Corrigé de Centrale PC 2004 math 1
(Sylvie Bonnet)

I.A - Etude de fonctions classiques :

$x \to \sin x - x$ sur $[0,\pi]$ et $x \to \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

I.B - Somme d'une progression géométrique de raison e^{ix} différente de 1 :

$$\sum_{k=p}^{q} e^{ikx} = \frac{e^{ipx} - e^{i(q+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{p+q+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{i\frac{p-q-1}{2}x} - e^{i\frac{-p+q+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{e^{i\frac{p+q+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{2i\sin\left(\frac{p-q-1}{2}x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\left|\sum_{k=p}^{q} e^{ikx}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{p-q-1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

I.C - 1 $\forall p \ge 1,\ \forall k \ge p+1,\ v_k = V_k - V_{k-1}$

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p+1}^{q} u_k (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=p+1}^{q} u_k V_k - \sum_{k=p+1}^{q} u_k V_{k-1} = \sum_{k=p+1}^{q} u_k V_k - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} V_k$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_q V_q - u_{p+1} V_p$$

I.C - 2 On suppose que la suite $(V_n)_{n\in IN}$ est bornée par un réel M >0 et que la série $\sum |u_k - u_{k+1}|$ est convergente. Cette série vérifie donc le critère de Cauchy pour les séries.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in IN, \text{ tel que } \forall (p,q) \in IN^2,\ N < p < q-1 \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q-1} |u_k - u_{k+1}| < \varepsilon/3M .$$

Inégalité triangulaire : $\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k\right| \le \sum_{k=p+1}^{q-1} |u_k - u_{k+1}||V_k| + |u_q||V_q| + |u_{p+1}||V_p|$

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k\right| \le M \sum_{k=p+1}^{q-1} |u_k - u_{k+1}| + M|u_q| + M|u_{p+1}|$$

$$\forall (p,q) \in IN^2,\ N < p < q-1 \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k\right| \le \varepsilon/3 + M|u_q| + M|u_{p+1}|$$

Et là, on cherche l'hypothèse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ vers 0, sans laquelle on ne peut continuer...les candidats scrupuleux pourront avoir été perturbés par cet oubli qui leur aura fait perdre du temps et de la confiance pour la suite.

L'hypothèse manquante permet de prouver que la série de complexes $\sum u_k v_k$ vérifie le critère de Cauchy pour les séries et donc est convergente.

I.C - 3 On suppose que la suite $(V_n)_{n\in IN}$ est bornée. La suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante, **convergente de limite nulle.** Non seulement la série $\sum u_k - u_{k+1}$, formée par différence de deux termes consécutifs d'une suite convergente, est convergente, à termes positifs, donc absolument convergente comme demandé dans la question précédente, mais encore **la suite $(u_n)_{n\in IN}$ converge vers 0,** et donc d'après la question **I.C - 2**, la série $\sum u_k v_k$ converge.

I.D - On pose $u_k = \dfrac{1}{k}$ et $v_k = e^{ikx}$.

Pour x fixé appartenant à $IR - 2\pi.Z$, la majoration du **I.B** appliquée à $p = 1$ et $q = n$ a pour conséquence que la suite $(V_n)_{n\in IN}$ est bornée. . La suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante, convergente de limite nulle. D'après la question précédente, la série $\sum \dfrac{e^{ikx}}{k}$ converge, et donc ses parties réelle ($\sum \dfrac{\cos(kx)}{k}$) et imaginaire ($\sum \dfrac{\sin(kx)}{k}$) convergent.

Pour x fixé appartenant à $2\pi.Z$, la série $\sum \dfrac{\cos(kx)}{k}$ est la série harmonique qui diverge, et la série $\sum \dfrac{\sin(kx)}{k}$ est la série nulle qui converge.

Partie II

II.A R_a, rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supposé non nul.

$\forall z \in C,\ \ |z| < 1 \Rightarrow |R_a z| < R_a$ et la série $\sum b_n z^n = \sum a_n (R_a z)^n$ est absolument convergente.

$\forall z \in C,\ \ |z| > 1 \Rightarrow |R_a z| > R_a$ et la série $\sum b_n z^n = \sum a_n (R_a z)^n$ est divergente car le terme général ne tend pas vers 0.

