Le problème de Fermat

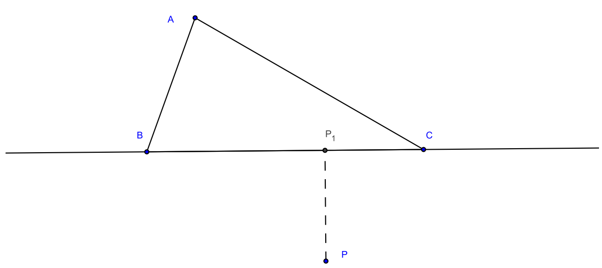
Il s'agit du problème de minimisation suivant: étant donné 3 points non alignés A, B, C du plan affine euclidien E, minimiser la somme $g(M) = MA + MB + MC$ des distances d'un point M de E à ces 3 points.
Un argument de compacité immédiat (il suffit de remarquer que le minimum est atteint en un point du disque fermé de centre A et de rayon $AB + AC$) montre que la fonction g admet effectivement un minimum. Un argument de calcul différentiel permet ensuite de localiser ce minimum:

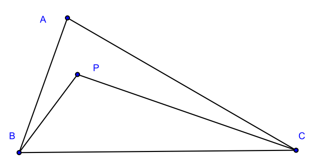
Lemme 1. *Soit A un point fixé de E et f la fonction de E dans $[0, +\infty[$ définie par $f(M) = AM$. Alors f est différentiable en tout point de E différent de A et son gradient en M est égal à $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$.*

Il résulte de ce lemme que le minimum est atteint, soit en un des points A, B, C, soit en un point où le gradient de g s'annule, i.e. en un point où la somme des 3 vecteurs unitaires $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$, $\dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM}$, $\dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ est nulle. Or:

Lemme 2. *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 3 vecteurs unitaires de $\overrightarrow{E}$. Alors la somme $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ est nulle si et seulement si ces vecteurs forment entre eux des angles de $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.*

Il en résulte que le minimum est atteint, soit en un des points A, B, C, soit en un point d'où l'on voit les 3 côtés du triangle ABC sous des angles de $\pm\dfrac{2\pi}{3}$. Par ailleurs un point minimisant g appartient nécessairement à l'enveloppe convexe des 3 points A, B, C, c'est-à-dire au triangle plein ABC. En effet si P est extérieur à ce triangle, un des côtés du triangle sépare P du troisième sommet, et la projection orthogonale P_1 de P sur ce côté vérifie $P_1A + P_1B + P_1C < PA + PB + PC$.





Lemme 3. *Si le triangle ABC a un angle géométrique supérieur à $\dfrac{2\pi}{3}$, le minimum est atteint en un des points A, B, C.*

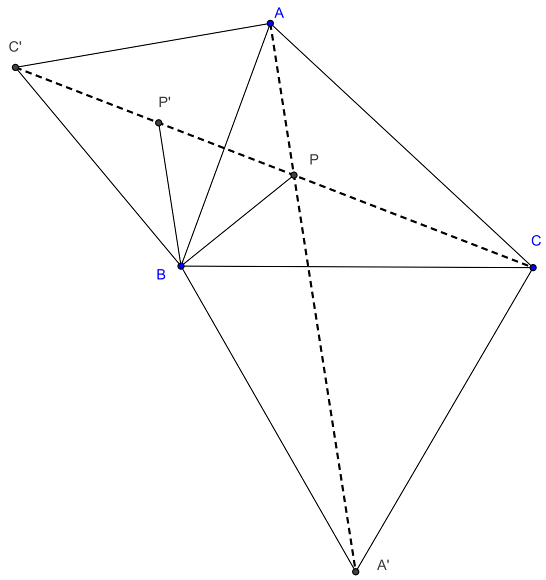
En effet il n'existe pas dans ce cas de point intérieur au triangle d'où l'on voit les 3 côtés sous des angles de $\dfrac{2\pi}{3}$ (pour tout point P intérieur au triangle, l'angle géométrique $\widehat{BPC}$ est supérieur à l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, puisque $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} =$

$\widehat{BPC} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \pi$ et $\widehat{ABC} > \widehat{PBC}$, $\widehat{ACB} > \widehat{PCB}$).
Le minimum est en fait dans ce cas atteint au sommet dont l'angle est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, puisque le côté opposé est le plus grand côté du triangle.

