Ce problème explore le thème archi-classique des polynômes de Tchebychev. La partie **I** établit leur existence et donne leurs toutes premières propriétés. La partie **II** les utilise pour résoudre un problème arithmétique assez naturel, enfin les parties **III**, **IV** et **V** illustrent le lien privilégié existant entre les polynômes de Tchebychev et l'interpolation polynomiale (lien qui, d'ailleurs, est à l'origine de leur découverte par Tchebychev, la célèbre identité qui sert désormais à les définir " $\cos nx = T_n(\cos x)$ ", fruit d'un joli hasard, n'ayant été constatée qu'ultérieurement...).

## Partie préliminaire

Soit l'équation algébrique suivante, où les $a_i$ sont des entiers, $a_0$ et $a_n$ étant supposés non nuls :

$$\text{(E)} \qquad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 .$$

Supposons que (E) admette une racine rationnelle $x_0 = \dfrac{p}{q}$, où $p$ est un entier non nul, $q$ un entier strictement positif, $p$ et $q$ premiers entre eux.

Prouver alors que $p$ divise $a_0$ et que $q$ divise $a_n$ .

## Partie I

**1.** **a.** Soit $n$ un entier positif ou nul. Montrer, en utilisant la formule de de Moivre, qu'il existe un unique polynôme $T_n$ (comme Tchebychev, bien sûr) tel que, pour tout réel $x$, on ait l'égalité :

$$\cos nx = T_n(\cos x) .$$

**b.** Prouver que $T_n$ est à coefficients entiers relatifs, et donner son degré.

**c.** Déterminer $T_0$ , $T_1$ , $T_2$ et $T_3$ .

**d.** Prouver la relation de récurrence

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) .$$

**e.** Prouver que $T_n$ a même parité que $n$, déterminer le coefficient de son terme de plus haut degré ainsi que ses valeurs en $-1$ et 1.

**2.** **a.** Quelles sont, en supposant $n$ supérieur ou égal à 1, les racines de $T_n$ ? Vérifier que celles-ci sont toutes réelles, simples et appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.

**b.** Préciser la disposition des zéros de $T_{n-1}$ par rapport à ceux de $T_n$ quand $n$ est plus grand que 2.

**3.** Prouver que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$ en posant :

$$\left(P \middle| Q\right) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t .$$

Montrer que la famille $\left(T_n\right)$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

## Partie II

Il est bien connu que $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. On a donc $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}\in\mathbf{Q}$, $\cos\frac{\pi}{3}\in\mathbf{Q}$.

L'objet de cette partie est de déterminer si $\frac{1}{3}$ est, ou non, l'unique rationnel $r$ vérifiant :

$$0<r<\frac{1}{2} \text{ et } \cos r\pi\in\mathbf{Q}.$$

Soit donc $r$ un rationnel vérifiant $0<r<\frac{1}{2}$ et $\cos r\pi\in\mathbf{Q}$. Si $r=\frac{p}{q}$, $p$ et $q$ étant des entiers naturels premiers entre eux, on a donc :

$$1\le p<\frac{q}{2}, \text{ ce qui entraîne que } q\ge 3.$$

**1.** Montrer que $\cos\frac{\pi}{q}$ est rationnel (on utilisera l'identité de Bézout et les résultats de la partie **I**).

**2.** Montrer que $q$ n'est pas multiple de 4. Il est donc possible d'écrire $q=h$ ou $q=2h$, $h$ étant un entier impair supérieur ou égal à 3.

**3.** En supposant que $q=h$ entier impair, montrer que $h=3$, puis que $p=1$ (on utilisera la partie préliminaire).

**4.** Peut-on avoir $q=2h$ ?

**5.** Conclure.

## Partie III

On s'intéresse ici au lien entre les polynômes de Tchebychev et le problème de l'interpolation.

Précisons : soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, et soient $p$ réels $x_1,\dots,x_p$ éléments de $[a,b]$. Interpoler $f$ aux points $x_i$, c'est assimiler $f$ à l'unique polynôme de degré plus petit que $p-1$ qui prend les mêmes valeurs que $f$ aux $x_i$.