Le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est donc égal à 1.

D'autre part, $\forall z \in C_a$, $\left|\dfrac{z}{R_a}\right| = 1$ et la série $\sum b_n \left(\dfrac{z}{R_a}\right)^n = \sum a_n \left(R_a \dfrac{z}{R_a}\right)^n = \sum a_n z^n$ converge.

Donc $\dfrac{z}{R_a} \in C_b$.

Réciproquement, $\forall z_1 \in C_b$, $\exists z \in C$ tel que $z_1 = \dfrac{z}{R_a}$.

Alors $|z| = R_a$ et la série $\sum a_n z^n = \sum a_n (R_a z_1)^n = \sum b_n {z_1}^n$ est convergente. Donc $z \in C_a$.

Finalement : $\boxed{z \in C_a \Leftrightarrow \dfrac{z}{R_a} \in C_b}$.

II.B.1) Pour tout z appartenant au cercle unité, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente donc convergente donc $z \in C_a$. L'inclusion réciproque est immédiate.

C_a est donc le cercle unité

II.B.2) $\forall x \in I$, $|a_n e^{inx}| = |a_n|$. La série $\sum |a_n|$ est une série numérique majorante convergente pour la série $\sum f_n$. La série $\sum f_n$ converge donc normalement sur I, ce qui implique sa convergence uniforme sur I.

Chacune des fonctions f_n est continue sur I et la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

La somme de la série $\sum f_n$ est donc continue sur I.

II.B.3) La série $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}}$ est à termes positifs et convergente et la série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence 1 (règle de d'Alembert). D'après **II.B.1**, l'ensemble C_a correspondant est donc le cercle unité.

II.C La série géométrique $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 et diverge pour tout z appartenant au cercle unité car le terme général ne tend pas vers 0. L'ensemble C_a correspondant est donc vide.

II.D.1) La série entière $\sum a_n z^n$ n'est pas absolument convergente pour $z = z_0$. Par définition du rayon de convergence, $\boxed{R_a \leq |z_0| = 1}$.

La suite $\left(a_n z_0{}^n\right)_{n\in IN}$ est bornée, car elle tend vers zéro comme terme général d'une série convergente. Donc $\boxed{R_a \leq |z_0| = 1}$.

Finalement $\boxed{R_a = 1}$

II.D.2) Pour tout ξ complexe de module 1 et pour tout z de module 1, il existe $x \in I$ tel que $\frac{z}{\xi} = e^{ix}$.

On applique **I.D** .Si $z \neq \xi$ alors $x \in IR - 2\pi.Z$ et la série $\sum a_n z^n = \sum \frac{e^{inx}}{n}$ converge.

Si $z = \xi$ alors $x \in 2\pi.Z$ et la série $\sum a_n z^n = \sum \frac{e^{inx}}{n}$ diverge.

Le fait que pour $z \neq \xi$ appartenant au cercle unité la série $\sum a_n z^n = \sum \frac{e^{inx}}{n}$ converge sans être absolument convergente implique d'après **II.D.1** que le rayon de convergence R_a est égal à 1.

L'ensemble C_a correspondant est alors le cercle unité privé du point ξ .

II.D.3) Chacune des séries entières $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\xi_j{}^n} z^n$ pour $j \in [\![1..p]\!]$, est de rayon de convergence 1 d'après ce qui précède. Je pose $a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\xi_j{}^n}$. Le rayon de convergence R_a est supérieur à 1.

Pour tout z de module 1 et différent de tous les ξ_j, la série entière $\sum a_n z^n$, somme de p séries convergentes, est elle-même convergente.

Pour tout $j \in [\![1..p]\!]$, la série entière $\sum a_n z^n$, somme de $p-1$ séries convergentes et d'une série divergente, est divergente. Ceci prouve à la fois que $R_a = 1$ et que C_a est le cercle unité privé des p points $\xi_1, \xi_2, .., \xi_p$.

II.D.4) $\cos n = \frac{e^{in} + e^{-in}}{2}$ et donc $\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ne^{-in}} + \frac{1}{ne^{in}}\right)$. Au facteur $\frac{1}{2}$ près, on se retrouve dans les hypothèses de la question précédente, avec $p = 2$, $\xi_1 = e^{-i}$ et $\xi_2 = e^i$.

