Concours Centrale - Supélec 2004

Épreuve : MATHÉMATIQUES I **Filière** PC

Dans tout le problème, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de complexes et $\sum a_n z^n$ la série entière associée, dont le rayon de convergence R_a est supposé non nul et fini.

On note C_a l'ensemble des complexes z de module R_a tels que $\sum a_n z^n$ est convergente.

On appelle cercle unité l'ensemble des complexes de module 1 : un complexe z appartient au cercle unité si et seulement s'il existe un réel x appartenant à l'intervalle $I =]-\pi, \pi]$ tel que $z = e^{ix}$.

D'autre part on note : $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, et $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k vérifiant : $p \leq k \leq q$.

On étudie différentes séries entières pour lesquelles l'ensemble C_a prend différentes formes.

Dans le cas où C_a est un cercle, on propose d'observer différents comportements de la fonction somme de la série entière sur ce cercle.

Partie I - Calculs préliminaires

Les résultats de cette partie sont destinés à préparer les démonstrations des parties suivantes.

I.A - Montrer les inégalités :

$$\forall x \in [0, \pi],\ 0 \leq \sin x \leq x \ \text{ et } \ \forall x \in [0, \pi/2],\ \sin x \geq \frac{2}{\pi} x .$$

I.B - Montrer que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et pour tout couple d'entiers naturels (p, q) tel que $p \leq q$:

$$\left| \sum_{k=p}^{q} e^{ikx} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| .$$

I.C - Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites complexes.

On note $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k .$$

I.C.1) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p, q) tel que $1 \leq p < q - 1$, on a :

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_q V_q - u_{p+1} V_p .$$

I.C.2) On suppose que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et que la série

$\sum_{k \geq 1} |u_k - u_{k+1}|$ est absolument convergente.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n v_n$ est convergente.

I.C.3) On suppose que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, convergente et de limite nulle.

Montrer que la série

$\sum_{n \geq 1} u_n v_n$ est convergente.

I.D - Déduire des questions précédentes que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, les séries

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(kx)}{k} \text{ et } \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(kx)}{k} \text{ sont convergentes.}$$

Que dire pour un réel x qui appartient à $2\pi\mathbb{Z}$?

Partie II - Quelques exemples d'ensembles C_a

On se place dans le cadre des notations de l'introduction.

II.A - Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $b_n = a_n (R_a)^n$.
Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est $R_b = 1$ et qu'un complexe z appartient à C_a si et seulement si $\frac{z}{R_a}$ appartient à C_b.
On se ramène ainsi à l'étude de séries entières de rayon de convergence égal à 1

II.B - On suppose dans cette question que $\sum |a_n|$ est convergente et que $R_a = 1$.

II.B.1) Déterminer C_a.

II.B.2) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ x \to a_n e^{inx} \end{cases}.$$

Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction continue sur I.

II.B.3) Donner un exemple simple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle C_a est le cercle unité.

II.C - Donner un exemple simple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle $R_a = 1$ et C_a est vide.

II.D - Construction de quelques cas intermédiaires.

II.D.1) On suppose qu'il existe un complexe z_0 de module 1 tel que $\sum a_n z_0^n$ soit semi-convergente (c'est-à-dire que $\sum a_n z_0^n$ est convergente mais ne converge pas absolument).

Montrer qu'alors $R_a = 1$.

II.D.2) Soit ξ un complexe de module 1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n\xi^n}$, montrer que C_a est le cercle unité privé d'un point à déterminer.

II.D.3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et p complexes distincts $\xi_1, \ldots, \xi_p$, tous de module 1.

Construire un exemple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle C_a est le cercle unité privé des p points $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

II.D.4) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\cos n}{n}$.

Déterminer R_a et C_a.

La série $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ est-elle convergente ?

Partie III - Un exemple pour lequel C_a est le cercle unité et $\sum|a_n|$ diverge

Dans cette partie, on définit la suite a_n de la façon suivante :

- $a_o = 0$,
- pour tout naturel p non nul et tout naturel n tel que

$$p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1 : a_n = \frac{(-1)^p}{p^2}.$$

III.A - Montrer que la série $\sum|a_n|$ est divergente.
(On pourra par exemple chercher un équivalent de $|a_n|$).

III.B - Soit (A_n) la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum a_n$.
III.B.1) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note P le plus grand entier naturel vérifiant : $P^2 \leq N$.
On pose : $R_N = A_N - A_{P^2-1}$.

Montrer que $|R_N| \leq \dfrac{2P+1}{P^2}$.

III.B.2) En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente.