L'objet de cette partie est, dans un premier temps, de prouver l'existence et l'unicité d'un tel polynôme interpolateur, et d'évaluer l'erreur commise quand on substitue ce polynôme à $f$.

Dans un deuxième temps, on se pose le problème suivant : puisque l'on a le choix des points $x_i$, comment les répartir dans le segment $[a,b]$ pour que l'interpolation soit la plus efficace possible ? La première réponse qui vient à l'esprit, totalement intuitive, est d'équirépartir les $x_i$ dans $[a,b]$ en posant :

$$\text{pour } k=1,\dots,p : x_k=a+(k-1)\frac{b-a}{p-1}.$$

Nous allons voir qu'en fait, il n'en est rien, que le bon choix des $x_i$ est tout autre, et que, étrangement, il conduit à prendre plus de points d'interpolation de *f* vers les bords de l'intervalle qu'en son centre…

**A.** Polynôme d'interpolation de Lagrange

On fixe ici un intervalle $[a,b]$ de **R**, un entier $p$ supérieur ou égal à 2, et $p$ points $x_1,\dots,x_p$ de $[a,b]$ deux à deux distincts. Soit d'autre part une fonction numérique *f* définie sur $[a,b]$.

**1.** Prouver que l'application

$$\Phi:\begin{cases}\mathbf{R}_{p-1}[X]\to\mathbf{R}^p\\ P\mapsto\big(P(x_1),\dots,P(x_p)\big)\end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**2.** En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $p-1$ qui prend les mêmes valeurs que *f* aux points $x_i$.

**3.** Donner une formule explicite de ce polynôme $P$ (on pourra au préalable construire un polynôme prenant la valeur 1 en $x_k$ et s'annulant aux $x_i$ pour $i\neq k$).

**B.** Évaluation de l'erreur

On garde ici les notations de la partie **A.**. On suppose de plus que *f* est de classe $C^p$, et on pose $g=f-P$.

**1.** Soit $x$ un élément fixé de $[a,b]$, différent de tous les $x_i$.

**a.** Prouver qu'il est possible de choisir une constante réelle $K$ pour que la fonction $h$ définie sur $[a,b]$ par :

$$h(t)=g(t)-K(t-x_1)\dots(t-x_p)$$

s'annule en tous les $x_i$ et en $x$. Ce choix sera supposé fait dans la suite.

**b.** Prouver alors que la dérivée $h^{(p)}$ s'annule sur $[a,b]$.

**c.** En déduire l'existence d'un point $c$ de $[a,b]$ tel que :

$$g(x)=\frac{g^{(p)}(c)}{p!}(x-x_1)\dots(x-x_p)\,.$$

**2.** Soit $M$ un majorant de la valeur absolue de la dérivée d'ordre $p$ de *f* sur $[a,b]$. Prouver que pour tout $x$ de $[a,b]$, on a l'inégalité suivante :

$$\left|f(x)-P(x)\right|\leq\frac{M}{p!}\left|(x-x_1)\dots(x-x_p)\right|\,.$$

**C.** Choix des points d'interpolation

On suppose ici que l'intervalle $[a,b]$ est l'intervalle $[-1,1]$, et on fixe toujours une fonction numérique *f* de classe $C^p$ sur $[-1,1]$. Puisqu'il n'est pas possible de jouer sur l'ordre de grandeur de la dérivée d'ordre $p$ de *f* qui est fixée, le bon choix des $x_i$ pour faire la meilleure interpolation de *f* possible est, en vertu de l'inégalité qui vient d'être prouvée, celui qui minimise le produit $\left|(x-x_1)\dots(x-x_p)\right|$ quand *x* décrit [–1,1].

On munit donc $\mathbf{R}_p[X]$ de la norme $\|P\| = \sup\limits_{-1\le t\le 1}|P(t)|$, et il s'agit de déterminer, de tous les polynômes unitaires de degré *p* possédant *p* racines distinctes dans [–1,1], celui (ou ceux) qui sont de norme minimale. On est bien d'accord ?