Le rayon de convergence $R_a = 1$ et C_a est le cercle unité privé des 2 points e^{-i} et e^i .

La série $\sum\left|\frac{\cos n}{n}\right|$ n'est pas convergente, sinon, d'après la question **II.B,** C_a serait le cercle unité tout entier.

III.A Par définition de $(a_n)_{n\in IN}$, pour tout $n \geq 1$, $|a_n| \geq \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge.

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.

III.B.1) Avec les notations de l'énoncé, comme $P^2 \leq N < (P+1)^2$:

$$R_N = A_N - A_{P^2-1} = \sum_{n=P^2}^{N} a_n = \sum_{n=P^2}^{N} \frac{(-1)^P}{P^2} = \frac{N - P^2 + 1}{P^2}(-1)^P$$

$$|R_N| \leq \frac{(P+1)^2 - 1 - P^2 + 1}{P^2} = \frac{2P+1}{P^2}$$

Remarque : quand *N* tend vers l'infini, il en est de même de *P* par définition et théorème de comparaison. En effet : $P \geq \sqrt{N+1} - 1$. Par théorème d'encadrement R_N tend alors vers 0.

III.B.2) Toujours avec les notations de l'énoncé :

$$A_N = A_{P^2-1} + R_N = \sum_{k=1}^{P-1} (-1)^k \frac{(2k+1)}{k^2} + R_N = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{P-1} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{P-1} \frac{(-1)^k}{k^2} + R_N$$

A_N apparaît comme une somme de trois termes. Le premier est une somme partielle de la série harmonique alternée, qui est convergente par application du critère spécial des séries alternées. Le deuxième est une somme partielle d'une série absolument convergente, donc convergente. Le troisième R_N tend vers 0 quand *N* tend vers l'infini.

La série $\sum a_n$ est convergente car la suite $(A_n)_{n\in IN}$ de ses sommes partielles est convergente.

III.C.1) Soit $n \geq 1$ entier. S'il existe *p* entier strictement positif tel que $n = (p+1)^2 - 1$, alors :

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|a_{(p+1)^2} - a_{(p+1)^2-1}\right| = \left|\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2} - \frac{(-1)^p}{p^2}\right| = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} \leq \frac{2}{p^2},$$

sinon, $|a_{n+1} - a_n| = 0$.

Avec les notations de la question **III.B**, pour *N* entier strictement positif,

$\sum_{n=1}^{N} |a_{n+1} - a_n| \leq \sum_{n=1}^{(P+1)^2-1} |a_{n+1} - a_n| \leq \sum_{k=1}^{P} \frac{2}{k^2} \leq 2S$, si on note *S* la somme de la série de Riemann convergente $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

La série $\sum \lvert a_{n+1} - a_n\rvert$ à termes tous positifs et à sommes partielles bornées, est convergente.

III.C.2) Soit $z = e^{ix}$ avec $x \in]-\pi,\pi[- \{0\}$, c'est-à-dire $x \in IR - 2\pi.Z$. D'après la question **I.B** , si on pose $v_n = z^n$, la série $\sum v_n$ a ses sommes partielles bornées par $\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

On pose $u_n = a_n$. La série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge **et la suite** $(u_n)_{n\in IN}$ **converge vers 0.**

D'après la partie I, la série $\sum a_n z^n$ converge.

Pour $z = 1$, d'après **III.B**, la série $\sum a_n z^n$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } z \text{ appartenant au cercle unité, la série } \sum a_n z^n \text{ converge.}}$$

Comme $\sum a_n$ converge sans être absolument convergente, $R_a = 1$ (**II.D.1** pour $z_à = 1$).

Dans cet exemple, $R_a = 1, C_a$ est le cercle unité et la série $\sum |a_n|$ diverge.

IV.A.1) $x \in]0,\pi[$ **.** Avec les notations de l'énoncé, k_x est la partie entière de $\dfrac{\pi}{x}$.

