Formes bilinéaires, formes quadratiques

Parties du programme abordées :

5.6 Dualité
Formes linéaires. Dual E^* d'un espace vectoriel E. Base duale d'une base.
5.9 Formes quadratiques
Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes. Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques.
6.1 Espaces euclidiens
Orthonormalisation de Schmidt. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormale. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux éléments de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Endomorphismes symétriques positifs.

Dans cette feuille, on notera $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Décomposition en carrés

Exercice 1 *Changement de base et changement de coordonnées*
On considère les deux formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$l_1 : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1 - x_2 \end{array} \quad , \qquad l_2 : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_2 \end{array}$$

1. Montrer que (l_1, l_2) forme une base de l'espace dual $(\mathbb{R}^2)^*$ de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer une base (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2$ dont (l_1, l_2) est la base duale.

Exercice 2
Pour chacune des formes quadratiques réelles suivantes, donner :
— la forme bilinéaire associée,
— la matrice dans la base canonique,
— une décomposition en somme de carrés,
— une base orthogonale de l'espace et la matrice dans cette nouvelle base,
— la signature.

1. $q : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 \end{array}$

2. $q : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 \end{array}$

3. $q : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1x_2 \end{array}$

4. $q : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \end{array}$

Que se passe-t-il si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par le corps $\mathbb{C}$?

Exercice 3

Déterminer les signatures des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

1. $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2$.

2. $(x, y, z) \mapsto (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$.

Exercice 4

Soient l_1 et l_2 deux formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est la signature de la forme quadratique $x \mapsto l_1(x)l_2(x)$ de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de signature (r, s).
Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Quel peut être la signature de $q_{|H}$?

Exercice 6

On considère sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n la forme quadratique donnée par :

$$q(P) = \int_0^1 P^2 - (\int_0^1 P)^2.$$

Quelle est sa signature ?

Exercice 7

1. Montrer que l'application $(A, B) \to \mathrm{tr}(A\,{}^tB)$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que l'application $(A, B) \to \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa signature ?

Exercice 8

1. Pour quel entier n le déterminant est-il une forme quadratique sur l'espace vectoriel $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

2. Quelle est sa signature ?

3. Montrer que pour cet n, il existe un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ sur lequel la forme quadratique est identiquement nulle.

Exercice 9 *Signature et déterminant*

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de matrice S dans une base $\mathcal{B}$.

1. On suppose dans cette question que q est définie positive.

a. Montrer que tous les termes diagonaux de S sont strictement positifs. Que cela signifie-t-il pour l'expression de $q((x_1, ..., x_n))$ en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?

b. Montrer que le déterminant de S est strictement positif.

c. Montrer que tous les mineurs principaux de S, c'est-à-dire les déterminants des sous-matrices de S obtenus en conservant les lignes et colonnes de mêmes indices de S, sont strictement positifs.

2. Montrer réciproquement que tous les mineurs principaux de S sont strictement positifs, alors la forme quadratique q est définie positive.

3. Si q est de signature (r, s), quel est le signe du déterminant de q ?

Orthogonalité pour une forme quadratique

Exercice 10

On munit $\mathbb{R}^2$ de la forme quadratique $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

1. Décrire le comportement de l'orthogonal des droites vectorielles d'équation $y = ax$ lorsque a varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Même question pour la forme $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et les plans d'équation $z = ax$.

Exercice 11

Pour chacune des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^3$, déterminer l'ensemble des vecteurs orthogonaux :

— à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
— au vecteur $(1, 1, 1)$,
— au vecteur $(0, 0, 1)$
— à tous les vecteurs du plan $\mathrm{vect}((1, 1, 1), (0, 0, 1))$.

1. $q : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - 2yz + 2z^2$

2. $q : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - 2yz$

3. $q : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$

4. $q : (x, y, z) \mapsto x^2 - y^2$

Exercice 12

Donner, à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt appliquée à la base canonique, une base orthonormée pour le produit scalaire associé à la forme quadratique$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - 2yz + 2z^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

Matrices symétriques - Endomorphismes autoadjoints

Exercice 13

On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note q la forme quadratique de matrice S dans la base canonique et u l'endomorphisme de matrice S dans la base canonique.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^2$, quel lien y a-t-il entre $q(x)$ et $s(x)$?

2. Orthogonaliser q et diagonaliser s.

Exercice 14

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice d'une forme quadratique positive de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$ on a $a_{i,i} \geq 0$ et $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$.

Exercice 15

On note $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à n lignes et n colonnes, $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques positives et $\mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont des cônes convexes de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ centrés en 0.

2. Montrer que $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'intérieur (topologique) de $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$.

Formes quadratiques et coniques

Exercice 16

On considère la forme quadratique $q : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy + 2y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Donner la matrice S de q dans la base canonique.

2. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant S comme matrice. Diagonaliser u.

3. Décrire la conique d'équation $q((x, y)) = 1$. Quels sont ses axes ? Quel lien y a-t-il entre ces axes et l'endomorphisme u ?

4. Mêmes questions pour la forme forme quadratique $q : (x, y) \mapsto xy + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17

On considère la forme quadratique $xy - z^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

Quelle est sa signature ? Son cône isotrope ? Quel peut être la nature de l'intersection d'un plan affine avec le cône isotrope ?