Les quelques exercices qui suivent n'ont aucune vocation à être originaux ou sophistiqués. Leur seul objectif est de vous faire manipuler les quelques théorèmes que nous avons vus ensemble lors de la séance du mercredi 22 septembre.

1. Théorème de Dini : Soit K un compact d'un e.v.n. E, et (f_n) une suite croissante de fonctions numériques continues sur K, convergeant simplement vers une fonction continue f. On veut prouver que cette convergence est uniforme.

a. Prouver qu'une intersection décroissante de fermés non vides inclus dans K est non vide.

b. On fixe $\varepsilon > 0$, et on pose $K_n = \{x \in K \,/\, f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon\}$. Prouver que la suite (K_n) est une suite décroissante de fermés, d'intersection vide.

c. Conclure.

d. *Application au théorème de convergence monotone dans le cas des fonctions continues*

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques positives et continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, convergeant simplement sur I en croissant vers une fonction continue f. On suppose la suite $\left(\int_I f_n\right)$ majorée.

i. Prouver que pour tout segment J inclus dans I, la suite $\left(\int_J f_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

ii. En déduire que f est sommable sur I.

iii. Prouver enfin que $\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.

2. f désignant une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}$, on pose, pour tout entier n non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n} f(t)\,dt$. Étudier l'existence de I_n et calculer la limite de la suite (I_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}\,dx$. Étudier la suite (I_n) puis la série $\sum I_n$.

4. On pose, pour x réel, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$.

a. Donner le domaine de définition de la fonction Γ.

b. Prouver que pour tout t du segment $[0, n]$ (n entier), on a $0 \leq (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$.

c. En déduire que si x est un réel strictement positif, $\Gamma(x) = \lim_n \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\,dt$.

d. Prouver alors que pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_n \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

5. Calculer $L = \lim_n I_n$ avec $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$, puis donner un équivalent de $I_n - L$ (nettement plus délicat !).

6. Étudier l'existence et la sommabilité sur $\mathbf{R}^{+*}$ de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha x^\beta}$ (α et β réels strictement positifs).

7. Théorème de Poincaré

f et g désignent deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ sur $\mathbf{R}^2$. Prouver l'existence d'une fonction h de classe C^1 vérifiant $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$.