Pour tout $n \in [\![1..k_x]\!]$, pour tout $k \in [\![1..n]\!]$, $k.x \in [0,\pi]$ donc $0 \le \dfrac{\sin(k.x)}{k} \le \dfrac{k.x}{k} = x$

Donc, $0 \le \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k} \le n.x \le k_x.x \le \pi$.

IV.A.2) $x \in]0,\pi[$ et on suppose maintenant $n > k_x$ pour appliquer le résultat de la question **I.C.1** en posant $v_n = \sin(n.x)$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$.

$V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k.x)$ est la partie imaginaire de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik.x}$ qui a été calculé en **I.B.** et majoré en module par $\dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$. Donc $|V_n| \le \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

$$\sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k} = \sum_{k=k_x+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).V_k + \frac{1}{n}V_n - \frac{1}{k_x+1}V_{k_x}$$

$$\left|\sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \left[\sum_{k=k_x+1}^{n-1} \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right| + \frac{1}{n} + \frac{1}{k_x+1}\right] = \frac{2}{(k_x+1)} \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$\dfrac{x}{2} \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on peut appliquer le résultat de la question **I.A** . $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \ge \dfrac{2}{\pi}.\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{\pi}$.

Ce qui permet de conclure $\left|\displaystyle\sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k}\right| \le \dfrac{2}{(k_x+1)} \dfrac{\pi}{x} \le 2$,

car $(k_x+1).x > \pi$ par définition de k_x.

IV.A.3) On commence par traiter le cas $x \in]0,\pi[$. Le résultat des questions précédentes permet de conclure que pour tout $n \in IN^*$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{k_x} \frac{\sin(k.x)}{k}\right| + \left|\sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k}\right| \le \pi + 2$$

Cette majoration est encore vraie pour $x = 0$ et pour $x = \pi$.

On peut étendre cette inégalité à IR tout entier par parité de $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k}\right|$ puis par $2.\pi$ - périodicité. La constante C_1 de l'énoncé peut être prise égale à $\boxed{\pi + 2}$

IV.B.1) $Q_{n,N}(e^{ix}) = \displaystyle\sum_{k=N-n}^{N-1} \frac{1}{N-k} e^{ikx} + \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{N-k} e^{ikx}$

Changement d'indices dans chacune des deux sommes :

$k \hookleftarrow N-k$ dans la première et $k \hookleftarrow k-N$ dans la seconde.

$$Q_{n,N}\left(e^{ix}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}e^{i(N-k)x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}e^{i(N+k)x}=e^{iN.x}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-ikx}-e^{ikx}}{k}=-2i.e^{iN.x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k.x)}{k}$$

IV.B.2) Pou r tout complexe z de module 1, il existe $x\in IR$ tel que $z=e^{ix}$.

$\left|Q_{n,N}(z)\right|\le\left|2i.e^{iN.x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k.x)}{k}\right|\le 2C_1$. On peut choisir $\boxed{C_2=2C_1}$

IV.C Pour $j\ge 2$, $\left(N_j-n_j\right)-\left(N_{j-1}+n_{j-1}\right)=2^{\left(j^3+1\right)}-2^{\left(j^3\right)}-2^{(j-1)^3+1}-2^{(j-1)^3}$

$$=2^{\left(j^3\right)}(2-1)-2^{(j-1)^3}(2+1)$$
$$=2^{j^3}-3.2^{(j-1)^3}$$
$$=2^{(j-1)^3}\left(2^{3j^é-3j+1}-3\right)>0$$

car $j\ge 2\Rightarrow 3j^2-3j+1=3j(j-1)+1\ge 7\Rightarrow\left(2^{3j^é-3j+1}-3\right)>0$

La borne de gauche de chaque intervalle I_j est strictement supérieure à la borne de droite de l'intervalle précédent I_{j-1}.

$$\boxed{\text{Les intervalles } I_j \text{ sont donc deux à deux disjoints.}}$$

IV.D

La suite de fonctions $\left(B_n\right)_{n\in IN}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\frac{1}{n^2}P_n\left(e^{i\left(x+\frac{1}{n}\right)}\right)$.

