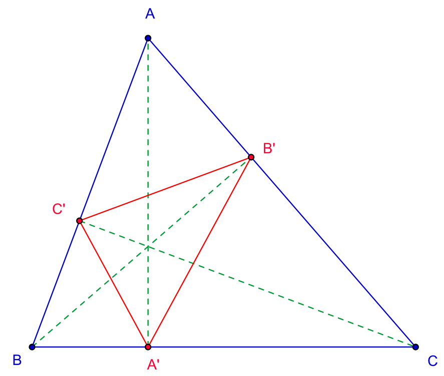
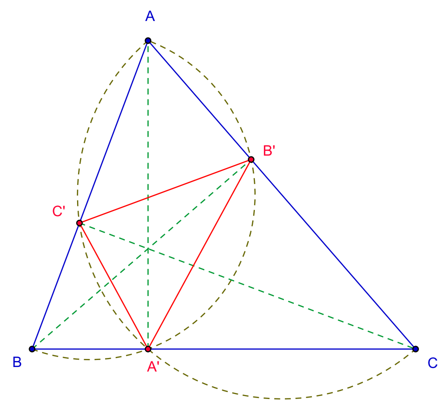
Le triangle orthique

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien et A', B', C' les pieds des hauteurs.
On se propose de montrer que les côtés du triangle ABC sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$.



1) Montrer que la somme des angles de droites $(A'A, A'B') + (A'A, A'C')$ est nulle (que peut-on dire des cercles de diamètres AB et AC ?).

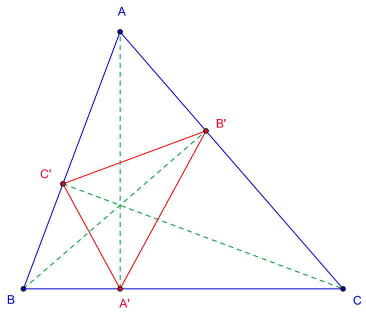


2) Conclure.

Solution
Les points A, A', B, B' (resp. A, A', C, C') sont cocycliques, puisqu'ils appartiennent au cercle de diamètre AB (resp. AC). On a donc :

$$\begin{array}{rcl}(A'A,A'B')+(A'A,A'C') & = & (BA,BB')+(CA,CC') \\ & = & (BA,AC)+(AC,BB')+(CA,AB)+(AB,CC') \\ & = & 0\end{array}$$

(égalités d'angles de droites).

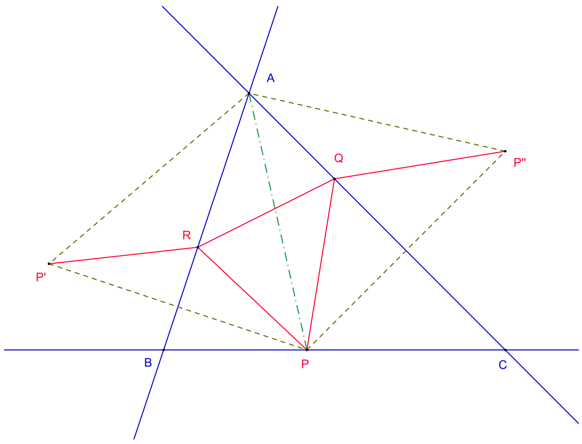


Remarque:
Si le triangle ABC a tous ses angles aigus, les hauteurs AA', BB' et CC' sont les bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$; si l'un des angles du triangle ABC est obtus, deux des hauteurs de ABC sont des bissectrices extérieures de $A'B'C'$, l'autre une bissectrice intérieure.

Le problème de Fagnano

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien acutangle (dont les angles sont aigus) et P, Q, R trois points appartenant respectivement aux côtés BC, CA et AB du triangle et distincts de ses sommets tels que la somme $PQ + QR + RP$ soit minimale. On se propose de montrer que les côtés du triangle ABC sont les bissectrices extérieures du triangle PQR. Les angles qui interviendront seront géométriques, c'est à dire non orientés et leur mesure sera prise dans $[0,\pi]$.

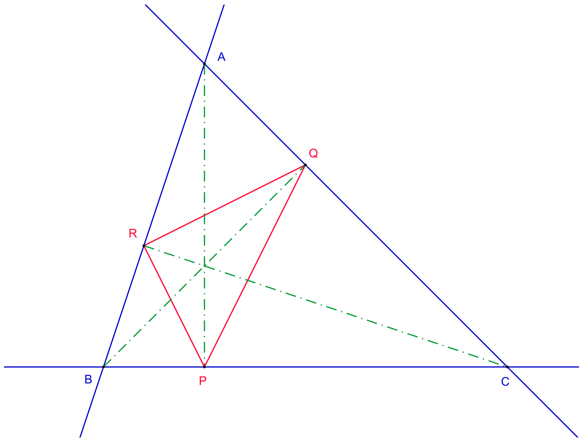
Dans un premier temps, on fixe P sur le segment $[BC]$. Soit P' (resp. P") le symétrique de P par rapport à la droite (AB) (resp.(AC)).



Le périmètre de PQR est $P'R+RQ+QP'$ qui est minimal quand P', R, Q, P" sont alignés et dans cet ordre. c'est le cas si et seulement si R (resp. R) est l'intersection de $(P'P")$ et de $[AC]$ (resp.$[AB]$) car $\widehat{P'AP} = 2\widehat{A} < \pi$ si $\hat{A}$ désigne l'angle $\widehat{BAC}$.

Le triangle $P'AP$" étant isocèle en A, on a $P'P" = 2APsin2\widehat{A}$, qui est minimal quand AP l'est c'est à dire quand P est le pied de la hauteur issue de A, qui appartient bien au segment $[BC]$ puisque les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus.
Soit T_P le triangle inscrit dans ABC par cette construction et soit p son périmètre. Soit $P'Q'R'$ un autre triangle de périmètre p'. Si $P' = P$, on a

$p' > p$, si $P' \neq P$ et $p' >$ périmètre de $T_{P'} > p$.
Le même raisonnement appliqué à Q et R montre que le triangle orthique est le seul triangle inscrit dans ABC de périmètre minimal.



Remarque 1:
Nous avons au passage démontré, que dans le cas d'un triangle acutangle, que les hauteurs de ABC sont bissectrices intérieures du triangle orthique.

Remarque 2:
Le triangle PQR est donc à la fois le triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC et le seul triangle de lumière (ou trajectoire de billard) contenu dans ce triangle. Si l'un des angles du triangle ABC est obtus, il n'existe pas de trajectoire de lumière dans le triangle ABC et le triangle de périmètre minimal est aplati : c'est le triangle APA si l'angle en A du triangle ABC est obtus.

Remarque 3:
La fonction $(P,Q,R) \mapsto PQ + QR + RP$ de $[BC] \times [CA] \times [AB]$ dans $\mathbb{R}$ est continue, donc atteint son minimum sur le compact $[BC] \times [CA] \times [AB]$. On vient de voir que si ce minimum est atteint en des points P, Q, R distincts des sommets A, B, C, ces points sont nécessairement les pieds des hauteurs. Si le minimum était atteint pour $R' = A$ (par exemple), on aurait aussi $Q' = A$ et P' serait le pied P de la hauteur issue de A ; le périmètre de $P'Q'R'$ serait donc $2\,AP$, ce qui est supérieur au périmètre de PQR. Le triangle PQR est donc bien le triangle de périmètre minimal inscrit dans le triangle ABC.