III.C - Soit $z = e^{ix}$ un complexe de module 1, avec x non nul appartenant à I.
III.C.1) Calculer $|a_{n+1} - a_n|$ suivant les valeurs du naturel n, et en déduire que la série $\sum|a_{n+1} - a_n|$ est convergente.
III.C.2) Déduire des résultats précédents et de la partie I que la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

Partie IV - Un dernier exemple

IV.A - On veut montrer qu'il existe une constante réelle C_1 telle que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq C_1.$$

Soient $x \in]0, \pi[$ et k_x le plus grand entier naturel tel que $k_x \cdot x \leq \pi$.
IV.A.1) On suppose que $1 \leq n \leq k_x$. Montrer que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \leq \pi.$$

IV.A.2) On suppose que $n > k_x$. Montrer que :

$$\left| \sum_{k = k_x + 1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \le 2 .$$

On pourra notamment utiliser le résultat de la question I.C.1.

IV.A.3) Conclure.

IV.B - Soit n et N deux entiers naturels tels que : $1 \le n \le N$.

Soit $Q_{n,N}$ le polynôme défini par :

$$Q_{n,N}(X) = \sum_{k = N-n}^{N-1} \frac{1}{N-k} X^k + \sum_{k = N+1}^{N+n} \frac{1}{N-k} X^k .$$

IV.B.1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$Q_{n,N}(e^{ix}) = -2ie^{iNx} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} .$$

IV.B.2) En déduire qu'il existe une constante réelle C_2 telle que, pour tout couple de naturels (n, N) tel que $1 \le n \le N$ et tout complexe z de module 1 : $|Q_{n,N}(z)| \le C_2$.

IV.C - Pour tout entier naturel non nul j, on pose :

$$n_j = 2^{(j^3)},\ N_j = 2^{(j^3+1)} \text{ et } I_j = [\![N_j - n_j, N_j + n_j]\!] .$$

Vérifier que les intervalles I_j ainsi définis sont disjoints deux à deux.

Pour toute la suite du problème, on pose pour tout naturel j non nul : $P_j = Q_{n_j, N_j}$, et on définit les suites $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- s'il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \in I_j$, et $k \ne N_j$, alors :

$$\alpha_k = \frac{1}{N_j - k} \text{ et } a_k = \frac{e^{(ik)/j}}{j^2(N_j - k)} ;$$

- sinon $\alpha_k = a_k = 0$.

On étudie la série entière $\sum a_k z^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-\pi, \pi]$, on note

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikx} \text{ et } B_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} P_j\left(e^{i\left(x + \frac{1}{j}\right)}\right) .$$

IV.D - Montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I vers une fonction continue que l'on notera F.

IV.E - Montrer que pour tout naturel n non nul et tout x appartenant à I :

$$B_n(x) = A_{3 \cdot 2^{(n^3)}}(x).$$

IV.F - On veut montrer que la suite de fonctions $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers F sur I.

IV.F.1) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in (I_j)^2$ tels que $p < q$:

$$\sum_{k=p}^{q-1} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \leq 4.$$

IV.F.2) En déduire qu'il existe une constante réelle C_3 telle que pour tout entier naturel j non nul, pour tout couple de naturels (p, q), tels que $p \leq q$ et pour tout réel x non nul appartenant à I :

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k e^{ikx}\right| \leq \frac{C_3}{|x|}.$$

IV.F.3) Soit $x \in I$, $x \neq \pi$. Vérifier que, pour j entier naturel suffisamment grand, on a

$$\left|x + \frac{1}{j}\right| \neq 0 \text{ et } x + \frac{1}{j} \in I.$$

En déduire que pour n naturel suffisamment grand :

$$|A_n(x) - B_j(x)| \leq \frac{1}{j^2} \frac{C_3}{\left|x + \frac{1}{j}\right|}, \text{ où } j \text{ est l'entier naturel tel que } 2^{(j^3)} \leq n < 2^{(j+1)^3}.$$

On considère maintenant le cas $x = \pi$. Montrer, avec les mêmes conditions sur j et n, que

$$|A_n(x) - B_j(x)| \leq \frac{1}{j^2} \frac{C_3}{\left|\pi - \frac{1}{j}\right|}.$$

IV.F.4) Conclure.

IV.G - On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ x \to a_n e^{inx} \end{cases} .$$

On veut prouver que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

IV.G.1) Montrer que, pour tout entier naturel j non nul :

$$A_{N_j}\left(-\frac{1}{j}\right) - A_{N_j - n_j - 1}\left(-\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{2^{(j^3)}} \frac{1}{k} .$$

IV.G.2) Donner un équivalent simple de cette expression lorsque j tend vers $+\infty$ et conclure.

IV.H - Donner R_a et C_a.

••• FIN •••