D'après la question précédente, $\forall j\in IN^*$, $\left|P_j\left(e^{i\left(x+\frac{1}{j}\right)}\right)\right|\le C_2$

et $\frac{1}{j^2}\left|P_j\left(e^{i\left(x+\frac{1}{j}\right)}\right)\right|\le\frac{C_2}{j^2}$ (série numérique majorante convergente).

La série $\sum\frac{1}{n^2}P_n\left(e^{i\left(x+\frac{1}{n}\right)}\right)$ converge donc normalement sur *IR*, donc la suite $\left(B_n\right)_{n\in IN}$ converge uniformément sur *IR*.

De plus, chacune des fonctions $x\to P_j\left(e^{i\left(x+\frac{1}{j}\right)}\right)$ est continue sur *IR*.

La somme de la série, qu'on notera F est donc continue sur *IR*.

IV.E Je calcule $A_{3.2^{\left(n^3\right)}}(x)=\sum_{k=0}^{3.2^{\left(n^3\right)}}a_k e^{ikx}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\left(\sum_{k=2^{\left(j^3+1\right)}+1}^{3.2^{\left(j^3\right)}}\frac{e^{ik\left(x+\frac{1}{j}\right)}}{N_j-k}+\sum_{k=2^{\left(j^3\right)}}^{2^{\left(j^3+1\right)}-1}\frac{e^{ik\left(x+\frac{1}{j}\right)}}{N_j-k}\right)$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}P_j\left(e^{i\left(x+\frac{1}{j}\right)}\right)=B_n(x)$$

IV.F On remarque que la suite $\left(A_n\right)_{n\in IN}$ contient une suite extraite $\left(A_{3.2^{\left(n^3\right)}}\right)_{n\in IN}$ qui converge uniformément sur *IR* vers *F*.

IV.F.1) $p<q$ étant deux éléments de l'intervalle I_j **:**

$$\sum_{k=p}^{q-1}\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right| \le \sum_{k=N_j-n_j}^{N_j+n_j-1}\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right|$$ (on a ajouté un certain nombre de termes positifs)

$\forall k \in [\![N_j-n_j, N_j-2]\!]$, $\alpha_k-\alpha_{k+1}\le 0$ et $\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right| = -\alpha_k+\alpha_{k+1}$

pour $k=N_j-1$, $\alpha_k-\alpha_{k+1}=1$

pour $k=N_j$, $\alpha_k-\alpha_{k+1}=1$

$\forall k \in [\![N_j+1, N_j+n_j-1]\!]$, $\alpha_k-\alpha_{k+1}\le 0$ et $\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right| = -\alpha_k+\alpha_{k+1}$

$$\sum_{k=N_j-n_j}^{N_j+n_j-1}\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right| = \sum_{k=N_j-n_j}^{N_j-2}\left(-\alpha_k+\alpha_{k+1}\right)+1+1+\sum_{k=N_j+1}^{N_j+n_j-1}\left(-\alpha_k+\alpha_{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{n_j}\right)+1+1+\left(1-\frac{1}{n_j}\right)$$
$$= 4-\frac{2}{n_j}$$

Donc $\boxed{\sum_{k=p}^{q-1}\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right|\le 4}$

IV.F.2) On applique le résultat du **I.C.1** avec $u_k=\alpha_k$ et $v_k=e^{ikx}$. En tenant compte de la majoration du **I.B**, $\sum_{k=p}^{q}\alpha_k e^{ikx} = \sum_{k=p}^{q-1}\left(\alpha_k-\alpha_{k+1}\right)V_k+\alpha_q V_q-\alpha_p V_{p-1}$

D'où $$\left|\sum_{k=p}^{q}\alpha_{\cdot k}\, e^{ikx}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\left(\sum_{k=p}^{q-1}\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right|+\left|\alpha_q\right|+\left|\alpha_p\right|\right)$$

Comme $x\in I-\{0\}$, $\frac{x}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et l'inégalité du **I.A** donne $\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\le\frac{\pi}{|x|}$

Pour peu qu'on ajoute **l'hypothèse manquante** (à mon avis) que comme en **IV.F.1**, $p\le q$ sont deux éléments de l'intervalle I_j, on peut majorer $\sum_{k=p}^{q-1}\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right|$ par 4, $\left|\alpha_q\right|$ et $\left|\alpha_q\right|$ par 1. Ce qui donne $\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\left(\sum_{k=p}^{q-1}\left|\alpha_k-\alpha_{k+1}\right|+\left|\alpha_q\right|+\left|\alpha_p\right|\right)\le\frac{6\pi}{|x|}$.

