FAISCEAUX DE CERCLES

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé et soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Exercice 1. Puissance d'un point par rapport à un cercle
a) Soit un point P. Si une droite $\mathcal{D}$ passant par P coupe $\mathcal{C}$ en deux points M et M', montrer que $\overline{PM}.\overline{PM'}$ est indépendant de $\mathcal{D}$ et qu'il est égal à $PO^2 - r^2$ où r est le rayon du cercle $\mathcal{C}$. On le note $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$ et on l'appelle la puissance du point P par rapport à $\mathcal{C}$.
b) Montrer que si $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en T, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = PT^2$.
Régionner le plan en fonction du signe de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$.
c) Montrer que les quatre points A, B, C, D tels que (AB) et (CD) soient sécantes en I sont cocycliques si et seulement si $\overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IC}.\overline{ID}$.
d) Soit $P(x, y)$. Montrer $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$.

Exercice 2. Axe radical de deux cercles
a) Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles non concentriques, de centres respectifs O_1 etO_2. Montrer que l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à ces deux cercles est une droite orthogonale à la droite des centres (O_1O_2). Cette droite s'appelle *l'axe radical* des deux cercles.
b) Déterminer l'ensemble des points du plan dont les puissances par rapport à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ diffèrent d'une constante k donnée.
c) Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles de centres non alignés. Déterminer l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à ces trois cercles.
d) Soient $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ et $x^2 + y^2 + 12x + 2\lambda y + 36 = 0$ les équations de deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$'. Ecrire l'équation de leur axe radical, déterminer λ pour que les deux cercles soient tangents et préciser alors leur point de contact.

Exercice 3. Cercles On dit que deux cercles sécants $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si les tangentes à ces deux cercles en l'un de leurs points d'intersection sont orthogonales.
a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient orthogonaux faisant intervenir les rayons de ces deux cercles et la distance de leurs centres.
b) Soient $x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$ les équations des deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ces cercles soient orthogonaux est $2(a_1a_2 + b_1b_2) = c_1 + c_2$.

Exercice 4. Faisceaux de cercles
Etant donnés deux cercles non concentriques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, d'axe radical (Δ), on appelle faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ l'ensemble des cercles (Ç du plan tels que l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$ soit égal à (Δ).
a) Montrer que si $\mathcal{C}_1$ rencontre (Δ) en deux points A et B, le faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des cercles passant par A et B. On dit alors que A et B sont les "points de base" du faisceau.
On note, pour tout $\alpha \in [0, \pi[, (\Gamma_\alpha)$ l'ensemble des points M du plan vérifiant $(\widehat{MA, MB}) = \alpha$ mod.π. Montrer que le faisceau de cercles de points base A et B est l'ensemble des cercles (Γ_α) quand α décrit $]0, \pi[$
b) Décrire le faisceau quand (Δ) est tangent à $\mathcal{C}_1$.
c) Montrer que si un cercle est orthogonal à deux cercles distincts d'un faisceau, il est orthogonal à tous les cercles du faiceau (On remarquera qu'un tel cercle est centré sur l'axe radical d'un faisceau).
d) Montrer que si deux cercles non concentriques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ne se coupent pas, il existe un faisceau de cercles à points de base tel que le faiceau engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soit l'ensemble des cercles du plan orthogonaux à tout les cercles de ce faisceau.
Soient A et B ces points de base. Pour tout réel positif α, on note (C_k) l'ensemble des points M du plan vérifiant MA/MB=α.
Montrer que le faisceau engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des cercles $\mathcal{C}_\alpha$ pour $k \neq 1$.
e) Soient $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$ les équations de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Montrer qu'un cercle appartient au faisceau engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ si et seulement si son équation peut s'écrire sous la forme $\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) = 0$ pour deux réels λ_1 et λ_2.