**1.** Calculer $\|T_p\|$. On posera dans la suite $U_p = \dfrac{T_p}{2^{p-1}}$, de telle sorte que $U_p$ est un polynôme unitaire de norme égale à $\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

**2.** Résoudre, pour *x* dans [–1,1], l'équation $\left|U_p(x)\right| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

**3.** Soit *Q* un polynôme unitaire de degré *p*, et de norme inférieure ou égale à $\dfrac{1}{2^{p-1}}$. En envisageant certaines valeurs prises par le polynôme $Q - U_p$, prouver que $Q = U_p$.

**4.** Quel est, en toute généralité, le bon choix à faire pour les points $x_1, \dots, x_p$ d'interpolation ?

Faire un dessin, par exemple pour $p = 16$, de leur répartition dans l'intervalle [–1,1].

## Partie IV

Soit *f* une fonction numérique de classe $C^\infty$ sur un intervalle contenant [–1,1]. Pour tout entier *p*, on note $P_p$ le polynôme de degré plus petit que *p* prenant les mêmes valeurs que *f* aux racines du polynôme de Tchebychev $T_p$. On cherche dans cette partie une condition suffisante pour que la suite $(P_p)$ converge uniformément vers *f* sur [–1,1].

On supposera que *f* est somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sur [–1,1], cette série entière étant de rayon de convergence *R* ( $R \ge 1$ bien sûr !).

**1.** Soit *r* un réel élément de [0,*R*[, et α un réel vérifiant $0 \le \alpha < r$.

**a.** Prouver que la suite $(a_n r^n)$ est bornée ; on notera $M = \sup\limits_n \left|a_n r^n\right|$.

**b.** Prouver que pour tout *x* de [–α,α], et pour tout entier positif *p*, on a :

$$\left| f^{(p)}(x) \right| \le Mr \frac{1}{(r-\alpha)^{p+1}} p!\,.$$

**2.** À partir de quelle valeur de $R$ peut-on affirmer que la suite $\left(P_p\right)$ converge uniformément vers $f$ sur $[-1,1]$ ?

## Partie V

Dans cette partie, on désigne par $I$ l'intervalle $[0,1]$, et on munit l'espace $E$ des fonctions numériques continues sur $I$ de la norme de la convergence uniforme (on rappelle qu'il s'agit alors d'un espace de Banach).

On choisit une suite finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $n+1$ points distincts de $I$ (que l'on pourra supposer être rangés dans l'ordre croissant), et on définit l'application linéaire $\Lambda_n$ qui, à un élément $f$ de $E$, associe son polynôme interpolateur de Lagrange aux $x_i$ :

$$\Lambda_n : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(X) \end{cases} \quad (\text{avec } L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)})$$

**1.** Prouver que $\Lambda_n$ est un opérateur continu, et que sa norme subordonnée vérifie :

$$\lambda_n = \left\| \Lambda_n \right\| = \sup_{x \in I} \sum_{i=0}^{n} \left| L_i(x) \right| .$$

*On suppose désormais que les points $x_i$ ont été choisis équidistants ; on a donc $x_i = \frac{i}{n}$.*

**2.** **a.** Prouver que $\left| L_i\left(\frac{1}{2n}\right) \right| \geq \frac{1}{4n^2} \binom{n}{i}$.

**b.** En déduire que $\lambda_n \geq \frac{2^n}{4n^2}$.

**3.** Grâce au délicat théorème de Banach-Steinhaus (?!), en déduire l'existence d'une fonction $f$ de $E$ pour laquelle on n'a pas :

$$\lim_n \Lambda_n(f) = f .$$

**4.** Sachant que si l'on avait choisi les points d'interpolation comme racines du $n+1$ ème polynôme de Tchebychev, on aurait trouvé $\lambda_n \leq \alpha \ln n$ où $\alpha$ est une certaine constante, commenter...

**5.** Redémontrer la complétude de l'espace $E$ muni de la norme infinie.

**That's all, folks !**