Finalement, pour $x\in I-\{0\}$, et pour $p\le q$ deux éléments de l'intervalle I_j,

$$\boxed{\left|\sum_{k=p}^{q}\alpha_{\cdot k}\, e^{ikx}\right|\le\frac{6\pi}{|x|}}$$

IV.F.3) x appartient à l'intervalle $]-\pi,\pi[$ qui est un ouvert. Quand j tend vers l'infini, $x+\frac{1}{j}$ tend vers x. Donc à partir d'un certain rang, $x+\frac{1}{j}\in\,]-\pi,\pi[$.

D'autre part, les $x+\frac{1}{j}$ sont deux à deux distincts. Il s'en trouve donc au plus un qui est nul.

Finalement, à partir d'un certain rang, $x+\frac{1}{j} \in I$ et $\left|x+\frac{1}{j}\right| \neq 0$.

Soit j l'entier naturel tel que $2^{\left(j^3\right)} \leq n < 2^{(j+1)^3}$. Quand n tend vers l'infini, il en est de même pour j.
D 'après le résultat de la question **IV.E**, $B_j(x) = A_{3.2^{j^3}}$ donc :

$$A_n(x) - B_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikx} - \sum_{k=1}^{3.2^{j^3}} a_k e^{ikx} = \sum_{k=p}^{q} a_k e^{ikx}$$

avec $p = \min\left(n, 3.2^{j^3}\right)+1$ et $q = \max\left(n, 3.2^{j^3}\right)$ vérifiant $p \leq q$ qui sont deux éléments de l'intervalle I_j .On peut appliquer le résultat de la question précédente après avoir exprimé a_k à l'aide de α_k (je soupçonne des difficultés de lecture de certaines copies....)

$$\left|A_n(x) - B_j(x)\right| = \left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k \frac{e^{i.\frac{k}{j}}}{j^2} e^{ikx}\right| = \frac{1}{j^2}\left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k e^{i.\frac{k}{j}} e^{ikx}\right| = \frac{1}{j^2}\left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k e^{i.k\left(\frac{1}{j}+x\right)}\right|$$

et comme pour j assez grand, $x+\frac{1}{j} \in I$ et $x+\frac{1}{j} \neq 0$:

pour n assez grand : $\boxed{\left|A_n(x) - B_j(x)\right| \leq \frac{1}{j^2} \frac{6\pi}{\left|x+\frac{1}{j}\right|}}$

Pour $x = \pi$, on peut utiliser l'égalité ci-dessus :

$\left|A_n(\pi) - B_j(\pi)\right| = \frac{1}{j^2}\left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k e^{i.k\left(\frac{1}{j}+\pi\right)}\right|$, puis par $2\pi -$ périodicité

$$\left|A_n(\pi) - B_j(\pi)\right| = \frac{1}{j^2}\left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k e^{i.k\left(\frac{1}{j}-\pi\right)}\right|.$$

Pour $j \in IN^*$, $-\pi+\frac{1}{j} \in I$ et $-\pi+\frac{1}{j} \neq 0$, la majoration démontrée en **IV.F.2** donne $\left|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k e^{i.k\left(\frac{1}{j}-\pi\right)}\right| \leq \frac{6\pi}{\left|-\pi+\frac{1}{j}\right|}$, et finalement : $\left|A_n(\pi) - B_j(\pi)\right| \leq \frac{1}{j^2} \frac{6\pi}{\left|\pi-\frac{1}{j}\right|}$.

IV.F.4) On a démontré que pour tout x fixé dans I, la série $\sum a_k e^{ikx}$ converge et sa somme est continue sur I .
Donc la série entière $\sum a_n z^n$ converge sur le cercle unité.
On ne nous fait pas calculer le rayon de convergence de la série entière, on ne nous fait pas montrer que la série ne converge pas normalement sur le disque fermé unité, ni que la somme de la série entière est continue sur le cercle unité.