Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

(1) Déterminer la loi de X, calculer son espérance.

(2) On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 2 Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \; P(X = 1) = 0,3 \; P(X = 2) = 0,4 \; P(X = 3) = 0,2.$$

(1) On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Y sont indépendantes.

(2) On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.

(3) Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 3 A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 4 Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

(1) Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

  (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.

  (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".

(2) Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.

  (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.

  (b) En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".

  (c) Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.

(3) En 2013, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exercice 5 Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

(1) Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

(2) En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 6 On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à 1/2. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple et P la proportion de garçons.

(1) Exprimer P en fonction de X.
(2) Donner la loi de la variable aléatoire X.
(3) Que vaut $E(P)$? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 7 On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.
(1) Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
(2) Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
(3) Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 8 On considère une urne contenant $N = N_1 + N_2$ boule, N_1 étant rouges et N_2 blanches. On tire $n \leq N$ boules (on utilise le modèle équiprobable). Déterminer, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ la probabilité p_k d'obtenir k boules blanches.

Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $N_1, N_2 \to +\infty$ avec $N_1/N_2 = p$ (on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$).

Exercice 9 Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p On note

$$T = \left\{ \begin{array}{ll} \inf\{k \in [\![1, n]\!] X_k = 1\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ n+1 \quad \text{sinon} & \end{array} \right. .$$

Déterminer la loi de T.

Exercice 10 Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.
(1) Déterminer la loi de X.
(2) Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
(3) On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
(4) On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 11 On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaire pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?,

Exercice 12 Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{array} \right.$$

(1) Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
(2) Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.
(3) Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

Exercice 13 Soit X une variable aléatoire discrète prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1, \ldots, n$. On définit l'*entropie* de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).$$

(1) Calculer $H(X)$ si X est constante.

(2) Calculer $H(X)$ si X est équidistribuée.

(3) Trouver la valeur maximale de $H(X)$ pour X parcourant l'ensemble des variables aléatoires discrètes prenant au plus n valeurs.

(1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

  (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

  (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

  (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

(2) Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

  (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.

  (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.

  (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.

  (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.