Ce devoir est constitué de deux problèmes totalement indépendants.

PROBLÈME 1

On notera $\mathbf{N}_n$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, n désignant un entier naturel non nul.

M_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes, 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de cette algèbre.

Si E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $L(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. Étant donnés un endomorphisme u et une base e de E, on notera $M(u,e)$ la matrice de u dans la base e.

Pour $A \in M_n$, on note $A = \lfloor a_{i,j} \rfloor$ où $a_{i,j}$ désigne l'élément de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, et $\mathrm{rg}(A)$ le rang de A.

Pour i et j éléments de $\boldsymbol{N}_n$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1. La famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}_n^2}$ est une base de M_n.

La partie **I** n'a pas de rapport direct avec les parties suivantes qui, elles, sont intimement liées.

Partie I

On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec λ complexe et i différent de j.

1. **a.** Calculer les produits matriciels $E_{i,j}.E_{k,l}$.

b. Calculer le déterminant d'une matrice de transvection.

c. Calculer le produit de deux matrices de transvection. En déduire l'inverse d'une telle matrice.

2. Soit A un élément de M_n.

a. Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.

b. Établir un résultat analogue pour les colonnes.

3. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de M_n. On suppose que la première ligne ou la première colonne de A possède un élément non nul.

Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de M_n, toutes deux produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ ait son terme en position 1-1 égal à 1, et tous les autres termes de sa première ligne et de sa premières colonnes égaux à 0 (indication page suivante…).

(On pourra successivement envisager les cas suivants : *i*. $a_{1,1} = 1$; *ii*. $\exists i > 1$ tel que $a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$; *iii*. $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1$, $a_{i,1} = a_{1,i} = 0$).

4. Soit A un élément non nul de M_n, de rang égal à r.

Grâce à un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux matrices P et Q de M_n, toutes deux produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ vérifiant :

i. $b_{i,i} = 1$ pour $1 \leq i < r$.

ii. $b_{i,i} = 0$ pour $i > r$.

iii. $b_{i,i} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det(A)$ si $r = n$.

5. Montrer que les matrices de transvection engendrent le groupe spécial linéaire d'ordre n.

Partie II

Soit E un **C**-espace vectoriel de dimension n, et u et v deux endomorphismes de E fixés. On pose

$$A(u,v) = \{u \circ f \circ v,\ f \in L(E)\}.$$

1. Montrer que $A(u,v)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

2. Montrer (délicat, mais important et instructif…) que pour tout ϕ de $L(E)$,

$$\phi \in A(u,v) \Leftrightarrow \mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker}\phi \text{ et } \mathrm{Im}\phi \subset \mathrm{Im} u.$$

3. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} v$ dans E. Montrer que les espaces vectoriels $A(u,v)$ et $L(F, \mathrm{Im} u)$ sont isomorphes. En déduire la dimension de $A(u,v)$.

Partie III

Pour toutes matrices A et B de M_n, on pose :

$$f_{(A,B)} : \begin{cases} M_n \to M_n \\ X \mapsto AX\,{}^tB \end{cases}$$

1. Montrer que $f_{(A,B)}$ est linéaire.

2. Montrer que l'application $(A, B) \to f_{(A,B)}$ est bilinéaire de $M_n \times M_n$ dans $L(M_n)$, et que pour toutes matrices A, B, C et D de M_n, on a :

$$f_{(A,B)} \circ f_{(C,D)} = f_{(AC,BD)}.$$

3. Déterminer le rang de $f_{(A,B)}$ en fonction des rangs de A et de B.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{(A,B)}$ soit bijectif. Donner dans ce cas une expression de $f^{-1}_{(A,B)}$. À quelle condition $f_{(A,B)}$ est-il nul ?