Le problème n'a donc d'intérêt que dans le cas où les 3 angles du triangle sont $< \frac{2\pi}{3}$. Nous faisons désormais cette hypothèse.
Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (on suppose le plan orienté et le triangle ABC direct), $C' = r(A)$, $A' = r^{-1}(C)$. Les triangles $AC'B$ et $BA'C$ sont donc les triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle ABC sur les côtés AB et BC (voir figure). Soit M un point quelconque du plan et $M' = r(M)$. On a alors $MA = M'C'$ (une rotation est une isométrie) et $MB = M'M$ (le triangle BMM' est équilatéral), d'où:

$$MA + MB + MC = C'M' + M'M + MC \geq C'C\,,$$

ce qui montre que le minimum de g est supérieur ou égal à $C'C$, cette valeur ne pouvant être atteinte que si les points C', M', M et C sont alignés dans cet ordre.

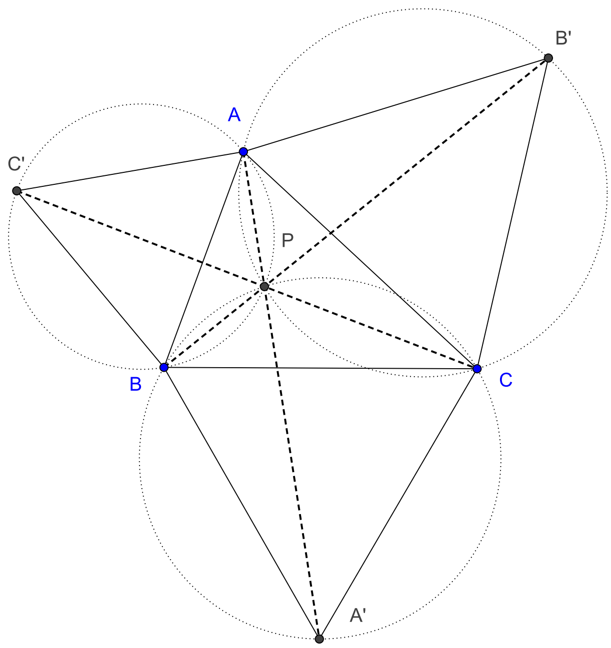


Montrons que l'égalité est atteinte si M est l'intersection P des segments AA' et CC'. Il faut bien sûr commencer par montrer que ces segments se coupent. Or (et c'est ici qu'intervient l'hypothèse sur les angles du triangle ABC) le segment AA' (resp. CC') coupe le segment AB (resp. BC). En effet l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'})$ est égal à $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \frac{\pi}{3} < \pi$, ce qui montre que C' appartient au demi-plan délimité par la droite (BC) et contenant A; de même C' appartient au demi-plan délimité par la droite (AC) et contenant B. Il en résulte que les deux segments AA' et CC' se coupent en un point intérieur au triangle ABC en vertu du lemme:

Lemme 4. *Soit ABC un triangle, C_1 un point de $]AB[$, A_1 un point de $]BC[$. Alors les segments AA_1 et CC_1 se coupent en un point intérieur au triangle ABC.*

En effet les coordonnées barycentriques dans le repère ABC du point d'intersection des droites AA_1 et CC_1 par rapport à B et C sont de même signe, puisque ce point est sur

AA_1, de même celles par rapport à A et B sont de même signe, puisque ce point est sur CC_1. Ces 3 coordonnées barycentriques sont donc positives.
L'image par r du segment AA' est le segment $C'C$ (ce qui montre au passage que ces deux segments ont même longueur) et le point $P' = r(P)$ appartient à ce segment. De plus P' est entre C' et P, puisque $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP'}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP}) + \dfrac{\pi}{3} < (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + \dfrac{\pi}{3} = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'})$. Les 4 points C', P', P et C sont donc bien alignés dans cet ordre, ce qui montre que P est solution du problème de minimisation et que le minimum de g sur E est égal à CC'.



Cette solution est unique, puisque, par permutation des sommets, toute solution doit aussi appartenir aux segments AA' et BB', où B' est le sommet du triangle équilatéral extérieur au triangle ABC construit sur le côté CA. On en déduit que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes, les segments AA', BB' et CC' ayant même longueur comme on l'a déjà remarqué. De plus le point P est intersection de 3 arcs capables (ensembles des points d'où l'on voit les segments AB, BC et CA sous des angles orientés de vecteurs égaux à $\dfrac{2\pi}{3}$) portés par les cercles circonscrits aux triangles $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$.