terminus A (respectivement au terminus B) qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t. N_t désigne comme ci-dessus le nombre total de bus, tous terminus confondus. On a donc $N_t = A_t + B_t$.

Lorsqu'un bus se présente à l'arrêt, on suppose qu'il a pour terminus A avec une probabilité $p \in]0, 1[$, et B avec la probabilité $1 - p$, indépendamment des autres bus.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer la probabilité conditionnelle $P[A_t = k | N_t = n]$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et k entier, $0 \leqslant k \leqslant n$.

b) En déduire la loi de A_t.

C. Absence de mémoire

Dans cette partie, on fixe un instant $s \in \mathbb{R}_+^*$. Pour des raisons d'étude statistique, un employé de la compagnie de bus se poste chaque jour à l'instant s à l'arrêt étudié et note les heures de passage des bus à partir de cet instant. On appelle U'_1 le temps que cet employé attend avant de voir passer un premier bus, puis U'_2, U'_3, etc ... les intervalles de temps entre les passages de chacun des bus suivants. On pose $T'_1 = U'_1$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T'_n = \sum_{k=1}^{n} U'_k$. Enfin, on définit une nouvelle fonction de comptage M, de sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, M_t représente le nombre de bus que l'employé a vu passer à l'arrêt au bout d'un temps t à partir de son arrivée à l'instant s, c'est-à-dire dans l'intervalle $]s, s+t]$. Les variables N_t, T_n, U_n intervenant dans la suite de cette partie sont définies dans la partie **B**.

C.1. On cherche à déterminer la loi de T'_1.

a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

i) Pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ fixés, $a < b$, que représente la quantité $N_b - N_a$?
En déduire que $M_t = N_{t+s} - N_s$.

ii) Montrer que l'événement $[T'_1 \leqslant t]$ est la réunion des événements $[T_n \leqslant s \ \cap \ s < T_{n+1} \leqslant s+t]$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que T_n et U_{n+1} sont indépendantes ; déterminer la loi du couple (T_n, U_{n+1}).

Montrer que $P[T_n \leqslant s \ \cap \ s < T_{n+1} \leqslant t+s] = \displaystyle\iint_A \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant s, s - x < y \leqslant s + t - x\}$, et calculer cette probabilité.

b) En déduire que T'_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ.

c) On admettra que ce résultat entraîne que pour tout n, T_n a la même loi que T'_n, et que M_t a même loi que N_t pour tout $t \geqslant 0$. Cette dernière propriété est appelée **absence de mémoire**. Pourquoi ?

C.2. paradoxe du bus

On s'intéresse à la quantité Δ égale au temps écoulé entre le passage du dernier bus avant l'instant s d'arrivée de l'employé et l'instant s si au moins un bus est passé, égale à s sinon. On admettra que Δ est une variable aléatoire réelle.

a) Pour tout $t \geqslant 0$, que représente la quantité T_{N_t} ? Montrer que $\Delta = s - T_{N_s}$.

b) À quoi correspond l'événement $[\Delta = s]$? Montrer que $P[\Delta \leqslant s] = 1$.

c) Calculer $P[\Delta = s]$. Montrer que Δ n'est pas une variable aléatoire à densité.

d) Pour $t \in]0, s[$, montrer que $\Delta < t$ si et seulement si $N_s - N_{s-t} \geqslant 1$. En déduire $P[\Delta < t]$.
En déduire que $P(\Delta = t) = 0$.

e) Donner la fonction de répartition F de Δ. Montrer que F est dérivable sur $]0, s[$, et que sa dérivée est prolongeable par continuité sur $[0, s]$. On notera g le prolongement ainsi obtenu.

f) On admettra que Δ possède une espérance donnée par la formule $E(\Delta) = \displaystyle\int_0^s tg(t)\mathrm{d}t + sP[\Delta = s]$.
Calculer cette espérance.

g) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(\Delta) + E(U'_1) > E(U_n)$. En quoi ce résultat est-il paradoxal ?

Ce résultat est couramment appelé paradoxe du bus.

FIN DE L'ÉPREUVE