4. **a.** Soit $M = \left[m_{i,j}\right]$ un élément de M_n. Calculer $f_{(E_{p,q},E_{r,s})}(M)$. Retrouver alors la valeur du rang de $f_{(E_{p,q},E_{r,s})}$ et donner une base de son image.

b. Montrer l'existence d'un complexe λ (que l'on explicitera) tel que :

$$f_{(E_{p,q},I_n)} \circ f_{(A,B)} \circ f_{(E_{r,s},I_n)} = \lambda f_{(E_{p,s},B)}.$$

5. Soient $A_1, A_2, \dots, A_p, B_1, B_2, \dots, B_p$ $2p$ éléments de M_n (p entier non nul). On pose $f = \sum_{k=1}^{p} f_{(A_k,B_k)}$.

a. On suppose que les p matrices B_k sont linéairement indépendantes. En utilisant ce qui précède, montrer que f est l'application nulle si et seulement si toutes les matrices A_k sont nulles.

b. Établir un résultat analogue en supposant l'indépendance linéaire des matrices A_k.

6. Montrer que la famille $\left(f_{(E_{p,q},E_{r,s})}\right)_{(p,q,r,s)\in\mathbf{N}_n^4}$ est une base de $L(M_n)$.

7. Soit f un élément non nul de $L(M_n)$, et D_f l'ensemble des systèmes $(A_1, A_2, \dots, A_p, B_1, B_2, \dots, B_p)$ d'éléments non nuls de M_n tels que $f = \sum_{k=1}^{p} f_{(A_k,B_k)}$. Une telle relation définit une décomposition de f de longueur p.

a. Montrer que D_f est non vide.

b. Montrer que f admet une décomposition de longueur minimum μ, et que si $f = \sum_{k=1}^{\mu} f_{(A_k,B_k)}$ est une telle décomposition, les μ matrices A_k qui la constituent sont linéairement indépendantes, de même que les μ matrices B_k.

Partie IV

Dans cette partie, on s'intéresse à l'ensemble Γ des éléments f de $L(M_n)$, **bijectifs**, tels que :

$$\forall X,Y \in M_n,\ f(XY) = f(X)f(Y).$$

1. Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les autres ?

2. Déterminer l'image de I_n par un élément quelconque de Γ.

3. Soit f un élément de Γ, et $f = \sum_{k=1}^{\mu} f_{(A_k,B_k)}$ une décomposition de f de longueur minimum.

a. Montrer que pour tout k de $\mathbf{N}_\mu$ et tout X de M_n, on a les relations $X\,{}^tB_k = {}^tB_k\, f(X)$ et $A_k X = f(X)A_k$.

En déduire que pour tout i et tout j de $\mathbf{N}_\mu$, et tout X de M_n, on a $A_i\,{}^tB_j\, f(X) = f(X)A_i\,{}^tB_j$.

b. Démontrer (attention) que pour tout i et tout j de $\mathbf{N}_\mu$, $A_i\,{}^tB_j$ est une matrice scalaire, puis que l'une au moins de ces matrices est non nulle.

Calculer alors μ.

4. Déterminer Γ.

PROBLÈME 2

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la suite des puissances d'un endomorphisme ϕ d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie E.

$L(E)$ désignera l'algèbre des endomorphismes de E, et k la dimension de E.

E sera supposé muni d'une norme $\|\ \|$.

On rappelle que l'on définit une norme sur $L(E)$ en posant, pour tout élément f de $L(E)$:

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|,\ x \in E, \|x\| = 1\}.$$

Partie I

1. Soit (ϕ_n) une suite d'éléments de $L(E)$. Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La suite (ϕ_n) est convergente dans $L(E)$.

ii. Pour tout x de E, la suite $\left(\phi_n(x)\right)$ converge dans E.

iii. Étant donnée une base $(e_1,\ldots,e_k)$ de E, les k suites $\left(\phi_n(e_i)\right)_n$, pour $1 \le i \le k$, convergent dans E.

2. De manière analogue, donner sans démonstration deux énoncés équivalents à l'énoncé suivant :

"la suite (ϕ_n) est bornée dans $L(E)$".

3. Soit ϕ un endomorphisme de E. Prouver que pour que la suite de ses puissances soit bornée, il est nécessaire que toutes les valeurs propres de ϕ soient de module inférieur ou égal à 1.

