Variables aléatoires

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$, avec $0 < a < b$. Donner la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance de $Y = X^2$.

Exercice 2 Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$.

Exercice 3 Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$ et $G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt$.

(1) Démontrer que $G(x) =_{+\infty} o(F(x))$.

(2) Soit X une v.a. suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Donner un équivalent de $P(X > x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$.

$$P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s).$$

(1) Vérifier qu'une variable aléatoire T vérifiant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire dont la densité est donnée par $f(t) = \lambda\exp(-\lambda t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est une variable aléatoire sans mémoire.

(2) Réciproquement, soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T > 0) > 0$.

   (a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Calculer $P(T > t/2^n)$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$. Conclusion ?

   (b) Soit $\alpha = P(T > 1)$. Démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (démontrer le d'abord pour $t \in \mathbb{N}^*$, puis pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$ et enfin pour $t \in \mathbb{R}_+^*$).

   (c) Conclure.

Exercice 5 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.

(1) Pour tout réel y, calculer $\mathbb{P}(Y > y)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

(2) On pose $Z = \max(X_1, X_2)$, calculer l'espérance de Z.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière « supérieure », c'est-à-dire que $\lceil X \rceil = [X] + 1$.

(1) Démontrer que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

(2) On note $Z = Y - X$. Quelle est sa fonction de répartition ?

(3) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité dont la densité est

$$f(x) = \frac{e^x}{e - 1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Exercice 7 Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$ et $X_n = n(1 - M_n)$.

(1) Quelle est la fonction de répartition de X_n ?

(2) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).