Prouver par un exemple que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Dans la suite de cette partie, ϕ désigne un élément de L(E) tel que la suite (ϕ^n) soit bornée.

4. **a.** Soit λ une valeur propre de module 1 de ϕ (en supposant qu'il en existe une !). Soit x un élément du noyau de l'endomorphisme $(\phi - \lambda Id)^2$. Exprimer, pour n entier naturel non nul, le vecteur $\phi^n(x)$ en fonction de x et de $y = \phi(x) - \lambda x$. En déduire que x est dans le noyau de $\phi - \lambda Id$.

Prouver alors que E est somme directe de $\operatorname{Ker}(\phi - \lambda Id)$ et de $\operatorname{Im}(\phi - \lambda Id)$.

b. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice M de ϕ s'écrit par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

où D est une matrice diagonale — éventuellement de taille nulle — dont les éléments diagonaux sont tous de module 1, et A une matrice carrée dont les valeurs propres sont toutes de module strictement plus petit que 1.

(<u>Indication</u> : On pourra constater que $\operatorname{Im}(\phi - \lambda Id)$ est stable par ϕ, et procéder par récurrence.)

c. λ désignant une valeur propre de module 1 de ϕ, que peut-on dire de la dimension de l'espace propre correspondant ?

Partie II

1. **a.** Soit λ un complexe de module strictement plus petit que 1, et N une matrice nilpotente. Prouver que la suite des puissances de la matrice $J = \lambda I_k + N$ tend vers zéro.

b. Soit A une matrice carrée complexe dont toutes les valeurs propres sont de module strictement plus petit que 1. Démontrer, en utilisant le théorème de réduction spectrale (?), que la suite (A^n) tend vers zéro.

2. En déduire que la réciproque du résultat établi dans la question **I.4.b.** est exacte, à savoir que si un endomorphisme ϕ de E possède dans une bonne base une matrice du type décrit dans cette question, alors la suite (ϕ^n) de ses puissances est bornée.

3. Étant donné un endomorphisme f de E, déduire de tout ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour que :

- **a.** la suite de ses puissances tende vers zéro.
- **b.** la suite de ses puissances soit convergente.

Partie III

On donne p complexes $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ et on considère l'espace F des suites complexes (u_n) vérifiant la récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

1. Étant donné un élément $u = (u_n)$ de F, quelle relation matricielle intéressante obtient-on en posant, pour tout n de $\mathbf{N}$: $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{bmatrix}$?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

- **a.** tout élément de F soit une suite bornée.
- **b.** tout élément de F soit une suite convergente.

Partie IV

On étudie ici un algorithme itératif permettant d'inverser les matrices dites "à diagonale dominante".

1. **a.** Soit $M = \lfloor m_{i,j} \rfloor$ une matrice carrée complexe d'ordre n, telle que pour tout entier i plus petit que n, on ait $|m_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}|$ (une telle matrice sera dite à diagonale dominante). Prouver que M est inversible.

b. Soit $N = \lfloor n_{i,j} \rfloor$ une matrice carrée complexe d'ordre *n*. Prouver que toute valeur propre complexe de *N* est dans la réunion des disques de centre $n_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |n_{i,j}|$.

On fixe dans la suite une matrice $A = \lfloor a_{i,j} \rfloor$ à diagonale dominante.

2. On pose $A = D + G$ où *D* est une matrice diagonale et *G* une matrice de diagonale nulle.

a. Vérifier que *A* et *D* sont inversibles, et que l'équation $AX = B$ est équivalente à $X = A'X + B'$, où l'on a posé $A' = -D^{-1}G$ et $B' = D^{-1}B$.

b. Prouver que le module de toutes les valeurs propres de A' est strictement plus petit que 1.

c. Soit *L* l'unique solution du système $AX = B$. On définit une suite (X_p) en choisissant une matrice colonne X_0 quelconque et en posant, pour tout entier *k* : $X_{p+1} = A'X_p + B'$.

En étudiant la suite $(X_p - L)$, montrer que la suite (X_p) converge vers *L*.

Fin du devoir, bon courage et bonnes vacances !